

Club de l'Excellence

MATHÉMATIQUES

Séries Scientifiques

Sessions de remplacement
1986 - 2000



- ☞ *S'entraîner avec des sujets de sessions de remplacement*
- ☞ *Conseils pratiques*
- ☞ *Corrigés détaillés*

Présentation

Thierno Korka DIALLO

Elève ingénieur à l'Ecole Polytechnique

Mathématiques

Série S1

Sessions remplacement



Cheikh Anta DIOP

Présenté par

Thierno Korka DIALLO

Élève ingénieur à l'Ecole Polytechnique de Thiès

Thierno Korka DIALLO Tel: (+221) 77 465 32 33 e-mail: korka1991@yahoo.com

Site web:<http://document1991.skyrock.com>

Avant - Propos

Ce document est conçu pour aider les élèves à se préparer au Baccalauréat plus particulièrement aux sessions de remplacement.

Par une sélection de sujets particuliers, l'auteur a voulu atteindre un double objectif : d'une part aider les professeurs qui continuent, envers et contre tous, à être exigeants, dans l'intérêt même des élèves ; d'autre part, offrir aux élèves curieux, comme à ceux qui sont sensibles au plaisir des Maths - et il en existe beaucoup - le bonheur de s'entraîner à des sujets de session de remplacement.

Sans pour autant se substituer aux professeurs dans leurs travaux, ce livre se veut le catalyseur qui permettra le bon déroulement de l'enseignement, de la recherche et qui offrent à ses usagers de plus grande chance de réussite au bac et aux concours à l'échelle nationale.

Vous trouverez ainsi des :

⇒ Sujets de Bac entre 1986 et 2011 ;

⇒ Sujets supplémentaires, qui offrent des outils précieux aux les professeurs et dont la classe « peut suivre » ont traité, et qui, l'année suivante, feront partie de ce que « tout le monde sait ».

⇒ Corrigés parfois détaillés,

L'orientation étant bien indiquée, il appartient à chaque bénéficiaire d'en tirer le plus de profit possible.

NB : Ce document est perfectible. Toutes remarques et suggestions pouvant contribuer à son amélioration seront accueillies avec une grande reconnaissance. A cet égard, veuillez bien accepter d'avance, mes plus sincères remerciements.

L'auteur

Au nom d'ALLAH, le Clément et le Miséricordieux

Je rends grâce à ALLAH le Tout – Puissant dont la main mystérieuse est en tout et partout dans les événements qui rythment notre vie d'êtres humains, à son Prophète Mohammad Paix et Salut sur Lui qui incarne et symbolise l'Humanité.

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail :

À mon père et à ma mère sans qui je ne serai rien

À mon ancien professeur de Mathématiques Monsieur DIAO

À mon ancien professeur de Mathématiques Monsieur FAYE

À mon ancien professeur des Sciences Physiques Mr Mafal FALL

À Mr SOW, professeur de Mathématiques au Lycée Djignabo de Ziguinchor

À Mr DIALLO, professeur de Mathématiques au Lycée Djignabo de Ziguinchor

À Mr FALL, professeur de Mathématiques au Lycée Elhadj Omar Lamine BADJI

À Mr TOP, professeur de Mathématiques au Lycée Elhadj Omar Lamine BADJI

À ma promotion de TS1 2009 – 2010 plus particulièrement à Khadim NDIAYE

À mon ami et frère polytechnicien Pathé NDOYE

À mon ami et frère polytechnicien Pape Ousmane NIASSE

À mon ami et frère polytechnicien Ameth NDIAYE

À mon ami et frère polytechnicien Maoudo DIOP

Aux élèves ingénieurs de l'Ecole Polytechnique de Thiès

Au président du Bureau Des Elèves de l'Ecole Polytechnique de Thiès Médoune TALL

Sommaire

Conseils pratiques	6
Génie noir - Cheikh Anta DIOP	9
Première partie - Epreuves.....	17
Epreuve de 1986.....	18
Epreuve de 1987.....	21
Epreuve de 1988.....	24
Epreuve de 1994.....	28
Epreuve de 1995.....	31
Epreuve de 1996.....	35
Epreuve de 1997.....	41
Epreuve de 1998.....	45
Epreuve de 1999.....	50
Epreuve de 2000.....	54
Deuxième partie - Corrigés	56

CONSEILS PRATIQUES

Vous êtes élève en classe de terminale, vous préparez votre bac, alors n'hésitez pas à vous conformer aux règles ci-dessous qui sont indispensables pour votre bon déroulement du bac sans contraintes.

1. BACCALAUREAT

1. Veille du bac

1.1 Préparez votre convocation ainsi que votre pièce d'identité.

1.2 N'oubliez pas :

- Vos stylos. Prenez-en au moins cinq (05).
- Vos crayons de couleurs, ainsi que votre crayon noir.
- Votre règle et vos matériels géométriques (compas, rapporteur, double décimètre, taille).
- Votre calculatrice avec des piles neuves. N'utilisez pas une machine calculatrice que vous ne maîtrisez pas.

2. Le jour J

Après être entré en salle, le surveillant vous demandera de garder sur votre table, le strict nécessaire, tout le reste sera déposé le long du mur.

Le sujet est distribué :

2.1 Lisez le sujet en entier

2.2 Relevez les points attribués aux différents exercices. Déterminer alors le temps à passer sur chaque exercice.

- Un exercice de 3 points doit être traité en 36 minutes

- Un exercice de 4 points doit être traité en 48 minutes

- Un exercice de 5 points doit être traité en 60 minutes

2.3 L'épreuve dure 4 heures, essayez de vous laisser 15 minutes en fin d'épreuve pour la relecture.

2.4 Commencez par traiter les exercices qui vous semblent plus « faciles ».

2.5 Soyez rigoureux dans tout votre travail

2.6 Respectez la numérotation des questions

2.7 Séparez les réponses par une ligne.

2.8 Encadrez vos résultats

2.9 Si vous butez sur une question, n'y passez pas trop de temps, admettez le résultat et continuez votre travail.

2.10 Prenez plusieurs intercalaires

2.11 Contrôlez de temps en temps le temps qui vous reste.

2.12 Si possible, consacrez le dernier quart d'heure pour la relecture de la copie.

3. Rédaction

3.1 Le fond :

3.1.1 Énoncez complètement les théorèmes avant leur utilisation si nécessaire.

3.1.2 Attention, votre calculatrice peut vous induire en erreur.

3.2 La forme :

3.2.1 Est-il besoin de rappeler qu'une écriture lisible est indispensable car certaines écritures peuvent être mal lues par le correcteur :

Ainsi : x et n peuvent se confondre. Z et 2,

3.2.2 Attention aux indices et aux exposants

3.2.3 N'abrégez **jamais**

3.2.4 Tout calcul doit être suivi d'une conclusion sous forme d'une phrase. Les mathématiques ne sont pas que des calculs

2. Concours à faire

- Concours d'Entrée à l'Ecole Polytechnique de Thiès (EPT)
- Concours d'Entrée à l'Ecole Supérieure Polytechnique (ESP)
- Concours d'Entrée à l'Ecole Supérieure Multinationale des Télécommunications
- Concours ITS (Ingénieur des Travaux Statistiques)
- Concours d'Entrée à l'Ecole Militaire de Santé (EMS)
- Concours ENSA (Ecole Nationale de la Science Agronome)

- Concours d'Entrée aux Grandes Ecoles

3. Concours Général Sénégalais

Le Concours Général sénégalais de Mathématiques est, comme son nom l'indique un concours. Il est donc beaucoup plus challengeant qu'une épreuve du BAC. Il est aussi plus long et dure 6 heures. Le concours vise à repérer les talents Mathématiques du futur.

Le Concours Général Sénégalais couvre l'ensemble du programme de Terminale S1 (TS1). Il n'est en général pas très adapté aux programmes des autres séries scientifiques. Il faut d'abord commencer par le plus simple, c'est à dire le BAC. L'idéal, c'est d'être capable de traiter les sujets de BAC au moins une bonne partie l'été qui précède la rentrée.

Il faut beaucoup lire et faire des recherches à l'internet, aussi il faut énormément s'exercer, disons il faut juste être bon. En dernier lieu, il faut surtout traiter les sujets, disons des 10-15 dernières années. Faute de temps, il est préférable d'essayer de les traiter dans les limites du temps, de vous rapprocher des professeurs.

4. Bons documents indispensables pour les Concours

1. Maths pour les Cracks
 2. Maths pour les Musculation
 3. PROLIMATHS
 4. Hachette (Analyse et Géométrie)
-

Génie noir - Cheikh Anta DIOP

Cheikh Anta Diop naît en 1923 dans un petit village du Sénégal, Caytou. L'Afrique est sous la domination coloniale européenne qui a pris le relai de la traite négrière atlantique commencée au 16ème siècle. La violence dont l'Afrique est l'objet, n'est pas de nature exclusivement militaire, politique et économique. Théoriciens (**Voltaire, Hume, Hegel, Gobineau, Lévy Bruhl**, etc.) et institutions d'Europe (l'institut d'ethnologie de France créé en 1925 par L. Lévy Bruhl, par exemple), s'appliquent à légitimer au plan moral et philosophique l'infériorité intellectuelle décrétée du Nègre. La vision d'une Afrique anhistorique et atemporelle, dont les habitants, les Nègres, n'ont jamais été responsables, par définition, d'un seul fait de civilisation, s'impose désormais dans les écrits et s'ancre dans les consciences. L'Égypte est ainsi arbitrairement rattachée à l'Orient et au monde méditerranéen géographiquement, anthropologiquement, culturellement.

C'est donc dans un contexte singulièrement hostile et obscurantiste que Cheikh Anta Diop est conduit à remettre en cause, par une investigation scientifique méthodique, les fondements mêmes de la culture occidentale relatifs à la genèse de l'humanité et de la civilisation. La renaissance de l'Afrique, qui implique la restauration de la conscience historique, lui apparaît comme une tâche incontournable à laquelle il consacrera sa vie.

C'est ainsi qu'il s'attache, dès ses études secondaires à Dakar et St Louis du Sénégal, à se doter d'une formation pluridisciplinaire en sciences humaines et en sciences exactes, nourrie par des lectures extrêmement nombreuses et variées. S'il acquiert une remarquable maîtrise de la culture européenne, il n'en est pas moins profondément enraciné dans sa propre culture. Sa parfaite connaissance du wolof, sa langue maternelle, se révélera être l'une des principales clés qui lui ouvrira les portes de la civilisation pharaonique. Par ailleurs, l'enseignement coranique le familiarise avec le monde arabo-musulman.

A partir des connaissances accumulées et assimilées sur les cultures africaine, arabo-musulmane et européenne, Cheikh Anta Diop élabore des contributions majeures dans différents domaines

L'œuvre de Cheikh Anta Diop

La reconstitution scientifique du passé de l'Afrique et la restauration de la conscience historique

Au moment où Cheikh AntaDiop entreprend ses premières recherches historiques (années 40) l'Afrique noire ne constitue pas "un champ historique intelligible" pour reprendre une expression de l'historien britannique **Arnold Toynbee**. Il est symptomatique qu'encore au seuil des années 60, dans le numéro d'octobre 1959 du Courrier de l'UNESCO, l'historien anglo-saxon **Basile Davidson** introduise son propos sur la "Découverte de l'Afrique" par la question : "Le Noir est-il un homme sans passé ?"

Dans son ouvrage Cheikh AntaDiop, Volney et le Sphinx, **Théophile Obenga** montre en quoi consiste l'originalité et la nouveauté de la problématique historique africaine ouverte et développée par Cheikh AntaDiop :

"En refusant le schéma hégélien de la lecture de l'histoire humaine, Cheikh AntaDiop s'est par conséquent attelé à élaborer, pour la première fois en Afrique noire une intelligibilité capable de rendre compte de l'évolution des peuples noirs africains, dans **le temps et dans l'espace** [...] Un ordre nouveau est né dans la compréhension du fait culturel et historique africain. Les différents peuples africains sont des peuples "historiques" avec leur État : l'Égypte, la Nubie, Ghana, Mali, Zimbabwe, Kongo, Bénin, etc. leur esprit, leur art, leur science. " (pp. 27-28).

Nations nègres et Culture – De l'Antiquité nègre égyptienne aux problèmes culturels de l'Afrique d'aujourd'hui– que publie en 1954 Cheikh AntaDiop aux Éditions Présence Africaine créées par **Alioune Diop** est le livre fondateur d'une écriture scientifique de l'histoire africaine.

Les principales thématiques développées par Cheikh AntaDiop

Les thématiques présentes dans l'œuvre de Cheikh AntaDiop peuvent être regroupées en six grandes catégories :

a. L'origine de l'homme et ses migrations. Parmi les questions traitées : l'ancienneté de l'homme en Afrique, le processus de différenciation biologique de l'humanité, le processus de sémitisation, l'émergence des Berbères dans l'histoire, l'identification des grands courants migratoires et la formation des ethnies africaines.

b. La parenté Égypte ancienne/Afrique noire. Elle est étudiée selon les aspects suivants : le peuplement de la vallée du Nil, la genèse de la civilisation égypto-nubienne, la parenté linguistique, la parenté culturelle, les structures socio-politiques, etc.

c. La recherche sur l'évolution des sociétés. Plusieurs développements importants sont consacrés à la genèse des formes anciennes d'organisation sociale rencontrées dans les aires géographiques méridionale (Afrique) et septentrionale (Europe), à la naissance de l'État, à la formation et l'organisation des États africains après le déclin de l'Égypte, à la caractérisation des structures politiques et sociales africaines et européennes avant la période coloniale ainsi qu'à leur évolution respective, aux modes de production, aux conditions socio-historiques et culturelles qui ont présidé à la Renaissance européenne.

d. L'apport de l'Afrique à la civilisation. Cet apport est restitué dans de nombreux domaines : la métallurgie, l'écriture, les sciences (mathématiques, astronomie, médecine, ...), les arts et l'architecture, les lettres, la philosophie, les religions révélées (judaïsme, christianisme, islam), etc.

e. Le développement économique, technique, industriel, scientifique, institutionnel, culturel de l'Afrique. Toutes les questions majeures que pose l'édification d'une Afrique moderne sont abordées : maîtrise des systèmes éducatif, civique et politique avec l'introduction et l'utilisation des langues nationales à tous les niveaux de la vie publique ; l'équipement énergétique du continent ; le développement de la recherche fondamentale ; la représentation des femmes dans les institutions politiques ; la sécurité ; la construction d'un État fédéral démocratique, etc. La création par Cheikh AntaDiop du laboratoire de datation par le radiocarbone qu'il dirige jusqu'à sa disparition est significative de toute l'importance accordée à "l'enracinement des sciences en Afrique".

f. L'édification d'une civilisation planétaire. L'humanité doit rompre définitivement avec le racisme, les génocides et les différentes formes d'esclavage. La finalité est le triomphe de la civilisation sur la barbarie. Cheikh AntaDiop appelle de ses vœux l'avènement de l'ère qui verrait toutes les nations du monde se donner la main "pour bâtir la civilisation planétaire au lieu de sombrer dans la barbarie" (Civilisation ou Barbarie, 1981). L'aboutissement d'un tel projet suppose :

- la dénonciation de la falsification moderne de l'histoire : "La conscience de l'homme moderne ne peut progresser réellement que si elle est résolue à reconnaître

explicitement les erreurs d'interprétations scientifiques, même dans le domaine très délicat de l'Histoire, à revenir sur les falsifications, à dénoncer les frustrations de patrimoines. Elle s'illusionne, en voulant asseoir ses constructions morales sur la plus monstrueuse falsification dont l'humanité ait jamais été coupable tout en demandant aux victimes d'oublier pour mieux aller de l'avant" (Cheikh AntaDiop, Antériorité des civilisations nègres – mythe ou vérité historique ?, Paris, Présence Africaine, p. 12).

- la réaffirmation de l'unité biologique de l'espèce humaine fondement d'une nouvelle éducation qui récuse toute inégalité et hiérarchisation raciales : "... Donc, le problème est de rééduquer notre perception de l'être humain, pour qu'elle se détache de l'apparence raciale et se polarise sur l'humain débarrassé de toutes coordonnées ethniques." (Cheikh AntaDiop, "L'unité d'origine de l'espèce humaine", in Actes du colloque d'Athènes : Racisme science et pseudo-science, Paris, UNESCO, coll. Actuel, 1982, pp. 137-141).

L'actualité de Cheikh AntaDiop

Comment élaborer une véritable stratégie de développement de l'Afrique : éducation, santé, défense, énergie, recherche, industrie, institutions politiques, sport, culture, etc. ? Quelles sont les conditions du progrès de la conscience humaine et de l'émergence d'une civilisation planétaire ayant définitivement rompu avec la barbarie ?

Cheikh AntaDiop montre que des réponses pertinentes à ces interrogations capitales exigent une connaissance la plus objective possible de son histoire, aussi loin que l'on puisse remonter dans le temps.

C'est à cette première grande tâche que Cheikh AntaDiop s'est attelé, celle de la restitution de l'histoire du continent africain depuis la préhistoire, par une recherche scientifique pluridisciplinaire. Il est ainsi le refondateur de l'histoire de l'Afrique.

Outre la connaissance du passé réel de l'Afrique et de l'humanité en général, Cheikh AntaDiop assigne quatre buts à ses travaux :

1. La restauration de la conscience historique africaine, c'est-à-dire la conscience d'avoir une histoire. La restauration de cette conscience historique implique que l'égyptologie soit développée en Afrique noire et que la civilisation nubio-égyptienne soit revisitée dans tous les domaines par les Africains eux-mêmes :

“Seul l'enracinement d'une pareille discipline scientifique [l'égyptologie] en Afrique Noire amènera à saisir, un jour, la nouveauté et la richesse de la conscience culturelle que nous voulons susciter, sa qualité, son ampleur, sa puissance créatrice”.

“Dans la mesure où l'Égypte est la mère lointaine de la science et de la culture occidentales, comme cela ressortira de la lecture de ce livre, la plupart des idées que nous baptisons étrangères ne sont souvent que les images, brouillées, renversées, modifiées, perfectionnées, des créations de nos ancêtres : judaïsme, christianisme, islam, dialectique, théorie de l'être, sciences exactes, arithmétique, géométrie, mécanique, astronomie, médecine, littérature (roman, poésie, drame), architecture, arts, etc. [...] Autant la technologie et la science moderne viennent d'Europe, autant dans l'Antiquité, le savoir universel coulait de la vallée du Nil vers le reste du monde, et en particulier vers la Grèce, qui servira de maillon intermédiaire. Par conséquent aucune pensée, n'est, par essence, étrangère à l'Afrique, qui fut la terre de leur enfantement. C'est donc en toute liberté que les Africains doivent puiser dans l'héritage intellectuel commun de l'humanité, en ne se laissant guider que par les notions d'utilité et d'efficacité.”

"L'Africain qui nous a compris est celui-là qui, après la lecture de nos ouvrages, aura senti naître en lui un autre homme, animé d'une conscience historique, un vrai créateur, un Prométhée porteur d'une nouvelle civilisation et parfaitement conscient de ce que la terre entière doit à son génie ancestral dans tous les domaines de la science, de la culture et de la religion." (C. A. Diop, *Civilisation ou Barbarie*)

2. Le rétablissement de la continuité historique, c'est-à-dire restituer dans l'espace et dans le temps l'évolution des sociétés et États africains, notamment de la préhistoire au XVI^{ème} siècle, période la plus méconnue. Cheikh Anta Diop insiste dans ses écrits sur le fait que la recherche socio-historique est loin d'être conçue comme un repli sur soi ou une simple délectation du passé :

“Le rôle de la sociologie africaine est de faire le bilan du passé pour aider l'Afrique à mieux affronter le présent et l'avenir.” (C. A. Diop, *Antériorité des civilisations nègres – Mythe ou vérité historique ?*)

“La relativité de nos structures, ainsi mises en évidence, pourrait nous aider à dégager les bases théoriques d'un dépassement de nos sociétés à castes, dépassement qui ne sera irréversible que s'il est fondé sur la connaissance du pourquoi des choses. N'est-ce pas

cela, la révolution sociale, ou en tout cas un de ses aspects les plus importants dans nos pays ?” (C. A. Diop, *Civilisation ou Barbarie*)

L'étude socio-historique des civilisations africaines permet d'identifier les valeurs qui ont fait leur grandeur et les facteurs ayant engendré leur déclin, d'élaborer les stratégies pour le développement du continent.

3. La construction d'une civilisation planétaire. Cheikh Anta Diop entend contribuer “[...] au progrès général de l'humanité et à l'éclosion d'une ère d'entente universelle [...]” et “Nous aspirons tous au triomphe de la notion d'espèce humaine dans les esprits et dans les consciences, de sorte que l'histoire particulière de telle ou telle race s'efface devant celle de l'homme tout court. On n'aura plus alors qu'à décrire, en termes généraux qui ne tiendront plus compte des singularités accidentelles devenues sans intérêt, les étapes significatives de la conquête de la civilisation par l'homme, par l'espèce humaine tout entière. L'âge de la pierre taillée et la conquête du feu, le néolithique et la découverte de l'agriculture, l'âge des métaux, la découverte de l'écriture etc., etc. ne seront plus décrits que comme les instants émouvants des rapports dialectiques de l'homme et de la Nature, la série des “défis” de la Nature sans cesse relevés victorieusement par l'homme”. (C. A. Diop, *Antériorité des civilisations nègres – Mythe ou vérité historique ?*)

“Le climat, par la création de l'apparence physique des races, a tracé des frontières ethniques qui tombent sous le sens, frappent l'imagination et déterminent les comportements instinctifs qui ont fait tant de mal dans l'histoire. Tous les peuples qui ont disparu dans l'histoire, de l'Antiquité à nos jours, ont été condamnés, non par une quelconque infériorité originelle, mais par leurs apparences physiques, leurs différences culturelles. [...] Donc, le problème est de rééduquer notre perception de l'être humain, pour qu'elle se détache de l'apparence raciale et se polarise sur l'humain débarrassé de toutes coordonnées ethniques.” (C. A. Diop, “L'unité d'origine de l'espèce humaine”, Colloque “Racisme, Science et Pseudo-Science”, organisé à Athènes par l'UNESCO en 1982)

L'accès à ce futur souhaité exige par conséquent de rompre avec le racisme. De rompre avec le “mensonge culturel” qui a consisté à nier l'humanité des Nègres, à nier l'histoire de l'Afrique. Ce “mensonge culturel” encore aujourd'hui réside dans la négation de l'appartenance de l'Égypte pharaonique au monde négro-africain ainsi que dans la minimisation du rôle civilisateur de cette Égypte dans l'Antiquité. Il exige de vaincre les

obstacles qui empêchent le développement de l'Afrique, menacent sa sécurité et hypothèquent sa survie. Il faut “veiller à ce que l'Afrique ne fasse pas les frais du progrès humain”, “froideusement écrasée par la roue de l'histoire”, et donc : “On ne saurait échapper aux nécessités du moment historique auquel on appartient”. (C. A. Diop, Antériorité des civilisations nègres – Mythe ou vérité historique ?)

Aujourd'hui, ce moment historique est celui de la **renaissance africaine**.

4. La renaissance africaine. Cheikh Anta Diop avait 25 ans lorsque, étudiant à Paris, en 1948, il définissait le contenu et les conditions de la renaissance africaine dans un article intitulé “Quand pourra-t-on parler d'une renaissance africaine ?”.

Dans cette perspective, l'acheminement vers un **État fédéral** devient une urgence continentale car un tel ensemble géo-politique serait à même de sécuriser, de structurer et d'optimiser le développement du continent africain : “Il faut faire basculer définitivement l'Afrique Noire sur la pente de son destin fédéral [...] seul un État fédéral continental ou sub-continental offre un espace politique et économique, en sécurité, suffisamment stabilisé pour qu'une formule rationnelle de développement économique de nos pays aux potentialités diverses puisse être mise en œuvre.” ((C. A. Diop, préface du livre de **Mahtar Diouf**, Intégration économique, perspectives africaines, 1984).

Cheikh Anta Diop termine son ouvrage **Les fondements économiques et culturels d'un État fédéral d'Afrique noire** par quatorze propositions d'actions concrètes allant du domaine de l'éducation à celui de l'industrialisation. Entre autres, il relève une double nécessité vitale :

- **celle de la définition d'une politique de recherche scientifique efficiente** : “L'Afrique doit opter pour une politique de développement scientifique et intellectuel et y mettre le prix ; sa vulnérabilité excessive des cinq derniers siècles est la conséquence d'une déficience technique. Le développement intellectuel est le moyen le plus sûr de faire cesser le chantage, les brimades, les humiliations. L'Afrique peut redevenir un centre d'initiatives et de décisions scientifiques, au lieu de croire qu'elle est condamnée à rester l'appendice, le champ d'expansion économique des pays développés ”.

- **celle de la définition d'une doctrine énergétique africaine et d'industrialisation véritable** : “Il s'agit de proposer un schéma de développement énergétique continental qui tienne compte à la fois des sources d'énergie

renouvelables et non renouvelables, de l'écologie et des progrès techniques des prochaines décennies ... L'Afrique Noire devra trouver **une formule de pluralisme énergétique** associant harmonieusement les sources d'énergies suivantes : 1. Énergie hydroélectrique (barrages), 2. Énergie solaire, 3. Énergie géothermique, 4. Énergie nucléaire, 5. Les hydrocarbures (pétrole), 6. Énergie thermonucléaire" auxquelles il ajoute le vecteur énergétique **hydrogène**.

KORKA

Première partie

Epreuves

1986 - 2000

Sujet 01 : Session de remplacement 1986

EXERCICE 1

Soit P le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. A le point d'affixe -1 ; m et M les points d'affixes respectives z et Z . On définit dans $P - \{A\}$, l'application f par :

$$\forall m \in \text{dans } P - \{A\}, f(m) = M \Leftrightarrow (Z + 1)(z + 1) = 2i.$$

1.1 f est-elle une application bijective de $P - \{A\}$ dans $P - \{A\}$?

Déterminer l'ensemble des points invariants par f .

1.2 On pose $\text{mes}(\vec{i}, \widehat{Am}) = \theta[2\pi]$ et $\text{mes}(\vec{i}, \widehat{AM}) = \theta'[2\pi]$.

1.2.1 Trouver une relation entre θ et θ' , ainsi qu'entre Am et AM .

1.2.2 Déterminer l'image d'une demi-droite ouverte d'origine A .

1.2.3 Soit (C) le demi-cercle, ensemble des points m de P tels que $Am = \sqrt{2}$ et $\theta \in \left[-\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$.

Déterminer l'image de ce demi-cercle par f .

EXERCICE 2

Dans un espace affine E , associé à l'espace vectoriel euclidien E' et rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ on considère l'application affine f de E dans E qui au point M de coordonnées (x, y, z) associe le point M' de coordonnées (x', y', z') tel que :

$$\begin{cases} x' = -\frac{\sqrt{2}}{2}y + \frac{\sqrt{2}}{2}z + \frac{\sqrt{2}}{2} \\ y' = \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z + \frac{3}{2} \\ z' = -\frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z + \frac{1}{2} \end{cases}$$

2.1 Montrer que f est une isométrie de E qui admet un et un seul point invariant I . f est-elle un déplacement ?

2.2 Soit P le plan affine de E d'équation $y + z - 1 = 0$ et S la symétrie orthogonale par rapport à P . Donner l'expression analytique de S dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

2.3 Montrer qu'il existe une et une seule rotation R de E telle que $f = S \circ R$. Déterminer l'axe D de la rotation R . Quelle est la position relative de D et P ?

PROBLEME

PARTIE I

Soit f la fonction numérique définie par : $\forall x \in \mathbb{R} \ f(x) = x - \sqrt{|x|}$.

I.1 Étudier f et tracer sa courbe représentative (C) dans un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$, ($\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 4 \text{ cm}$). On appellera (C_1) l'arc de courbe correspondant aux points d'abscisses négatives et (C_2) l'arc de courbe correspondant aux points d'abscisses positives.

I.2 Soit α un nombre réel positif, on considère les points M et P de (C_2) d'abscisses respectives $(\alpha - 1)^2$ et $(\alpha + 1)^2$. Soit K le milieu du segment $[MP]$.

I.2.1 Déterminer les coordonnées du point K lorsque $\alpha \in]0, 1[$ et tracer l'ensemble des points K .

I.2.2 Même question lorsque $\alpha > 1$.

I.3 Soit D_λ la droite d'équation $y = x - \lambda$ où $\lambda > 0$. On appelle M_1 et M_2 les intersections respectives de D_λ avec (C_1) et (C_2) .

I.3.1 Déterminer l'ensemble décrit par le milieu I du segment $[M_1M_2]$ lorsque λ varie.

I.3.2 Déterminer la longueur du segment $[M_1M_2]$.

I.3.3 Soit $A\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$. On considère le nouveau repère orthonormé direct $(A, \vec{i}, \vec{j})$ tel que $s(\vec{i}, \vec{i}) = -\frac{\pi}{4}$. Soit m_1 le point de la droite (M_1M_2) appartenant à $(A, \vec{i})$ axe des abscisses du nouveau repère et m_2 le point tel que $\overrightarrow{m_1m_2} = \overrightarrow{M_1M_2}$.

Exprimer en fonction de λ les coordonnées X_2 et Y_2 de m_2 dans le repère $(A, \vec{i}, \vec{j})$.

Déterminer la nature de l'ensemble décrit par m_2 lorsque λ varie et le tracer.

I.3.4 Lorsque λ varie de 0 à 1, le segment $[M_1M_2]$ balaie une surface (S) limitée par un arc (C_1) , un arc de (C_2) et un segment de droite. Déterminer l'aire de (S).

PARITE II

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \text{Log}(x) - \sqrt{|\text{Log}(x)|}$.

II.1 Déterminer les ensembles de définition, de continuité et de dérivabilité de g .

II.2 Étudier la fonction g .

II.3 Tracer la courbe représentative (T) de g dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

N.B : Toutes les courbes à tracer le seront de la manière suivante :

(C) est un premier graphique, Ensemble décrit par K ($\alpha < 1, \alpha > 1$) dans un deuxième graphique ? Ensemble décrit par m_2 dans un troisième graphique

(T) dans un quatrième graphique.

Sujet 02 : Session de remplacement 1987

EXERCICE 1

Dans le plan P , on considère un cercle (C) . A est un point fixe de (C) . Les points B et D décrivent le cercle (C) de façon que la longueur BD soit égale à l tel que $(0 < l < 2R)$.

Déterminer les lieux géométriques du milieu I de $[BD]$, du centre de gravité G du triangle ABD et du point C , tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.

EXERCICE 2

Le plan euclidien est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 1 cm. $M \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix}$ représente le point M du plan de coordonnées x et y relativement au repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

On considère la parabole (P) d'équation : $y^2 = 4x$.

On rappelle que pour tout point $M_0 \begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \end{vmatrix}$ appartenant à la parabole (P) , ($y_0^2 = 4x_0$), la tangente à (P) menée de M_0 a pour équation $y_0 y = 2(x_0 + x)$. Soit (D) la droite d'équation $x = -1$.

2.1 Construire la parabole (P) et la droite (D) . Que représente la droite (D) pour la parabole (P) ?

2.2 Soit $N \begin{vmatrix} -1 \\ \lambda \end{vmatrix}$ un point quelconque de (D) , $\lambda \in \mathbb{R}$.

Montrer qu'il existe deux points $M'_0 \begin{vmatrix} x'_0 \\ y'_0 \end{vmatrix}$ et $M''_0 \begin{vmatrix} x''_0 \\ y''_0 \end{vmatrix}$ de la parabole (P) pour lesquels les tangentes à la parabole (P) menées de M'_0 et M''_0 passent par le point N .

2.3 Calculer $y'_0 y''_0$. Que peut-on dire des deux tangentes à la parabole P menées de N ?

PROBLEME

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x , définie par : $f(x) = \sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}$

PARTIE I

I.1 Quel est le domaine de définition de f ? Sur quels ensembles, les théorèmes généraux du cours permettent-ils d'affirmer que f est continue ? Dérivable ?

I.2 Montrer que la droite d'équation : $x = \frac{\pi}{2}$ est axe de symétrie pour (C_f) , la représentation graphique de f dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

I.3 Montrer que f est une fonction périodique, on note g la restriction de f à l'intervalle $[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}]$ et (C_g) la courbe représentative de g dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$; Comment construiriez-vous (C_f) partir de (C_g) ?

PARTIE II

II.1 Etudier la fonction g . On pourra montrer que $g(x) = \frac{-\cos x}{1-\sin x}$ et on étudiera la dérivabilité à gauche en $\frac{3\pi}{2}$ de g .

Construire (C_g) . (Unités: $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 3\text{cm}$; on étudiera avec précision le point de (C_g) d'abscisse π).

II.2 Montrer que g est une bijection de son domaine de définition sur un ensemble que l'on précisera. On note g^{-1} sa bijection réciproque.

II.3 Enoncer toute les propriétés de g^{-1} que vous pouvez donner sans aucun calcul.

II.4 Construire $(C_{g^{-1}})$ la courbe représentative de g^{-1} dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

II.5 En quels points g^{-1} est-elle dérivable ? Calculer $(g^{-1})'(y)$ en fonction de y .

PARTIE III

III.1.1 Soit un α un réel strictement positif ; en faisant une intégration par parties, calculer : $I_\alpha = \int_0^\alpha g^{-1}(t)dt$.

III.1.2 En déduire $A = \int_0^1 g^{-1}(t)dt$. Que représente A par rapport à $(C_{g^{-1}})$?

III.1.3 En utilisant les courbes $(C_{g^{-1}})$ et (C_g) comparer A et $\int_\pi^{\frac{3\pi}{2}} g(t)dt$. En déduire B.

III.2 Plus généralement, comparer $\int_0^\alpha g^{-1}(t)dt$ et $\int_{g^{-1}(\alpha)}^{\frac{3\pi}{2}} g(t)dt$. En déduire la valeur de $\int_{g^{-1}(\alpha)}^{\frac{3\pi}{2}} g(t)dt$.

III.3 Contrôler directement ce résultat par le calcul de : $\int_{g^{-1}(\alpha)}^{\frac{3\pi}{2}} g(t)dt$.

Sujet 03 : Session de remplacement 1988

EXERCICE 1

1.1 Soit f une fonction numérique de la variable réelle x définie par :

$$\text{Si } x < 0, f(x) = (ax + b)e^{\frac{x}{2}}$$

$$\text{Si } x \geq 0, f(x) = \frac{x + 1 + \sqrt{x^2 - 2x + 4}}{3}$$

Déterminer les nombres réelles a et b pour que la fonction f soit définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

1.2 On considère la fonction numérique g de la variable réelle x , définie par :

$$\text{Si } x < 0, g(x) = -\frac{1}{3}xe^{\frac{x}{2}} + e^{\frac{x}{2}}$$

$$\text{Si } x \geq 0, g(x) = \frac{x + 1 + \sqrt{x^2 - 2x + 4}}{3}$$

Etudier les variations de g .

Après avoir tracé les asymptotes, dessiner la courbe représentative de g dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (On prendra 2 cm comme unité).

EXERCICE 2

On considère un dé à jouer ordinaire à six faces numérotées de 1 à 6. On suppose que ce dé est pipé à l'aide d'un dispositif interne possédant les propriétés suivantes :

- Lors d'un premier lancer, chaque face a la même probabilité de sortir.

- Ensuite, si lors du lancer précédent, la face $n \in \{1, \dots, 6\}$ est sortie, sa probabilité de sortie à nouveau est 0,4, la probabilité de sortie de la face opposée, $(7 - n)$ est 0,1 et les probabilités de sortie de chacune des 4 autres faces sont les mêmes.

2.1 On lance une seule fois le dé ; quelles sont les probabilités de sortie de chacune de ses faces ?

2.2 Lors d'un premier lancer, on tire 2. Quelles sont alors les probabilités de sortie de chacune des six faces lors du second lancer ?

2.3 On s'intéresse à la somme des points obtenus lors des deux lancers successifs, un premier et un second.

Quelles valeurs cette somme peut-elle prendre ?

Calculer la probabilité de sortie de chacune de ces valeurs.

PROBLEME

Soit P un plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Les quatre parties du PROBLEME peuvent être traitées indépendamment.

PARTIE I

Soit P et Q les polynômes tels que :

$$P(z) = z^3 - (5 + 4i)z^2 + (5 + 16i)z + (3 - 24i) \text{ et } Q(z) = z^2 - 8z + 24 - 6i.$$

I.1 Montrer que l'équation $P(z) = 0$ admet une, et une seule, racine imaginaire pure z_0 .

En déduire les deux autres racines de cette équation ; on les notera z_1 et z_2 (z_1 est celle qui a la plus petite partie réelle).

Trouver les deux solutions de l'équation $Q(z) = 0$; on les notera z_3 et z_4 ($|z_3| < |z_4|$).

I.2 Soit A, B, A', B' les points dont les affixes sont respectivement les complexes z_1, z_2, z_3 et z_4 . Déterminer la similitude transformant le bipoint (A,B) en le bipoint (A',B'). Donner les caractéristiques de cette similitude.

I.3 Soit C et D les points dont les affixes respectives sont z_0 et i. Calculer les cosinus et sinus des angles orientés $(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CA})$ et $(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BA})$. En déduire que les points A, B, C, D sont cocycliques.

Quelle est la nature du triangle ACD ? En déduire une équation du cercle passant par les points A, B, C, D.

PARTIE II

Dans le plan P on considère les points E, F et G de coordonnées respectives (5,3), (0,-1), et (0,3).

Déterminer et construire l'ensemble des points M tels que : $2ME^2 + 5MF^2 + 3MG^2 = 280$

PARTIE III

Soit f l'application de P dans P qui transforme le point M de coordonnées (x,y) en M' = f(M) de coordonnées (x', y') telle que :

$$x' = \frac{9x + 2y - 6}{5} \text{ et } y' = \frac{2x + 6y - 3}{5}$$

III.1 Montrer que l'ensemble des points invariants par f est une droite (D) dont on donnera une équation.

III.2 Montrer que si $M \neq M'$, alors :

III.2.1 La droite (MM') est orthogonale à la droite (D).

III.2.2 $\overrightarrow{HM'} = 2\overrightarrow{HM}$, H étant le point d'intersection des deux droites (MM') et (D).

III.3 Préciser la nature de l'application f . Donner une expression analytique de f ; en déduire une expression analytique de f^1 .

III.4 On considère l'ensemble (C) des points M du plan dont les coordonnées (x, y) vérifient la relation: $x^2 - 2x + y^2 - 2y = 3$.

Préciser la nature de (C).

Trouver une équation de l'image de (C) par f .

PARTIE IV

On se propose de représenter dans le plan P, l'ensemble (E) d'équation :

$$8x^2 + 17y^2 - 12xy - 4x - 22y - 87 = 0$$

Soit O' le point de coordonnées (1, 1) et $\vec{u}, \vec{v}$ deux vecteurs définis par :

$$\vec{u} = \frac{\sqrt{5}}{5} (2\vec{i} + \vec{j}) ; \vec{v} = \frac{\sqrt{5}}{5} (-\vec{i} + 2\vec{j}).$$

IV.1 Montrer que $(O', \vec{u}, \vec{v})$ est un repère orthonormé de P.

On pose : $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$ et $\overrightarrow{O'M} = X\vec{u} + Y\vec{v}$.

Exprimer x et y en fonction de X et Y .

IV.2 Trouver une équation de (E) dans le repère $(O', \vec{u}, \vec{v})$.

Reconnaitre la nature de (E) et préciser le centre, les sommets, les foyers et l'excentricité.

Représenter (E).

Sujet 04 : Session de remplacement 1994

EXERCICE 1

On considère deux urnes U_1 et U_2 :

- U_1 contient 6 boules blanches et 4 boules noires.

- U_2 contient 8 boules blanches et 2 boules noires.

D'une de ces urnes, choisie au hasard, on extrait une boule que l'on remet dans l'urne :

Si la boule est blanche, on recommence le tirage dans la même urne.

Si la boule est noire, on recommence le tirage dans l'autre urne.

On applique cette règle à chaque tirage et on suppose qu'à l'intérieur de chaque urne, les tirages sont équiprobables. n étant un entier naturel non nul, on note p_n la probabilité pour que le $n^{\text{ième}}$ tirage se fasse dans l'urne U_1 .

1 Calculer p_1 .

1.2 Dans quel cas le deuxième tirage se fait-il dans U_1 ?

1.3 Calculer p_2 .

1.4 Démontrer que : $\forall n \geq 2 \quad p_n = \frac{2}{5} p_{n-1} + \frac{1}{5}$.

1.5 Déterminer le nombre réel a tel que la suite (u_n) définie par $u_n = p_n - a$ soit géométrique.

Calculer alors p_n en fonction de n et en déduire la limite de la suite (p_n) .

Dans quelle urne vont se faire la majorité des tirages ?

EXERCICE 2

On considère un triangle ABC direct.

On appelle I, J, K les milieux respectifs des cotés [BC], [CA], [AB].

Soit N l'image de C par la rotation de centre J et d'angle de mesure $\frac{\pi}{2}$, et P l'image de A par la rotation de centre K et d'angle de mesure $\frac{\pi}{2}$.

2.1 Montrer que $KP = IJ$.

2.2 On appelle r la rotation qui transforme K en J et P en I.

Déterminer une mesure de l'angle de cette rotation.

2.3 Démontrer que les triangles IJN et IKP sont isométriques.

En déduire l'image de I par r . Montrer de même que le triangle PIN est isocèle et rectangle I.

2.4 On appelle r_1 la rotation de centre N et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et r_2 la rotation de centre P et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

2.4.1 Déterminer l'image de B par r_1 ou r_2 .

2.4.2 Donner la nature et les éléments caractéristiques de la transformation $r_1 \circ r_2$.

PROBLEME

On désigne par $E(x)$ la partie entière de x , l'entier k relatif tel que $k \leq x < k + 1$ et par $\ln x$ le logarithme népérien de x .

Soit la fonction f de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ définie :

$$f(x) = \begin{cases} E(x) \ln(x) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

PARTIE I

I.1 Démontrer que f est une fonction croissante sur $\mathbb{R}_+$. (on ne cherchera pas à dériver cette fonction).

Sur quel sous ensemble est-elle strictement croissant ?

I.2 Démontrer que : $\forall x \geq 1, f(x) \geq \ln(x)$. En déduire $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$.

I.3 Etudier la continuité et la dérivabilité de f .

I.4 Le plan affine euclidien est rapporté à un repère orthonormé $R(O, \vec{i}, \vec{j})$.

I.4.1 Etant donnée k entier naturel non nul, on désigne par (C_k) la représentation graphique de la fonction : $g_k: x \rightarrow g_k(x) = k \ln(x) \quad (x > 0)$

Construire dans $R(O, \vec{i}, \vec{j})$ (C_1) , (C_2) et (C_3) .

I.4.2 En déduire la représentation graphique de f sur $[0,4]$.

PARTIE II

Pour tout entier $k \geq 1$, on note $\int_k^{k+1} f(x)dx$ le nombre $\lim_{t \rightarrow (k+1)^-} \int_k^t f(x)dx$.

II.2.1 Démontrer que pour tout entier naturel k non nul :

$$\int_k^{k+1} f(x)dx = k \int_k^{k+1} \ln(x)dx = k(k+1) \cdot \ln(k+1) - k^2 \ln(k) - k.$$

II.2.2 Déduire de la question précédente que pour tout entier $n \in \mathbb{N} - \{0,1\}$:

$$\int_1^n f(x)dx = - \sum_{k=2}^n k \cdot \ln(k) + n^2 \cdot \ln(n) - \frac{n(n-1)}{2}.$$

On remarquera que $k(k+1) = (k+1)^2 - (k+1)$.

II.3.1 n étant un entier supérieur ou égal à 2, démontrer que pour tout entier k tel que $2 \leq k \leq n$, on a : $k \cdot \ln(k) \leq k \cdot \ln(n)$.

II.3.2 En déduire que : $\sum_{k=2}^n k \cdot \ln(k) \leq \left[\frac{n(n+1)}{2} - 1 \right] \cdot \ln n$.

II.3.3 Démontrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 2 : $\int_1^n f(x) dx \leq 1 \cdot n \cdot \ln(n)$

II.3.4 En déduire que : $\frac{n^2}{2} \cdot \ln(n) - \frac{n^2}{4} + \frac{n}{2} - \frac{1}{4} \leq \sum_{k=2}^n k \cdot \ln(k)$.

II.4

Démontrer

que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{\sum_{k=2}^n k \ln k}{\frac{n^2}{2} \ln n} \right] = 1$$

Sujet 05 : Session de remplacement 1995

EXERCICE 1

Un étudiant passe un examen avec une chance sur deux de l'obtenir. S'il échoue, il recommence l'année suivante et si nécessaire encore les années suivantes.

Etant un étudiant sérieux, chaque année sa probabilité d'échec se réduit de moitié.

On note p_n la probabilité pour qu'il obtienne son examen la $n^{\text{ième}}$ année. On pourra à l'aide d'un schéma, déterminer année par année les possibilités d'échec ou de réussite de cet étudiant pour répondre aux questions suivantes :

1.1 Calculer p_1, p_2 et p_3 puis $p_1 + p_2 + p_3$.

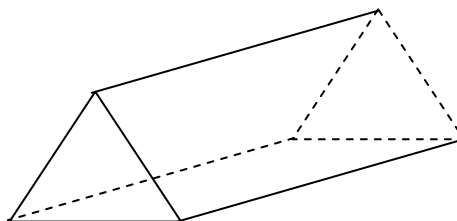
Quelle conclusion peut-on tirer de ce dernier résultat ?

1.2 Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, p_n = \frac{2^n - 1}{2^{\left\lfloor \frac{n(n+1)}{2} \right\rfloor}}$

1.3 Calculer la limite de p_n . Que dire de la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de $\sum_{k=1}^n p_k$?

EXERCICE 2

Dans l'espace euclidien (ABCDEF) est un pentaèdre dont trois faces (ABCD) (ABFE) et (DCFE) sont des parallélogrammes de centres respectifs I, J, K. L est le milieu de [AB].



2.1 Dans cette question les triangles (ADE) et (BCF) sont quelconques et ont pour centre de gravité respectifs O et O'.

On désigne par P le centre de gravité du triangle (CED) et par Q celui du triangle (ABF). Démontrer que :

$$\underline{2.1} \overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{AB}.$$

2.1.2 Les segments [OO'] et [PQ] ont même milieu G.

$$\underline{2.1.3} \overrightarrow{GK} = -\frac{1}{2} \overrightarrow{GL}.$$

2.2 Dans cette question on suppose de plus que le pentaèdre est régulier (c'est-à-dire que : $AB = BC = CF = BF = a$, où a est un réel positif donné)

Et que les faces (ADE) et (ABCD) sont orthogonales.

M étant un point quelconque de l'espace, on pose :

$$\vec{R}(M) = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF}.$$

Démontrer que l'ensemble des points M tels que $\|\vec{R}(M)\| = a\sqrt{21}$ est la sphere circonscrite au pentaedre.

PROBLEME

PARTIE I

On considère la fonction numérique f définie par : $f(x) = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right|$

On appelle (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan. (Unité 2 cm).

I.1.1 Montrer que O est centre de symétrie de (C).

I.1.2 Etudier les variations de f et tracer (C).

I.2 Pour tout élément x de l'ensemble de définition, comparer $f\left(\frac{1}{x}\right)$ et $f(x)$.

I.3 Soit (T) la courbe paramétrée de l'ensemble des points M(t) du plan dont les coordonnées vérifient :

$$\begin{cases} x(t) = -e^{2t} \\ y(t) = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+e^{2t}}{1-e^{2t}} \right| \end{cases} \text{ avec } t \in]0, +\infty[$$

I.3.1 Montrer que (T) est contenue dans (C) et indiquer en le justifiant le sens du mouvement de M sur (T) lorsque t varie.

I.3.2 Calculer les composantes du vecteur vitesse $\vec{v}$ du point M(t) à l'instant t.

I.3.3 Déterminer t_0 pour que la tangente (T') à (T) en M(t_0) soit parallèle à la droite d'équation $y = x$. Placer M(t_0) et tracer (T).

PARTIE II

II.1 On désigne par g la restriction de f à l'intervalle $] -1, 1[$.

II.1.1 Démontrer sans calculs que g est une bijection et préciser l'ensemble de définition de la fonction réciproque g^{-1} .

II.1.2 Déterminer g^{-1} .

II.1.3 Représenter graphiquement g^{-1} dans le même repère que la courbe (C).

II.2.1 Interpréter géométriquement le réel $I = - \int_{-\alpha}^{+\alpha} \frac{dt}{1+t^2}$ où $\alpha \in]0, 1[$.

II.2.2 A l'aide de la fonction g, calculer I puis déterminer α pour que $I = 1$.

II.3.1 En distinguant les cas $|x| > 1$ et $|x| < 1$, déterminer la fonction h définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{-1; 1\} \quad h(x) = g^{-1} \circ f(x)$$

II.3.2 Démontrer que h est prolongeable en une fonction $\tilde{h}$ continue sur $\mathbb{R}$.

Représenter graphiquement la fonction $\tilde{h}$. (On fera un deuxième dessin).

PARTIE III

III.1.1 Vérifier que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\} : f'(x) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right]$$

III.1.2 En déduire que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\} : f''(x) = -\frac{1}{2} \left[\frac{(x+1)^2 - (x-1)^2}{(x^2-1)^2} \right]$$

III.2 Etablir que la fonction f vérifie l'équation différentielle :

$$(x^2 - 1)y'' + 2xy' = 0$$

III.3 Plus généralement, pour tout entier naturel non nul, on note $f^{(n)}$ la dérivée $n^{\text{ième}}$ de la fonction f .

Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\} :$

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \cdot \frac{(n-1)!}{2} \frac{[(x+1)^n - (x-1)^n]}{(x^2-1)^n}$$

Sujet 06 : Session de remplacement 1996

EXERCICE 1

Pour tout entier naturel k , on pose : $z_k = \frac{1+k(k+1)+1}{1+k(k+1)-1}$ et on note : $|z_k| = p_k$ et $\arg z_k = \alpha_k$ où $\alpha_k \in]-\pi, \pi]$.

1.1 Démontrer que pour tout $k > 0$, $p_k = 1$ et $\tan \frac{\alpha_k}{2} = \frac{1}{1+k(k+1)}$.

1.2 Placer dans le plan complexe les points d'affixes z_0, z_1, z_2 .

1.3.1 Démontrer que pour tout $k \geq 0$, il existe un unique réel θ_k de $[0, \frac{\pi}{2}]$, tel que $\tan \theta_k = k$. Calculer θ_0 et θ_1 .

1.3.2 Sans calculer θ_2 et θ_3 , construire sur le cercle trigonométrique les points images de $e^{i\theta_2}$ et $e^{i\theta_3}$ en précisant le procédé de construction utilisé.

1.3.3 Démontrer que pour tout entier $k \geq 0$: $\frac{\alpha_k}{2} = \theta_{k+1} - \theta_k$.

1.4 On pose : $S_1 = z_1, S_2 = z_1 \cdot z_2, S_3 = z_1 \cdot z_2 \cdot z_3$ et pour tout entier :

$$n \geq 4, S_n = z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 \dots z_n.$$

1.4.1 Quel est le module de S_n ?

Exprimer l'argument de S_n en fonction de θ_{n+1} et θ_1 .

1.4.2 Par définition une suite de nombres complexes $(r_n e^{i\varphi_n})$ converge vers le nombre complexe $re^{i\varphi}$ si : $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = r$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n = \varphi$.

Montrer que la suite (S_n) converge et calculer sa limite.

EXERCICE 2

Dans le plan orienté (P), on donne deux points distincts O_1 et O_2 .

On prendra $O_1O_2 = 10$ cm pour le dessin. On désigne par r_1 la rotation de centre O_1 et d'angle $\frac{\pi}{3}$ et par r_2 la rotation de centre O_2 et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

Pour tout point M de (P), on note M_1 l'image de M par r_1 et M_2 l'image M_1 par r_2 .

2.1 Démontrer que le milieu J du segment $[MM_2]$ est un point invariant par $r_2 \circ r_1$.

2.2 Prouver que J est situé sur le cercle de diamètre $[O_1O_2]$. Construire J .

3 Soit M le projeté orthogonal de O_1 sur la droite (MM_1) .

3.1 Démontrer que M, M_1, M_2 sont alignés si et seulement si H est situé sur le cercle de diamètre $[O_1J]$.

3.2 Préciser les éléments caractéristiques de la similitude directe s de centre O_1 qui transforme H en M .

3.3 En déduire l'ensemble (C) des points M du plan (P) pour lesquels M, M_1, M_2 sont alignés. Construire (C).

4.1 Exprimer M_1M en fonction de O_1M_1 puis M_1M_2 en fonction de O_2M_1 .

4.2 Où se situe M_1 lorsque l'on a l'égalité : $M_1M_2 = \sqrt{3}M_1M$?

4.3 Déterminer l'ensemble (Δ) des points M du plan tels que : $M_1M_2 = \sqrt{3}M_1M$.

4.4 Construire (Δ).

PROBLEME

PARTIE I

Soit φ la fonction numérique d'une variable réelle définie par :

$$\varphi(x) = \frac{x}{(\ln(x))^2} \quad \text{si } x > 0 \quad \text{et } \varphi(0) = 0.$$

On appelle (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

I.1 Démontrer que φ est une fonction continue sur son ensemble de définition.

I.2.1 Etudier la dérivabilité de φ en 0.

I.2.2 Dresser le tableau de variation de la fonction φ .

I.3.1 Etudier les branches infinies de (C).

I.3.2 Préciser la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse e.

I.3.3 Tracer (C) et (T).

I.4 Démontrer que l'équation $\varphi(x) = e$ admet exactement deux solutions dans l'intervalle $]1, +\infty[$ et l'une de ces solutions est comprise entre e^3 et e^4 .

PARTIE II

Dans cette partie, on considère la fonction f définie par :

$$f:]1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = \int_e^x \frac{dt}{\ln(t)}.$$

Le but de cette partie est de représenter graphiquement cette fonction sans connaître l'expression explicite de $f(x)$. On note (T) la courbe représentative f dans un repère orthonormé.

Justifier l'existence de $f(x)$ pour : $x \in]1, +\infty[$.

II.1 Démontrer que f est croissante sur $]1, +\infty[$.

II.2 Etablir que pour tout nombre réel t appartenant à $]1, +\infty[$, on a : $\ln(t) < t - 1$.

II.3 En déduire une minoration de $f(x)$ lorsque : $x > e$.

Préciser alors la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

II.4 De façon analogue, calculer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 1 et par valeurs supérieures.

Soient a et b deux réels tels que : $e \leq a < b$.

Etablir que : $\frac{b-a}{\ln b} \leq \int_a^b \frac{dt}{\ln(t)} \leq \frac{b-a}{\ln(a)}$.

II.5 Soit $x > e$.

Démontrer que pour tout réel u tel que :

$$e \leq u < x, \text{ on a : } \frac{x-u}{\ln(x)} \leq f(x) \leq u + \frac{x-u}{\ln(u)}.$$

II.6 Résoudre l'équation : $\varphi(x) < x$.

Montrer que lorsque : $x > e^4$, on a : $e \leq \varphi(x) < x$. Etablir alors que :

$$\forall x > e^4, 1 - \frac{\varphi(x)}{x} \leq \frac{\ln(x)}{x} \cdot f(x) \leq \frac{1}{\ln(x)} + \left[1 - \frac{\varphi(x)}{x}\right] \cdot \frac{\ln(x)}{\ln(\varphi(x))}.$$

II.7 Démontrer que : $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{\ln(\varphi(x))} = 1$;

En déduire que $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{x} \cdot f(x) = 1$

II.8 En déduire que : $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$. Que peut-on en déduire pour (T) ?

II.9 On cherche à obtenir une valeur approchée de $f(2)$.

On approxime : $t \mapsto \frac{1}{\ln(t)}$ dans $[2, e]$ par la fonction h ainsi définie :

$h(t) = at + b$, $h(e) = 1$ et $h(2) = \frac{1}{\ln(2)}$. Calculer les réels a et b et donner deux valeurs approchées de ces réels à 10^{-2} près. On utilisera ces valeurs approchées pour la question 4)b).

II.10 On prend, pour la suite : $f(2) \approx \int_e^2 h(t)dt$. Calculer cette valeur.

II.12 Donner le tableau de variation de f . b) Construire la courbe représentative de f .

KORKA

Sujet 07 : Session de remplacement 1997**EXERCICE 1**

L'espace E est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{k})$, P le plan de cet espace de repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

1.1 Dans ce plan, on considère les points A , B et C de coordonnées respectifs $(-3, 0)$, $(1, 4\sqrt{3})$ et $(-2, 4\sqrt{3})$.

1.1.1 Montrer qu'il existe une ellipse (E) passant par C et O de foyers A et B .

1.1.2 Chercher l'aire du domaine (D) délimité par l'ellipse (E) .

(On rappelle que l'aire d'une ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ est πab unités d'aire).

1.2 Dans l'espace E on considère le point $I(0, 0, 6)$. Soit h l'homothétie de centre I et de rapport $\frac{2}{3}$.

On désigne par :

- (D') le domaine image du domaine (D) par h .

- (S) le solide délimité par (D) , (D') et les segments $[Mh(M)]$, M appartenant à (E) .

Les sections de (S) par des plans parallèles au plan P sont les images de (E) par des homothéties de centre I et de rapport k , $\frac{2}{3} \leq k \leq 1$.

1.2.1 Vérifier, en cherchant $h(O)$: que la cote du plan contenant (D') est 2.

Chercher le rapport de l'homothétie correspondant à la section de (S) de cote z , $0 \leq z \leq 2$.

1.2.2 Déduire l'aire $A(z)$ de la section de (S) de cote z , $0 \leq z \leq 2$, de l'aire de (D).

1.2.3 Calculer alors le volume du solide (S) : $V = \int_0^2 A(z)dz$.

EXERCICE 2

Le plan complexe (P) est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On désigne par T l'application, de (P) dans lui-même, associant au point M d'affixe $z = x+iy$ le point d'affixe $z' = x'+iy'$ telle que $z' = (z + 1)^2$

2.1 Déterminer l'ensemble des points invariants de T.

2.2 Montrer que tout point M' d'affixe z' admet deux antécédents M_1 et M_2 symétriques par rapport au point A d'affixe (-1).

2.3 Etablir que $x' = (x + 1)^2 - y^2$ et $y' = 2y(x + 1)$.

2.4 En déduire que, la transformée de la droite d'équation $x = 0$ ainsi que les transformées des droites d'équation $y = a(x + 1)$, $a \in \mathbb{R}$, sont incluses dans des courbes dont on déterminera une équation cartésienne.

PROBLEME

Les parties I et II sont indépendantes.

PARTIE I

On considère l'application f de $\mathbb{R}$ dans lui-même définie par : $f(x) = \begin{cases} -xe^x & \text{si } x \leq 0 \\ x \ln(x) & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ unité 6 cm.

I.1 Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0.

Etudier les variations de f .

I.2 Soit g la restriction de f à l'intervalle $I = [-1, e^{-1}]$

I.2.1 Montrer que g est une bijection de I sur $g(I)$.

I.2.2 Construire les courbes représentatives de g et g^{-1} dans f .

I.2.3 Montrer que g^{-1} est dérivable en $\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}}$ et calculer $(g^{-1})'(\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}})$.

PARTIE II

Soit $(U_n)_{n \geq 1}$ la suite définie par : $U_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$

II.1.1 Vérifier la double inégalité :

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n^2} < \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \quad \forall n \geq 2.$$

II.1.2 En utilisant (1), montrer que la suite $(U_n)_{n \geq 1}$ est majorée. En déduire qu'elle est convergente. Soit L sa limite.

II.2 Déduire de la relation (1), un encadrement de la somme : $\frac{1}{10^2} + \frac{1}{11^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$

En déduire que U_9 est une valeur approchée de L à $2 \cdot 10^{-1}$ près.

II.3.1 Par une intégration par parties, calculer $\int_0^\pi \left(\frac{1}{2\pi} x^2 - x \right) \cos(nx) dx$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

II.3.2 Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x \in]0, \pi]$:

$$\cos(x) + \cos(2x) + \dots + \cos(nx) = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{2 \sin\left(\frac{x}{2}\right)} - \frac{1}{2}$$

II.4 On pose $g(x) = \frac{\frac{1}{2\pi}x^2 - x}{2 \sin\left(\frac{x}{2}\right)}$ si $x \in]0, \pi]$ et $g(0) = -1$.

On suppose que g est continue et dérivable sur $]0, \pi]$ et g' est continue sur $[0, \pi]$.

II.4.1 Montrer que :

$$\int_0^{\pi} g(x) \left(\sin \left(n + \frac{1}{2} \right) x \right) dx - \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \left(\frac{1}{2\pi} x^2 - x \right) dx = U_n$$

II.4.2 Montrer de même que :

$$\int_0^{\pi} g(x) \left(\sin \left(n + \frac{1}{2} \right) x \right) dx = \frac{1}{n + \frac{1}{2}} \left(-1 + \int_0^{\pi} g'(x) \left(\cos \left(n + \frac{1}{2} \right) x \right) dx \right)$$

II.4.3 En déduire qu'il existe un réel M que l'on déterminera tel que l'on ait :

$$\left| \int_0^{\pi} g'(x) \left(\cos \left(n + \frac{1}{2} \right) x \right) dx \right| \leq M - 1$$

II.4.4 En déduire, en utilisant les questions précédentes que : $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = \frac{\pi^2}{6}$

Sujet 08 : Session de remplacement 1998**EXERCICE 1**

Soit P le plan complexe orienté muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$ direct.

1.1 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 + 2z + 5 = 0$.

1.2 Soient A et A' les points images des solutions de cette équation, A étant le point dont l'affixe z_A est telle que : $\text{Im}(z_A) > 0$.

Soit B l'image de A par le quart de tour direct de centre O .

1.2.1 Calcule l'affixe de B z_B .

1.2.2 Quel est l'ensemble (E) des points M d'affixe z tels que :

$$\left| \frac{z - z_B}{z - z_A} \right| = 1?$$

1.2.3 Quel est l'ensemble (F) des points M d'affixe z tels que :

$$\arg \left(\frac{z - z_B}{z - z_A} \right) = \frac{\pi}{2} [2\pi]?$$

1.2.4 Quel est l'ensemble (G) des points M d'affixe z tels que :

$$\frac{z - z_B}{z - z_A} \in \mathbb{R}_+^*$$

1.2.5 Représenter (E) , (F) et (G) .

EXERCICE 2

Le plan est supposé orienté, la notation $(\vec{u}, \vec{v})$ désignera l'une des mesures de l'angle orienté du couple de vecteurs $(\vec{u}, \vec{v})$.

Soit ABC un triangle non rectangle inscrit dans un cercle (C) de centre O, et soit H son orthocentre. Soient (C₁) et (C₂) les cercles de centres respectifs O₁ et O₂, symétriques du cercle (C), respectivement par rapport aux droites (AB) et (AC).

2.1 Soit A₁ le symétrique de H par rapport à la droite (AB).

2.2.1 Montrer que : $(\overrightarrow{A_1A}, \overrightarrow{A_1C}) = -(\overrightarrow{HA}, \overrightarrow{A_1C})[\pi]$.

2.2.2 Montrer que : $(\overrightarrow{A_1A}, \overrightarrow{A_1C}) = (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})[\pi]$. Que peut-on en déduire pour A, puis pour H ?

2.2.3 Déterminer : $(C_1) \cap (C_2)$.

2.3 Montrer que (C₂) est l'image de (C₁) par une rotation R de centre A dont on déterminera l'angle.

2.4 Soit M un point quelconque du cercle (C), dont les symétriques respectifs par rapport aux droites (AC) et (AB) sont B' et C'.

Justifier les égalités suivantes :

$$R(C') = B' ; \quad (\overrightarrow{HB'}, \overrightarrow{HA}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{O_2B'}, \overrightarrow{O_2A})[\pi] ; \quad (\overrightarrow{HC'}, \overrightarrow{HA}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{O_1C'}, \overrightarrow{O_1A})[\pi] ;$$

$$(\overrightarrow{O_2B'}, \overrightarrow{O_2A}) = (\overrightarrow{O_1O}, \overrightarrow{O_1A})[\pi] .$$

En déduire que : $(\overrightarrow{HB'}, \overrightarrow{HC'}) = 0[\pi]$.

Que peut-on en déduire pour les points H, B', C' puis pour les points H, A', B', C' où A' est le symétrique de M par rapport à la droite (BC) ?

2.5 Montrer que les points I, J, K milieux respectifs des segments [MA'], [MB'] et [MC'] sont alignés.

2.6 Réciproquement, soit M un point quelconque du plan dont les projections orthogonales K, J et I sur les droites (AB), (AC) et (BC) sont alignés. Démontrer que M

appartient au cercle (C). (On pourra montrer que les points K, J, I O d'une part et M, I, K, B d'autre part sont cocycliques).

PROBLEME

PARTIE I

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par : $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 1 - 2\ln(1+x)$.

On désignera par (C) sa courbe représentative dans un plan rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité 2 cm).

I.1 Etudier les variations de f et dresser son tableau de variations.

I.2.1 Déterminer une équation de la tangente à (C) au point d'abscisse 0.

I.2.2 Calculer $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{f(x)}{x} \right)$ interpréter géométriquement ce résultat.

I.2.3 Tracer la courbe (C) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

I.3.1 Montrer que l'équation $\frac{1}{2}x^2 - 1 = 2\ln(1+x)$ admet deux solutions et deux seulement, dont l'une α appartient à $]2,3[$.

I.3.2b) Montrer que : $\alpha = \sqrt{2 + 4\ln(1 + \alpha)}$.

I.4 Soit g la restriction de f à l'intervalle $[1, +\infty[$.

I.4.1 Montrer que g est une bijection de $[1, +\infty[$ à un intervalle J que l'on précisera.

I.4.2 Etudier la dérivabilité et le sens de variation de g^{-1} bijection réciproque de g (On ne demande pas de déterminer g^{-1}).

I.4.3 Tracer la courbe représentatives (T) de g^{-1} dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

PARTIE II

On considère la fonction h définie sur $[2, +\infty[$ par : $h(x) = \sqrt{2 + 4\ln(1+x)}$.

II.1 Montrer que quelque soit x appartenant à $[2, +\infty[$:

II.1.1 $h(x) \geq 2$.

II.1.2 $0 \leq h'(x) \leq \frac{1}{3}$.

II.2 Soit (U_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $U_0 = 2$ et $U_{n+1} = h(U_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

II.2.1 Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N} : U_n \geq 2$.

II.2.1 Montrer que pour tout entier naturel n :

$|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{3} |U_n - \alpha|$ étant le réel définie à la 3^{ème} question de la **PARTIE I** du

PROBLEME

c) Montrer que pour tout entier naturel $n : |U_n - \alpha| \leq \frac{1}{3^n}$;

d) En déduire que (U_n) converge et déterminer sa limite.

3) En déduire une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

PARTIE III

On considère pour tout x appartenant à $[1, +\infty[$ la fonction G définie par :

$G(x) = \int_1^x g(t)dt$, g étant la fonction définie à la 4^{ème} question de la PARTIE 1 du PROBLEME.

III.1 Justifier l'existence de $G(x)$ pour tout x appartenant à $[1, +\infty[$.

III.2.1 Déterminer les réels a et b tels que pour tout réel x différent -1 : $\frac{x}{x+1} = a + \frac{b}{x+1}$

III.2.2 En utilisant une intégration par parties, calculer $\int_1^x \ln(1+t)dt$ pour x appartenant à $[1, +\infty[$.

III.2.3 En déduire $G(x)$ pour x appartenant à $[1, +\infty[$.

III.3.1 Déterminer en fonction de α l'aire du domaine délimité par la courbe (C) l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x=1$, $x=\alpha$

III.3.2 Hachurer ce domaine dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

KORKA

Sujet 09 : Session de remplacement 1999**EXERCICE 1**

L'espace (E) est muni d'un repère orthogonal direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

On considère l'application v de (E) dans (E) qui à tout point $M(x, y, z)$ associe le point $M'(x', y', z')$ tel que :

$$\begin{cases} x' = -x + 2 \\ y' = z + 1 \\ z' = y + 1 \end{cases}$$

1.1 Soit $A(1, 0, 0)$ est h_1 l'homothétie de centre A et de rapport 2. Soit $f = h_1 \circ v$.
Démontrer que f admet un unique point invariant B.

1.2 Soit $r = h_2 \circ f$, où h_2 est l'homothétie de centre B et de rapport $\frac{1}{2}$.

Démontrer que r est un demi-tour dont on précisera l'axe D.

1.3 En déduire que v est composée du demi-tour r et d'une translation dont vecteur, à préciser, est un vecteur directeur de D.

EXERCICE 2

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

On note (C) l'ensemble des points M d'affixe z tels que :

$$|(1 + i)Z - 3 + 3i| = 2$$

On considère l'application s du plan qui au point M d'affixe Z associe le point M' d'affixe Z' tel que :

$$Z' = (1 + i)Z - 3 + 3i$$

2.1 Déterminer et construire l'ensemble (T) des points M' lorsque M décrit (C).

2.2 Montrer que s est une similitude directe dont on caractérisera. I désignera le centre de s.

2.3 Démontrer que l'antécédent F de O est tel que le triangle IFO est rectangle et isocèle.

2.4 Construire F et (C).

EXERCICE 3

3.1 Déterminer une solution f et g de l'équation différentielle :

$$y'' - y = 0, \quad \text{vérifiant : } \begin{cases} f(0) = 0 \text{ et } f'(0) = 1 \\ g(0) = 1 \text{ et } g'(0) = 3 \end{cases}$$

3.2 Dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

On considère la courbe (C) dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = 2e^t + e^{-t} \\ y = 2e^t - e^{-t} \end{cases} t \in \mathbb{R}.$$

Montrer que (C) admet en tout point une tangente dont on donnera un vecteur directeur.

3.3.1 Montrer que (C) est une branche de l'hyperbole (H) d'équation $x^2 - y^2 = 9$.

3.3.2 Tracer (H) en précisant, son centre, ses sommets foyers et asymptotes.

PROBLEME

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \ln \left(\frac{e}{2} \left(x + \frac{1}{x} \right) \right)$ et on note (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal.

PARTIE I

I.1 Etudier les variations de f .

I.2 Montrer que pour tout $x > 0$, $f'(x) \leq 1$. En déduire la position de (C) par rapport à la droite $(\Delta) : y = x$

I.3.3) Construire la courbe (C) et la droite (Δ) On précisera la nature et la branche infinie en $+\infty$.

I.4 Etudier dans $\mathbb{R}^+$ les variations de la fonction φ définie par :

$$\varphi(t) = f(1+t) - \frac{t^2}{2} - f(1)$$

En déduire que pour tout $t > 0$, $f(1+t) - f(1) \leq -\frac{t^2}{2}$

PARTIE II

Soit (U_n) la suite définie par: $\begin{cases} U_0 = \frac{3}{2} \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$.

II.1 Montrer que (U_n) est décroissante et minorée par 1.

II.2 On pose $V_n = U_n - 1$

II.2.1 Montrer que pour tout n , $V_{n+1} \leq \frac{1}{2} \cdot V_n^2$.

(On pourra écrire V_{n+1} sous la forme $f(1+t) - 1$ et utiliser A)4)

II.2.1 En déduire que pour tout $n \geq 1$

$$0 \leq V_n \leq 2 \left(\frac{V_1}{2} \right)^{2^{n-1}}$$

II.2.3 Montrer que (U_n) converge et déterminer sa limite.

Sujet 10 : Session de remplacement 2000

EXERCICE 1

ABCDEF est un hexagone régulier de centre I tel que le triangle IAB soit de sens direct.

Soit J le milieu du segment [AI].

1.1 On note s_1 la similitude directe de centre B de rapport $\frac{1}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

1.1.1 Déterminer l'image de E par s_1 .

1.1.2 Déterminer l'antécédent de J par s_1 .

1.2 On note s_2 la similitude directe de centre J qui transforme A en F. Déterminer son rapport et son angle.

1.3 On note s la similitude directe qui transforme E en F et D en J.

1.3.1 Comparer s et $s_2 \circ s_1$.

1.3.2 Construire le centre Ω de s , en énumérant les différentes étapes de la construction.

EXERCICE 2

L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On donne les points $A(3,0,0)$; $B(0,3,0)$; $C(0,0,3)$ et G le centre de gravité du triangle ABC.

2.1.1 Déterminer les coordonnées de G.

2.1.2 Démontrer que la droite (OG) est orthogonale au plan (ABC).

2.2 Déterminer les coordonnées de l'image de O par la réflexion $S_{(ABC)}$.

2.3 Déterminer les coordonnées des images de O, A, B et C par le demi-tour $S_{(OG)}$.

EXERCICE 3

Soit θ un nombre réel de l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

3.1 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) suivante : $z^2 \cos^2 \theta - z \sin 2\theta + 2 - \cos^2 \theta = 0$: (E).

3.2 Soit M l'image dans le plan complexe de la solution (E) dont la partie imaginaire est positive.

3.2.1 Démontrer que M appartient à une hyperbole (H) dont on donnera une équation.

3.2.2 Construire (H) et déterminer la partie (H) décrite par M lorsque θ décrit $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

PROBLEME

PARTIE I

Pour tout entier naturel n, on note f_n l'application de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{cases} f_n(x) = \frac{\sin 2(n+1)x}{\sin x} & \text{si } x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\\ f_n(0) = 2n+2 \end{cases}$$

I.1 Montrer que f_n est continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

I.2 On pose $U_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(x) dx$

I.2.1 Montrer que la suite (U_n) est bien définie dans $\mathbb{N}$.

I.2.2 Montrer que $U_{n+1} - U_n = \frac{2(-1)^{n+1}}{2n+3}$

I.3 Calculer U_0, U_1 et U_2 .

PARTIE II

II.1 Montrer que $U_n = 2 \sum_{k=0}^{k=n} \frac{(-1)^k}{2k+1}$

II.2.1 Calculer $\int_0^1 dx$ et $\int_0^1 x^{2k} dx$; $k \in \mathbb{N}^*$.

II.2.2 En déduire que $U_n = 2 \int_0^1 \frac{1+(-1)^n x^{2n+2}}{1+x^2} dx$

II.3.1 Etablir que $\left| U_n - 2 \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx \right| \leq \frac{2}{2n+3}$

II.3.2 En déduire la convergence de la suite (U_n) .

PARTIE III

Soit φ l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\varphi(x) = \frac{1}{1+x^2}$

Soit F la primitive nulle en zéro de φ ; soit G l'application de $\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$ dans $\mathbb{R}$ définie par $G(u) = F(\tan u)$.

III.1 Montrer que G est dérivable et admet une fonction dérivée G' que l'on précisera.

III.2 En déduire G .

III.3 En déduire la valeur de $J = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$. Quelle est la limite de la suite (U_n) ?

Deuxième partie

Corrigés

CORRIGE SESSION DE REMPLACEMENT 1994

EXERCICE 1

1. $P_1 = 0,5$

2.a. On distingue deux cas :

- le premier tirage se fait dans U_1 et on obtient une blanche.

- le deuxième tirage se fait dans U_2 et on obtient une noire.

b. Soit A_1 : « le premier tirage s'est fait dans U_1 »

Soit B : « la boule obtenue est blanche ».

Donc $P_2 = P[(A_1 \cap B) \cup (\overline{A_1} \cap \overline{B})]$

d'où $P_2 = P(B/A_1) \times P(A_1) + P(\overline{B}/\overline{A_1}) \times P(\overline{A_1})$ $P_2 = \frac{2}{5}$

3. Soit A_n : « le $n^{\text{ième}}$ tirage s'est fait dans U_1 »

Soit B : « la boule obtenue est blanche ». Pour tout $n \geq 2$

$A_n = [(A_{n-1} \cap B) \cup (\overline{A_{n-1}} \cap \overline{B})]$

$P(A_n) = P_n = P(B/A_{n-1}) \times P(A_{n-1}) + P(\overline{B}/\overline{A_{n-1}}) \times P(\overline{A_{n-1}})$

$\Rightarrow P(A_n) = P_n = \frac{2}{5} P_{n-1} + \frac{1}{5}$

4. Posons $U_n = qU_{n-1}$ avec q réel et $n \in [2; +\infty[$

$\forall n \geq 2, P_n - a = q(P_{n-1} - a)$

$\Leftrightarrow \frac{2}{5} P_{n-1} + \frac{1}{5} = qP_{n-1} + a$. Par identification :

$\Leftrightarrow \begin{cases} q = \frac{2}{5} \\ a = \frac{1}{5} \end{cases}$

$\Rightarrow U_n$ est telle que $U_n = P_n - \frac{1}{3}$ est une suite géométrique de raison $\frac{2}{5}$ et de premier terme $U_1 = \frac{1}{15}$

$$P_n = \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1} \times \frac{1}{15} + \frac{1}{3} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} P_n = \frac{1}{3}$$

Donc il est probable que la majorité des tirages se fasse dans U_2 .

EXERCICE 2

Schéma à faire par l'élève.

1. $KP = KA = \frac{1}{2}AB = IJ$ (théorème des milieux).

2. $r(K) = J$ et $r(P) = I$

$$\Rightarrow (\overrightarrow{KP}, \overrightarrow{JI}) = (\overrightarrow{KP}, \overrightarrow{KB})(2\pi) = \frac{\pi}{2}(2\pi)$$

3. On avait $IJ = KP$;

$JN = JC = \frac{1}{2}AI = KI$ (théorème des milieux).

$$\begin{cases} (JI) \text{ parallèle à } (AB) \\ (KP) \text{ parallèle à } (AB) \end{cases} \Rightarrow (JI)(KP)$$

D'autre part :

$$\begin{cases} (JN) \text{ à } (AC) \\ (AC) \text{ parallèle à } (KI) \end{cases} \Rightarrow (JN)(KI)$$

$$\text{Donc } (\overrightarrow{JI}, \overrightarrow{JN}) = (\overrightarrow{KP}, \overrightarrow{KI})(\pi)$$

Alors :

$$\begin{cases} JN = IK \\ IN = JC \\ (\overrightarrow{JI}, \overrightarrow{JN}) = (\overrightarrow{KP}, \overrightarrow{KI})(\pi) \end{cases}$$

Donc IJN et IKP sont isométriques.

$\exists!$ Isométrie f telle que :

$$\begin{cases} f(K) = J = r(K) \\ f(P) = I = r(P) \end{cases} \Rightarrow f = r$$

Ainsi $r(I) = N$. On a $r(P) = I$ et $r(I) = N \Rightarrow \begin{cases} PI = IN \\ (\overrightarrow{PI}, \overrightarrow{IN}) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$ PIN est rectangle isocèle.

$$4. r_1 \circ r_2(B) = r_1(r_2(B)) = r_1(A) = C$$

$r_1 \circ r_2$ est une rotation d'angle π . C'est une symétrie centrale de centre le milieu de $[BC] = I$.

PROBLEME

Partie A :

1. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$ avec $0 < x \leq y$.

1^{er} cas :

$\exists k \in \mathbb{N} : x \in [k; k+1[$ et $y \in [k; k+1[\Rightarrow f(x) = k \ln(x)$ et $f(y) = k \ln(x)$

Or $0 < x \leq y \Rightarrow k \ln(x) \leq k \ln(y) \Rightarrow f(x) \leq f(y)$.

2^{ème} cas :

$\exists k, k' \in \mathbb{N}, k < k' : x \in [k; k+1[$,

$y \in [k'; k'+1[\Rightarrow \begin{cases} f(x) = k \ln(x) \\ f(y) = k' \ln(y) \end{cases}$

$k < k' \Rightarrow k \ln(x) \leq k' \ln(y)$

$\Rightarrow f(x) \leq f(y) \Rightarrow f \uparrow \mathbb{R}_+$

2. si $x \geq 1 \Rightarrow E(x) \geq 1$

$\Rightarrow E(x) \ln(x) \geq \ln(x)$.

Donc $\forall x \geq 1, f(x) \geq \ln(x)$;

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f = +\infty$$

3.

- sur tout intervalle de type $]k, k + 1[$

$f \mapsto k \ln(x)$ est définie f est continue et dérivable sur $\bigcup_{k \in \mathbb{N}}]k, k + 1[$

- Si $x \in]0, 1[$ $f = 0$ et $f(0) = 0$ donc f est continue et dérivable en 0.

- Pour $k = 1$, f est continue

- Pour $k > 1$ $\lim_{k^-} f = (k-1) \ln k$

$\lim_{k^+} f = k \ln k = f(k) \Rightarrow f$ est discontinue en k mais continue en k^+ .

- ... $f'_d(k) = 1$.

4.a à faire par l'élève

Partie B :

$$1. \int_0^1 f(x) dx = \lim_{k \rightarrow 1} \int_0^1 f(x) dx, t \in [k, k+1]$$

$$\int_0^1 f(x) dx = \lim_{k \rightarrow 1} \int_0^1 k \ln x dx = \lim_{k \rightarrow 1} k \left[\ln x - x \frac{1}{k} \right]$$

$$\int_k^{k+1} f(x) dx = k(k+1) \ln(k+1) - k^2 \ln k - k$$

$$2. n \in \mathbb{N} - \{1\}$$

$$\int_1^n f(x) dx = \int_1^2 f(x) dx + \int_2^3 f(x) dx + \dots + \int_{n-1}^n f(x) dx = \sum_{k=1}^n \left(\int_k^{k+1} f(x) dx \right) = \sum_{k=1}^{n-1} (k-1)^2 \ln k + \sum_{k=2}^n (k-1) \ln k - \sum_{k=1}^{n-1} k^2 \ln k - \frac{n(n-1)}{2} \dots$$

$$\Rightarrow \int_1^n f(x) dx = - \sum_{k=1}^n k \ln k + n^2 \ln n - \frac{n(n-1)}{2}$$

$$3.a \quad n \geq 2 \Rightarrow 2 \leq k \leq n \Rightarrow 0 \leq k \leq n \Rightarrow 0 \leq \ln k \leq \ln n \Rightarrow \sum_{k=1}^n k \ln k \leq \frac{(n-1)(n+2)}{2}$$

$$\text{b. } E(x) \leq x \Rightarrow E(x) \ln x \leq x \ln x \Rightarrow \int_1^n f(x) dx \leq \int_1^n x \ln x dx$$

$$\Rightarrow -\sum_{k=2}^n k \ln k + n^2 \ln n - \frac{n(n-1)}{2} \leq \frac{1}{2} n^2 \ln n - \frac{n^2}{4} + \frac{1}{4} \text{ D'où :}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=2}^n k \ln k \geq \frac{n^2}{2} \ln n - \frac{n^2}{4} + \frac{n}{2} - \frac{1}{4}$$

$$4. \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{\sum_{k=2}^n k \ln k}{\frac{n^2}{2} \ln n} \right] = 1$$

CORRECTION SESSION DE REMPLACEMENT 1995

EXERCICE 1

$$1. P_1 = \frac{1}{2} \quad P_2 = \frac{3}{8} \quad P_3 = \frac{7}{64}$$

$P_1 + P_2 + P_3 = \frac{63}{64} \approx 1 \Rightarrow$ L'étudiant sérieux a de fortes chances de réussir soit la première année, soit la 2^e, soit la 3^e année.

$$2. P_n = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \times \dots \times \frac{1}{2^{n-1}} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = \frac{2^n - 1}{2 \times 2^2 \times \dots \times 2^n}$$

$$P_n = \frac{2^n - 1}{2^{\frac{n(n+1)}{2}}}$$

$$3. \lim_{n \rightarrow \infty} P_n = 0$$

Par récurrence sur n, on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n P_k = 1$$

EXERCICE 2

1.a. O est centre de gravité de ADE :

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} = \vec{0}$$

O' est centre de gravité de BCF :

$$\overrightarrow{O'B} + \overrightarrow{O'C} + \overrightarrow{O'F} = \vec{0}$$

$$\text{Mais or : } \begin{cases} \overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FO'} \\ \overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BO'} \\ \overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CO'} \end{cases} \Rightarrow 3\overrightarrow{OO'} = \vec{0} + \vec{0} + 3\overrightarrow{AB}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{AB}$$

b. Soit :

$$G = \text{bar}\{(A, 1); (B, 1); (C, 1); (D, 1); (E, 1); (F, 1)\} (1)$$

Par association du barycentre,

$$G = \text{bar}\{(O, 3); (O', 3)\} \Rightarrow G \text{ milieu de } [OO']$$

$$c. (1) : G = \text{bar}\{(L, 2); (K, 4)\} \Rightarrow \overrightarrow{GL} = -2\overrightarrow{GK}$$

$$2. \text{ Soit } T = \{M \in E : \|\wp(M)\| = a\sqrt{21}\}$$

$$\forall M \in E : \overrightarrow{\wp(M)} = 6\overrightarrow{MG}$$

$$\|\overrightarrow{\wp(M)}\| = 6\|\overrightarrow{MG}\| = a\sqrt{21}$$

$$\Rightarrow \|\overrightarrow{MG}\| = \frac{a\sqrt{21}}{6} \quad (1)$$

$$\|\overrightarrow{\wp(A)}\| = 6\|\overrightarrow{AG}\| = 6\|\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OG}\|$$

$$\|\overrightarrow{\wp(A)}\| = 6\sqrt{AO^2 + AL^2} = \frac{a\sqrt{21}}{6}$$

$\Rightarrow A$ est un élément de T . T est la sphère circonscrite au pentagone.

PROBLEME

Partie 1

$$f(x) = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right|$$

$$1.a. D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \text{ donc } \forall x \in D_f, \forall -x \in D_f \text{ et : } f(-x) = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{-x-1}{-x+1} \right| = -\frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| = -f(x)$$

$f(-x) = -f(x) \Rightarrow f$ est impaire. Donc O est centre de symétrie pur (C) .

b. f est continue et dérivable sur D_f .

$$f(x)' = \frac{1}{x^2 - 1}$$

$$2. \text{ pour } x \neq 0, f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x) \text{ (à vérifier)}$$

$$3.a. \begin{cases} x(t) = -e^{2t} \\ y(t) = f(e^{2t}) \\ t \in \mathbb{R}_+^* \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = \frac{1}{2} \ln(-x) \\ x \in]-\infty, -1[\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} T : y = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1-x}{1+x} \right| \\ x \in]-\infty, -1[\end{cases} \text{ Il apparait que } T \text{ est inclus dans } (C).$$

3. Si $t \rightarrow 0, x(t) \rightarrow -1, t \rightarrow +\infty, x(t) \rightarrow -\infty$

$$b. \vec{V}(t) = \begin{pmatrix} -2e^{2t} \\ \frac{2e^{2t}}{1-e^{2t}} \end{pmatrix}$$

c. Soit $D : y = x \Rightarrow D$ est dirigée par $\vec{u}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; T est parallèle à $(D) \Leftrightarrow \vec{v}(t) = k\vec{u}$

$$\Leftrightarrow t = -\frac{1}{4} \ln 2.$$

Pour $t_0 = -\frac{1}{4} \ln 2, (T)$ parallèle à $(D) : y = x$

$$M\left(\frac{1}{4} \ln 2\right)$$

Partie B :

a. $g = f_{]-1,1[}$. g est continue et strictement décroissante sur $]-1,1[$ donc g réalise une bijection de $]-1,1[$ vers $\mathbb{R}$. g^{-1} est définie sur $\mathbb{R}$.

$$b. \begin{cases} g(x) = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1-x}{1+x} \right| \\ x \in]-1,1[\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1-e^{2y}}{1+e^{2y}} \\ y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$g^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow]-1,1[\\ x \mapsto g(x) = \frac{1-e^{2x}}{1+e^{2x}}$$

c. voir figure.

$$2.a \ I = - \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{dt}{1-t^2} \text{ soit } k(t) = \frac{1}{1-t^2}$$

- k est continue sur $] -1, 1[$ donc sur $] -\alpha, \alpha[$

- k est pair ; $k(t) > 0$ pour $t \in] -\alpha, \alpha[$. Donc :

I est l'aire du domaine :

$$D_{\alpha} = \left\{ M(x, y) : \begin{cases} -\alpha \leq x \leq \alpha \\ 0 \leq y \leq h(x) \end{cases} \right\} \text{ à une unité d'aire près.}$$

$$b. \ I = \int_{-\alpha}^{\alpha} g'(t) dt = g(\alpha) - g(-\alpha) = \ln \left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha} \right)$$

$$I = 1 \Leftrightarrow \alpha = \frac{1-e}{1+e}$$

$$3.a \begin{cases} \text{si } |x| < 1, h(x) = x \Rightarrow \lim h = 1 \\ \text{si } |x| > 1, h(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow \lim h = -1 \text{ (en } -1) \end{cases}$$

Donc h est prolongeable par continuité en -1 et 1 par définie par :

$$\begin{cases} \tilde{h}(x) = h(x) \text{ si } |x| \neq 1 \\ \tilde{h}(1) = -\tilde{h}(-1) = 1 \end{cases}$$

Partie C

$$1.a \ \forall x \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}, f'(x) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right]$$

$$b. \text{ En dérivant } f'(x), \text{ on a : } f''(x) = \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{(x+1)^2} \right]$$

2. Il suffit de vérifier tout simplement.

$$3. \ \forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \left(\frac{(n-1)!}{2} \right) \left[\frac{(x+1)^n - (x-1)^n}{(x^2-1)^n} \right]$$

Par récurrence :

La propriété est vraie pour $n = 1$.

Supposons-la vraie au rang n.

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= \left(f^{(n)}(x) \right)' \\ &= \left[(-1)^{n-1} \left(\frac{(n-1)!}{2} \right) \left[\frac{(x+1)^n - (x-1)^n}{(x^2-1)^n} \right] \right)' \end{aligned}$$

... après des calculs, on a le résultat :

$$f^{(n+1)}(x) = (-1)^n \left(\frac{n!}{2} \right) \left[\frac{(x+1)^{n+1} - (x-1)^{n+1}}{(x^2-1)^{n+1}} \right]$$

Donc la propriété est toujours vraie

Thierno korka DIALLO, élève ingénieur à l'Ecole Polytechnique de Thiès

CORRECTION SESSION DE REMPLACEMENT 1996

EXERCICE 1

1. $k > 0, p_k = 1, \tan\left(\frac{\alpha_k}{2}\right) = \frac{1}{1+k(k+1)}$

On a : $P_k = \left| \frac{1+k(k+1)+i}{1+k(k+1)-i} \right| = 1$

$$\alpha_k = \arg(1 + k(k+1) + i) - \arg(1 + k(k+1) - i)(2\pi)$$

$$= 2 \arg(1 + k(k+1)) (2\pi) \Rightarrow \frac{\alpha_k}{2} = \arg(1 + k(k+1) + i)(2\pi)$$

Donc : $\tan\left(\frac{\alpha_k}{2}\right) = \frac{1}{1+k(k+1)+i}$

2. $z_0 = i, z_1 = \frac{4}{5} + \frac{3}{5}i, z_2 = \frac{24}{25} + \frac{7}{25}i$

3. a $k \geq 0, \exists! \theta_k \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] : \tan\theta_k = k?$

On a : la fonction tangente est une bijection de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ dans lui-même. Ainsi : $\forall k \geq 0, \exists! \theta_k \in$

$$\left[0, \frac{\pi}{2}\right] : \tan\theta_k = k$$

$$\tan\theta_0 = 0 \Rightarrow \theta_0 = 0, \tan\theta_1 = 1 \Rightarrow \theta_1 = \frac{\pi}{4},$$

$$\tan\theta_2 = 2 \Rightarrow \theta_2 = 63,43^\circ$$

b. à faire par l'élève

c. Si $k > 0, \tan(\theta_{k+1} - \theta_k) = \frac{1}{1+k(k+1)} = \tan\left(\frac{\alpha_k}{2}\right)$

Or $\theta_{k+1} - \theta_k \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et $\frac{\alpha_k}{2} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

$$\Rightarrow \frac{\alpha_k}{2} = \theta_{k+1} - \theta_k$$

- Si $k = 0, \theta_1 - \theta_0 = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4} = \frac{\frac{\pi}{2}}{2} = \frac{\alpha_0}{2}$

2.1 $|S_n| = 1, \arg(S_n) = \sum_{k=1}^n \alpha_k(2\pi)$. Mais or,

$\alpha_k = 2(\theta_{k+1} - \theta_k)$ donc :

$$\arg(S_n) = 2(\theta_{k+1} - \theta_k)(2\pi)$$

$$2. \lim|S_n| = 1, \tan\theta_{n+1} = n + 1$$

$$\lim \tan\theta_{n+1} = +\infty \Rightarrow \lim\theta_{n+1} = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim(\theta_{n+1}) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} \text{ donc } \lim \arg(S_n) = \frac{\pi}{2}(2\pi) \text{ Ainsi : } \lim S_n = i.$$

2.a Soit s la similitude de centre θ_1 telle que $s(H) = M$. Soit α son angle et r son rapport.

$$\alpha = (\overrightarrow{O_1H}, \overrightarrow{O_1M}) = -\frac{\pi}{6}, r = \frac{O_1M}{O_1H} = \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

b. Supposons que H est un élément de C de diamètre $[O_1J]$. Donc $(\overrightarrow{HO_1}, \overrightarrow{HJ}) = \frac{\pi}{2}(\pi)$. D'autre part, $(\overrightarrow{HM}, \overrightarrow{HO_1}) + (\overrightarrow{HO_1}, \overrightarrow{HJ}) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}(\pi)$. Donc :

$(\overrightarrow{HM}, \overrightarrow{HJ}) = \pi(\pi)$ Ainsi, les points H, M, J sont alignés et comme $H \in (M_1M)$ et $J \in (M_2M)$ donc les points M_1, M_2 et M sont alignés.

Réciproquement, supposons M_1, M_2 et M alignés. H, M, J seront alors alignés :

$(\overrightarrow{HM}, \overrightarrow{HJ}) = \pi(\pi)$. Or, $(\overrightarrow{HM}, \overrightarrow{HO_1}) = \frac{\pi}{2}$ et $(\overrightarrow{HM}, \overrightarrow{HO_1}) + (\overrightarrow{HO_1}, \overrightarrow{HJ}) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}(\pi)$ donc $(\overrightarrow{HO_1}, \overrightarrow{HJ}) = (\overrightarrow{HM}, \overrightarrow{HJ}) - (\overrightarrow{HM}, \overrightarrow{HO_1}) = \pi - \frac{\pi}{2}(\pi)$. Par conséquent, $H \in C$ de diamètre $[O_1J]$.

c. D'après b, M_1, M_2 et M sont alignés si et seulement si $H \in (C)$ de diamètre $[O_1J]$ donc M_1, M_2 et M sont alignés ssi H décrit le cercle de diamètre $[O_1J]$ d'où l'ensemble cherché est l'image du cercle de diamètre $[O_1J]$ par s .

3.a $M_1M \perp O_1M_1$ car le triangle M_1O_1M est équilatéral. Soit I le milieu de $[M_1M_2]$.

$$\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\frac{1}{2}M_1M_2}{M_1O_2} \Leftrightarrow M_1M_2 = \sqrt{3}M_1O_2$$

EXERCICE 2

1.a $r_2 \circ r_1$ est une rotation d'angle $\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} = \pi$ donc $r_2 \circ r_1$ est une symétrie centrale de centre le milieu de $[MM_2]$ car $r_2 \circ r_1(M) = M_2$. Ainsi, J milieu de $[MM_2]$ est fixe par $r_2 \circ r_1$

- Soit $O' = r_2 \circ r_1(O_1) = r_2(O_1)$. Le triangle O_1, O_2, O' est rectangle isocèle en O_2 . On a donc :

$\widehat{mesO_2} = \frac{2\pi}{3}$, $\widehat{mesO_1} = \frac{\pi}{3}$, $\widehat{mesO'} = \frac{\pi}{3}$; Par ailleurs, J milieu de $[O_1O_1']$ donc (O_2J) est une bissectrice intérieure de $(\widehat{O_1O_2O_1'})$. En considérant le triangle O_1O_2J , on a :

$\widehat{mesO_1} = \frac{\pi}{6}$, $\widehat{mesO_2} = \frac{\pi}{3}$, $\widehat{mesJ} = \frac{\pi}{2}$. Donc J est un élément du cercle C de diamètre $[O_1O_2]$

b. $M_1M_2 = \sqrt{3}M_1M$, $\sqrt{3}O_2M_1 = \sqrt{3}M_1M$

$\Leftrightarrow O_2M_1 = M_1M \Leftrightarrow O_2M_1 = O_1M_1$

c. Soit $\Delta_1 = \{M_1 \in (P) : M_1M_2 = \sqrt{3}M_1M\}$

Soit M_1 un point de la médiatrice de $[O_1O_2]$. Donc $O_2M_1 = O_1M_1 \Leftrightarrow O_2M_1 = M_1M$

$\Leftrightarrow \sqrt{3}O_2M_1 = \sqrt{3}O_1M_1 \Leftrightarrow M_1M_2 = \sqrt{3}M_1M$. Donc $M_1 \in \Delta_1$

Ainsi : Δ_1 est la médiatrice de $[O_1O_2]$ c'est-à-dire $\Delta = r_1^{-1}(\Delta_1)$

PROBLEME

1. $D_f = [0, 1[\cup]1, +\infty[$.

- φ est continue sur $]0, 1[\cup]1, +\infty[$ comme quotient de fonctions continues à dénominateur non nul.

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi(x) = 0 \Rightarrow \varphi$ est continue en 0 donc sur D_f

2.a - $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x - 0} = 0 \Rightarrow \varphi$ est dérivable en 0 et $\varphi'(0) = 0$.

- limites :

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 1} \varphi(x) = +\infty$

- φ est dérivable sur D_f et $\forall x \in D_f$:

$$\varphi'(x) = \frac{\ln x - 2}{(\ln x)^3}$$

3.a $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\varphi(x)}{x} = 0 \Rightarrow \varphi$ admet une branche parabolique de direction $(x'x)$

b. $\varphi'(e) = -1, \varphi(e) = e \Rightarrow T: y = -x + 2e$

c. Courbe.

4. Soit g la fonction définie par :

$$g(x) = \varphi(x) - e. \text{ } g \text{ est continue et dérivable sur }]1, +\infty[\text{ et } g'(x) = \varphi'(x).$$

On a $\frac{e^2}{4} - e < 0$. D'après les variations de g , $g(x) = 0$ existe. C'est dire que $\varphi(x) = e$ existe.

a. $e \leq a \leq b$. Soit $t \in [a, b]$. D'onc : $\frac{1}{\ln b} \leq \frac{1}{\ln t} \leq \frac{1}{\ln a}$

$$\Rightarrow \frac{b-a}{\ln b} \leq \int_a^b \frac{dt}{\ln t} \leq \frac{b-a}{\ln a}$$

b. $x > e$ et u tel que : $e \leq u \leq x$

$$f(x) = \int_e^x \frac{dt}{\ln t} = \int_e^u \frac{dt}{\ln t} + \int_u^x \frac{dt}{\ln t}$$

$$\text{On a : } \frac{u-e}{\ln u} \leq \int_e^u \frac{dt}{\ln t} \leq \frac{x-u}{\ln u} \text{ et } \frac{x-u}{\ln x} \leq \int_u^x \frac{dt}{\ln t} \leq \frac{x-u}{\ln u}$$

$\Rightarrow$ En sommant, on a :

$$\frac{x-u}{\ln x} + \frac{u-e}{\ln u} \leq f(x) \leq u-e + \frac{x-u}{\ln u}$$

$$\text{D'où : } \frac{x-u}{\ln x} \leq f(x) \leq u + \frac{x-u}{\ln u}$$

c. Pour résoudre " $\varphi(x) < x$ ", on résout : $\frac{x}{(\ln x)^2} < x \Leftrightarrow \ln x > 1 \text{ ou } \ln x < -1$. Donc :

$$S =]0, e^{-1}[U]e, +\infty[.$$

$$g(e^3) = \frac{e^3}{9} - e \Rightarrow g(e^3) < 0, g(e^4) = \frac{e^4}{16} - e \Rightarrow g(e^4) > 0. \text{ Donc } x_2 \in [e^3, e^4].$$

Partie B :

1.a $t \mapsto \frac{1}{\ln t}$ est continue sur $]1, +\infty[$ donc la fonction f est bien définie sur $]1, +\infty[$

b. $f'(x) = \frac{1}{\ln x}$. Dans $]1, +\infty[$, $\ln x > 0$ donc la fonction f est croissante sur $]1, +\infty[$

2.a Posons $k(t) = \ln t - t + 1$. $k'(t) = \frac{1-t}{t} < 0$ dans $]1, +\infty[$. Donc $k(t)$ est décroissante dans $]1, +\infty[$. $\lim_{t \rightarrow 1^+} k(t) = 0$ donc $k(t) < 0$. Ainsi, pour tout t de $]1, +\infty[$:

$$k(t) = \ln t - t + 1 < 0 \Rightarrow \ln t < t - 1$$

b. sur $]e, +\infty[$, on a : $\ln t - t + 1 < 0$ donc $\frac{1}{\ln t} > \frac{1}{t-1}$ d'où $\int_e^x \frac{dt}{\ln t} \geq \int_e^x \frac{dt}{t-1} \Rightarrow f(x) \geq \ln\left(\frac{x-1}{e-1}\right)$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \left[\ln\left(\frac{x-1}{e-1}\right) \right] = -\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} \varphi(x) = -\infty$$

- Lorsque $x > e^4$, $\varphi(x) < x$ et $\varphi(x) > \varphi(e^4)$

Or $\varphi(e^4) = \frac{e^4}{16} > e$. Donc $e < \varphi(x) < x$. Ainsi on peut choisir $u = \varphi(x)$. Dans ce cas, on a :

$$\frac{x - \varphi(x)}{\ln x} \leq f(x) \leq \varphi(x) + \frac{x - \varphi(x)}{\ln \varphi(x)}$$

$$\Rightarrow \frac{\ln x}{x} \times \frac{x - \varphi(x)}{\ln x} \leq \frac{\ln x}{x} \times f(x) \leq \frac{\ln x}{x} \times \left(\varphi(x) + \frac{x - \varphi(x)}{\ln \varphi(x)} \right). \text{ Finalement :}$$

$$1 - \frac{\varphi(x)}{x} \leq \frac{\ln x}{x} \cdot f(x) \leq \frac{1}{\ln x} + \left[1 - \frac{\varphi(x)}{x} \right] \cdot \frac{\ln x}{\ln \varphi(x)}$$

d. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\ln \varphi(x)} = 1$. En appliquant le théorème des GMI à la double inégalité démontrée (3.c) on

$$\text{obtient : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} \times f(x) = 1$$

e. $\forall x > e^4$, on a (3.c). Si $x \rightarrow +\infty$,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} \times f(x) = 1. \text{ Donc } \forall x > e^4, \text{ on a :}$$

$$f(x) = \frac{x}{\ln x} (1 + \varepsilon(x))$$

f. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0 \Rightarrow (C_p)$ admet une branche parabolique de direction $(O, \vec{i})$

4.a Calcul simple

$$b. f(2) = \int_e^2 h(t) dt \approx ? \text{ (calculatrice)}$$

CORRECTION SESSION DE REMPLACEMENT 1997

EXERCICE 1

1.a. Il suffit de trouver un réel $a > \frac{AB}{2}$ tel que $OA + OB = CA + CB = 2a$ (définition bifocale). On trouve $a = 5$.

b. On a : $(E) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ dans $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$: repère rapporté aux axes de l'ellipse. En posant $c = \frac{AB}{2} - 4 \Rightarrow b^2 = 9$. Ainsi :

Dans $(\Omega, \vec{i}, \vec{j}) (E) : \frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$ d'où l'aire de est $D = 5.3.\pi = 15\pi \text{ u. a.}$

2. Dans l'espace, soit $H(0,0,6)$ et $h(I, 2/3)$.

$h(D) = D'$, S = solide délimité par D , D' et les segments $[Mh(M)]$ où $M \in (E)$.

a. $h(O) = O'(0,0,2)$ donc la cote du plan contenant D' est 2 car $O' \in D'$.

Soit $s(z)$ une section de cote z . $s(z)$ est l'image de D par $h(I, k(z))$

- comme $O \in D$, on cherche $k(z)$ tel que $h(O) = O'(0,0,z)$. Cela revient à dire que :

$$z - 6 = k(-6) \Rightarrow k = \frac{6 - z}{6}$$

b. $A(z)$ = aire de S . S étant l'image de D par $h(I, k = \frac{6-z}{6})$ alors $A(z) = \left(\frac{6-z}{6}\right)^2 \times A(D)$

c'est-à-dire : $A(D) = \left(\frac{6-z}{6}\right)^2 \times 15$.

$$c. v = \int_0^2 A(z) dz \Rightarrow v = \frac{190\pi}{9} \text{ u. a}$$

EXERCICE 2

$$T: P \rightarrow P$$

$$M(z) \mapsto M'(z') / z' = (1+z)^2$$

$$z = (z + 1)^2 \Leftrightarrow z^2 + z + 1 = 0$$

$$1.a. M(z) \text{ est invariant par } T \text{ssi} \Leftrightarrow z = \frac{-1 + 3i}{2}, z = \frac{-1 - 3i}{2}$$

$$\text{L'ensemble des points invariants par } T \text{ est : } \left\{ B\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right), C\left(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right) \right\}$$

$$b. z' = z^2 + 2z + 1 \Leftrightarrow z^2 + 2z + 1 - z' = 0$$

$$\Delta' = 1 - (1 - z') = z'$$

- si $z' = 0$, $z_0 = -1$ dans ce cas, $M'(z')$ a un seul antécédent qui est $A(-1)$ qui est son propre symétrique.

- si $z' \neq 0$, on a z_1 et z_2 avec $z_1 + z_2 = -\frac{2}{1} \Leftrightarrow \frac{z_1 + z_2}{2} = -1$. Donc $M'(z')$ a deux antécédents M_1 et M_2 symétriques par rapport à $A(-1)$.

$$2. z' = x' + iy' = (x + 1 + iy)^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x' = (x + 1)^2 - y^2 \\ y' = 2(x + 1)y \end{cases}$$

$$3. \text{ si } x = 0 \text{ alors } x' = -y^2 \text{ et } y' = 2y \text{ donc } y'^2 = -4x'$$

L'image de la droite d'équation $x = 0$ est incluse dans la parabole P d'équation $y^2 = -4x$.

$$\text{- Si : } y = a(x + 1) \Rightarrow \begin{cases} x' = (x + 1)^2(1 - a^2) \\ y' = 2(x + 1)a \end{cases}$$

$$\text{On a alors : si } a \neq \pm 1 \Rightarrow y' = \frac{2a}{1-a^2} x' \text{ et si } a = 1,$$

$$\Rightarrow x' = 0 \text{ et } y' = 2(x + 1).$$

$$\text{- si } a = -1, \begin{cases} x' = 0 \\ y' = -2(x + 1) \end{cases} \text{ (à revoir) !!!}$$

PROBLEME

1. $\lim_{0^+} f = \lim_{0^-} f = 0 = f(0) \Rightarrow f$ est continue en 0.

$$\begin{aligned} \lim_{0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= -1 \\ \lim_{0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= -\infty \end{aligned} \Rightarrow f \text{ n'est pas dérivable en } 0.$$

Cependant, C_f admet une demi-tangente de coefficient directeur -1 à gauche et une demi-tangente à droite au point M_0 d'abscisse 0.

Variations de f :

f est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et pour tout x de $\mathbb{R}^*$, :

$$f'(x) = \begin{cases} -(x+1)e^x & (x < 0) \\ 1 + \ln x & (x > 0) \end{cases}$$

2.a $g = f|_{[-1, e^{-1}]}$. g est continue et décroissante sur $I = [-1, e^{-1}]$ donc g est une bijection de I sur $[-e^{-1}, e^{-1}]$

b. Courbe (à faire)

Dérivabilité de g^{-1} en $y_0 = \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}}$

On a : $g^{-1}(y_0) = g^{-1}\left(\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}}\right) = -\frac{1}{2}$. Mais or :

$g'\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{e^{-\frac{1}{2}}}{2} \neq 0$ donc g^{-1} est dérivable au point y_0 et : $(g^{-1})'(y_0) = 2e^2$.

II. 1.a.

$$\forall n \geq 2, \quad \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)} \leq \frac{1}{n^2}$$

$$\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = \frac{1}{n(n-1)} > \frac{1}{n^2}$$

Donc $\forall n \geq 2$, on a (1) : $\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} < \frac{1}{n^2} < \frac{1}{n} - \frac{1}{n-1}$

b. d'après (1), on a :

$$\begin{cases} \frac{1}{2^2} < 1 - \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3^2} < \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \\ \dots \\ \frac{1}{n^2} < \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \end{cases} \Rightarrow U_n < 1 + \left(1 - \frac{1}{n}\right) < 2$$

Donc U_n est majorée par 2. (*). D'autre part,

$$U_{n+1} = U_n + \frac{1}{(n+1)^2} \quad U_n \text{ est croissante (**)}$$

(*)(**) $\Rightarrow (U_n)$ converge vers L.

2. Par un encadrement simple, on montre que : $\frac{1}{10} < L - U_9 < \frac{1}{9}$; Donc U_9 est l'approximation de L à 0,2 près.

3. Après une double intégration par parties, on trouve : $I_n = \frac{1}{n^2}$

b. Preuve plus simple (étapes sautées) :

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha=1}^n \cos \alpha x &= \sum_{\alpha=1}^n \Re \left(e^{i\alpha x} \right) = \Re \sum_{\alpha=1}^n \left(e^{i\alpha x} \right) = \Re \sum_{\alpha=1}^n \left(e^{ix} \right)^\alpha \\ &= \frac{\sin \left(n + \frac{1}{2} \right) x}{2 \sin \frac{x}{2}} - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

4. g est continue et dérivable sur $]0, \pi]$ et g' est continue sur $[0, \pi]$ (supposition)

a. On a :

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \left(\frac{1}{2\pi} x^2 - x \right) \left(\sum_{k=1}^n \cos kx \right) dx &= \sum_{k=1}^n \left(\int_0^\pi \left(\frac{1}{2\pi} x^2 - x \right) \cos kx dx \right) \\ &= U_n \end{aligned}$$

Le calcul par une intégration par parties de $\int_0^\pi g(x) \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) x dx$ donne :

$$\int_0^{\pi} g(x) \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) x dx = \frac{1}{n + \frac{1}{2}} \left(-1 + \int_0^{\pi} g'(x) \cos\left(n + \frac{1}{2}\right) x dx \right)$$

$$\begin{aligned} \text{c. } \left| \int_0^{\pi} g'(x) \cos\left(n + \frac{1}{2}\right) x dx \right| &\leq \int_0^{\pi} |g'(x) \cos\left(n + \frac{1}{2}\right) x| dx \\ &\leq \int_0^{\pi} |g'(x)| dx \end{aligned}$$

Donc il suffit de prendre :

$$M = \int_0^{\pi} |g'(x)| dx + 1.$$

$$\text{d. } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \int_0^{\pi} g(x) \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) x dx \right| \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[-1 + M \right]$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \int_0^{\pi} g(x) \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) x dx \right| = 0$$

D'après 4.a. on a :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} (U_n) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\pi} g(x) \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) x dx - \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \left(\frac{1}{2\pi} x^2 - x \right) dx \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^{\pi} \left(\frac{1}{2\pi} x^2 - x \right) dx = \frac{\pi^6}{6} \end{aligned} \quad \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} (U_n) = \frac{\pi^2}{6}$$

CORRECTION SESSION DE REMPLACEMENT 1998

EXERCICE 1

$$1. z^2 + 2z + 5 = 0 \Leftrightarrow z_1 = -1 - 2i ; z_2 = -1 + 2i$$

$$S = \{z_1, z_2\}$$

$$2. A(-1, 2) \text{ et } A'(-1, -2)$$

a. $r\left(0, \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow r : z' = iz$

$r(B) = A \Leftrightarrow z_B = iz_A \Leftrightarrow z_B = -2 - i$

b. $E = \left\{ M(z) : \left| \frac{z - z_B}{z - z_A} \right| = 1 \right\} \Rightarrow E \text{ est la médiatrice de } [AB].$

c. $F = \left\{ M(z) : \arg\left(\frac{z - z_B}{z - z_A}\right) = \frac{\pi}{2} \right\} \Rightarrow F \text{ est le demi cercle de diamètre } [AB].$

d. $G = \left\{ M(z) : \frac{z - z_B}{z - z_A} \in R_+^* \right\} = (AB) - \overrightarrow{AB}^-$

e. Representation (à faire par l'élève)

Exercice 2 :

1. Soit $S_{(AB)}$ la réflexion d'axe (AB).

$S_{(AB)}(A_1) = H$ et $S_{(AB)}(A_1) = A$ donc $\overrightarrow{A_1A}$ a pour image $\overrightarrow{HA}$ dans la symétrie vectorielle associée à $S_{(AB)}$.
 $S_{(AB)}(C) = C'$ qui est un élément de (CA) donc $\overrightarrow{A_1C}$ a pour image $\overrightarrow{HC'} = -\overrightarrow{A_1C}$ par la symétrie vectorielle. Ainsi :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{(A_1A, A_1C)} &= -\overrightarrow{(HA, HC)}(2\pi) = -\overrightarrow{(HA, A_1C)}(\pi) \\ \overrightarrow{(A_1A, A_1C)} &= \overrightarrow{(A_1A, AB)} + \overrightarrow{(AB, BC)} + \overrightarrow{(BC, A_1C)}(2\pi) \\ &= \overrightarrow{(AB, AH)} + \overrightarrow{(AB, BC)} + \overrightarrow{(BC, A_1C)}(2\pi) \\ &= -\overrightarrow{(AH, AB)} + \overrightarrow{(BC, A_1C)} + \overrightarrow{(AB, BC)}(2\pi) \end{aligned}$$

Or : $\begin{cases} \overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC} \\ \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{A_1C} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{(AH, AB)} + \overrightarrow{(BC, A_1C)}(\pi)$

Ainsi : $\overrightarrow{(A_1A, A_1C)} = \overrightarrow{(BA, BC)}(\pi)$

$\overrightarrow{(A_1A, A_1C)} = \overrightarrow{(BA, BC)}(\pi) \Rightarrow A_1, A, B, C$ sont cocycliques $\Rightarrow A_1$ est un élément de C. Mais or, $H = S_{(AB)}(A_1)$ donc H est élément de C_1 . De même, en posant $A_2 = S_{(AC)}(H)$ et en permutant les rôles de B et C on a :

$$(\overrightarrow{A_2A}, \overrightarrow{A_2C}) = (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})(\pi) \Rightarrow A_2 \in C$$

$\Rightarrow H = S_{(AC)}(A_2)$ est un élément de C_2

3. C_2 est l'image de C_1 par $S_{(AC)} \circ S_{(AB)}$ qui est une rotation $R(A, 2(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}))$

a. Soit M de C, $S_{(AC)}(M) = B'$, $S_{(AB)}(M) = C'$

- $R(C') = S_{(AC)} \circ S_{(AB)}(C') = S_{(AC)}(M) = B'$. Donc $R(C') = B'$

- D'après le théorème de l'angle inscrit et de l'angle au centre :

$$(\overrightarrow{HB'}, \overrightarrow{HA}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{O_2B'}, \overrightarrow{O_2A})(\pi)$$

- $R(O_1) = O_2$, $R(C') = B'$, $R(A) = B$.

$$\Rightarrow (\overrightarrow{O_1C'}, \overrightarrow{O_1A}) = (\overrightarrow{O_2B'}, \overrightarrow{O_2A})(\pi)$$

$$-(\overrightarrow{HB'}, \overrightarrow{HC'}) = (\overrightarrow{HB'}, \overrightarrow{HA}) + (\overrightarrow{HA}, \overrightarrow{HC})(2\pi)$$

$$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{O_2B'}, \overrightarrow{O_2A}) - \frac{1}{2}(\overrightarrow{O_1C'}, \overrightarrow{O_1A})(\pi) = 0(\pi)$$

$\Rightarrow H, B', C'$ sont alignés.

- De même en considérant $R' = S_{(BC)} \circ S_{(AB)}$, on montre que A', B', H alignés. Ainsi H, A', B', C' sont alignés.

$$\text{b. I milieu } [MA'] \text{ et J milieu } [MB'] \Rightarrow \overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{A'B'}$$

De même, $\overrightarrow{JK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{B'C'}$. Or $\overrightarrow{A'B'}$ et $\overrightarrow{B'C'}$ sont colinéaires, donc $\Rightarrow \overrightarrow{IJ} = k\overrightarrow{JK}$ c'est dire que I, J, K sont alignés.

5. $(\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{IC}) = \frac{\pi}{2}(\pi) = (\overrightarrow{JM}, \overrightarrow{JC})(\pi)$; Par conséquent : M, I, C et J sont cocycliques et M, I, K et B sont cocycliques. D'autre part, $\overrightarrow{MJ} \perp \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{MK} \perp \overrightarrow{AB}$ donc :

$$(\overrightarrow{MJ}, \overrightarrow{MK}) = (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB})(\pi). \text{ Calculons } (\overrightarrow{MJ}, \overrightarrow{MK})$$

$$(\overrightarrow{MJ}, \overrightarrow{MK}) = (\overrightarrow{MJ}, \overrightarrow{MC}) + (\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MB}) + (\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MK})$$

$$\text{Or : } \begin{cases} (\overrightarrow{MJ}, \overrightarrow{MC}) = (\overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{IC})(\pi) \\ (\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MK}) = (\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IK})(\pi) \end{cases} \text{ Donc :}$$

$$(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}) + (\overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{IC}) + (\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IK}) = (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB})(\pi)$$

$$(\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IC}) = 0(\pi) \Rightarrow (\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MB}) = (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB})(\pi)$$

$\Rightarrow M, A, C, B$ sont cocycliques d'où $M \in \mathbf{C}$

PROBLEME

Partie :

$D_f =]-1, +\infty[$ f est continue et dérivable sur son domaine de définition et pour tout x de

$$D_f, f'(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x+1}.$$

$$\lim_{1^+} f = +\infty, \lim_{+\infty} f = +\infty$$

2.a Soit T_0 la tangente en $x_0 = 0$:

$$T_0 : y(x) = -2x - 1.$$

$$\lim_{+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \Rightarrow (yy')$$

c. COURBE à FAIRE

$$3.a \ f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2 - 1 = 2\ln(1+x)$$

- sur $]-1, 1[$, f est décroissante et continue. Donc elle réalise une bijection de $]-1, 1[$ sur $]-\frac{1}{2}, 2\ln 2, +\infty$ donc $\exists ! \beta \in]-1, 1[$ tel que : $f(\beta) = 0$.

- sur $[1, +\infty[$ f est continue et croissante donc réalise une bijection de $[1, +\infty[$ vers $]-\frac{1}{2}, 2\ln 2, +\infty$ $\Rightarrow \exists ! \alpha \in [1, +\infty[: f(\alpha) = 0$

$$f(2) = 1 - 2\ln 3 < 0 \text{ et } f(3) = \frac{7}{2} - 4\ln 2 > 0 \Rightarrow \alpha \in]2, 3[$$

Ainsi, l'équation « $f(x) = 0$ » admet exactement deux solutions α, β avec $\alpha \in]2,3[$ c'est-à-dire " $\frac{1}{2}x^2 - 1 = 2\ln(1+x)$ " admet exactement deux solutions α, β avec $\alpha \in]2,3[$

$$b. \begin{cases} f(x) = 0 \\ x \in]2,3[\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{2 + 4\ln(1+x)} \\ x \in]2,3[\end{cases}$$

Ainsi : $\alpha = \sqrt{2 + 4\ln(1+\alpha)}$

4. Soit $g = f_{/[1,+\infty[}$

a. g est continue et croissante sur $[1, +\infty[$ donc g est une bijection de $[1, +\infty[$ sur $\left[-\frac{1}{2} - 2\ln 2, +\infty\right[$

b. g^{-1} est dérivable sur $\left]-\frac{1}{2} - 2\ln 2, +\infty\right[$ car g' ne s'annule sur $]1, +\infty[$ et g^{-1} est strictement croissante car g l'est.

c. à faire par l'élève.

Partie 2

$$1.a \ x \geq 2 \Rightarrow 1+x \geq 3 \Rightarrow \ln(1+x) \geq \ln 3$$

$$\Rightarrow 4\ln(1+x) \geq 4\ln 3$$

$$\Rightarrow \sqrt{2 + \ln(1+x)} \geq 2 + 4\ln 3 \geq 2 \Rightarrow h(x) \geq 2$$

b. h est continue et dérivable sur $[2, +\infty[$ et $h'(x) = \frac{2}{(1+x)\sqrt{2+\ln(1+x)}}$.

$$\forall x \in [2, +\infty[\ h'(x) \geq 0$$

$$\forall x \in [2, +\infty[\ 1+x \geq 3. \text{ Donc :}$$

$$\frac{2}{(1+x)\sqrt{2+\ln(1+x)}} \geq \frac{1}{3}. \text{ Par conséquent, on a :}$$

$$0 \leq h'(x) \leq \frac{1}{3}, \quad \forall x \in [2, +\infty[$$

2.a

$$-U_0 = 2 \geq 2$$

Supposons $U_n \geq 2$.

$$\forall h \in [2, +\infty[\quad h(n) \geq 2 \Rightarrow h(n+1) \geq 2$$

$\Rightarrow U_n \geq 2$ pour tout entier naturel n .

$$b. \begin{cases} h \in [2, +\infty[\\ |h'(n)| \leq 2 \end{cases}$$

D'après l'inégalité des accroissements finis entre U_n et U_{n+1} , $|h(n+1) - h(n)| \leq \frac{1}{3} |n+1 - n|$

$h(n) = 3^n$ donc d'après la partie I.3.b :

$$|h(n+1) - h(n)| \leq \frac{1}{3} |n+1 - n|. \text{ Montrons par récurrence que : } \forall n \in \mathbb{N}, |h(n) - 3^n| \leq \frac{1}{3^n}$$

$$\text{On a : } |h(0) - 3^0| = |3 - 2| \leq \frac{1}{3^0} = 1$$

$$\text{Supposons que } |h(n) - 3^n| \leq \frac{1}{3^n}, \forall n \in \mathbb{N}. \text{ Donc : } |h(n+1) - 3^{n+1}| \leq \frac{1}{3} |h(n) - 3^n| \leq \frac{1}{3} \times \frac{1}{3^n} \leq \frac{1}{3^{n+1}}$$

$$\text{Donc } \forall n \in \mathbb{N}, |h(n) - 3^n| \leq \frac{1}{3^n}$$

$$d. \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{3^n} = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} |h(n) - 3^n| = 0$$

$$3. \text{ On cherche } n \text{ tel que : } \frac{1}{3^n} \leq 0,01$$

$$\frac{1}{3^n} \leq 0,01 \Leftrightarrow 3^n \geq 100 \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln 100}{\ln 3}$$

$$\text{Il suffit donc de prendre } n \geq E\left(\frac{\ln 100}{\ln 3}\right) = 5$$

Partie 3

1. g est continue sur $[1, +\infty[$. Donc $G(x)$ existe sur $[1, +\infty[$.

$$2.a \quad \frac{x}{x+1} = \frac{x+1-1}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1} \Rightarrow a = 1 \text{ et } b = -1$$

$$b. \int_1^x \ln(1+t) dt = (x+1) \ln(1+x) - x - 2 \ln 2 + 1$$

$$c. G(x) = \frac{1}{6} x^3 + x - 2(x+1) \ln(x+1) + 4 \ln 2 - \frac{7}{6}$$

$$3.a. \quad A = \left(- \int_1^{\alpha} f(x) dx + \int_{\alpha}^4 f(x) dx \right) \times 4cm^2$$

$$= \frac{95}{6} - 4 \ln 2 - 10 \ln 3 - \frac{1}{3} \alpha^3 - 2\alpha + 4(\alpha + 1) \ln(1 + \alpha)$$

CORRECTION SESSION DE REMPLACEMENT 1999

EXERCICE 1

$$1. h_1 : \begin{cases} x' = 2x - 1 \\ y' = 2y \\ z' = 2z \end{cases} \Rightarrow f : h_1 : \begin{cases} x' = -2x + 3 \\ y' = 2z + 2 \\ z' = 2y + 2 \end{cases}$$

$$M(x, y, z) \text{ invariant} \Leftrightarrow f(M) = M \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -2 \\ z = -2 \end{cases}$$

Donc B (1, -2, -2) invariant par f.

$$2. r = h_2 \circ f \quad \text{ou} \quad h_2 \left(B, \frac{1}{2} \right) \cdot h_2 \begin{cases} x' = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \\ y' = \frac{1}{2}y - 1 \\ z' = \frac{1}{2}z - 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow r = h_2 \circ f : \begin{cases} x' = -x + 2 \\ y' = z \\ z' = y \end{cases}. M(x, y, z) \text{ est invariant par } r \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = z \\ z = z \end{cases}. \text{ Donc l'ensemble des points}$$

invariants est l'ensemble qui a pour système d'équation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 0t + 1 \\ y = 1.t + 0 \\ z = 1.t + 0 \end{cases} \text{ Donc (D) passant par } A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et de vecteur directeur } \vec{u} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- nature de r. Soit $M' \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ image de $M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ par r.

$$\overrightarrow{MM'} \begin{pmatrix} -2x + 2 \\ z - y \\ y - z \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MM'} \cdot \vec{u} = z - y + y - z = 0. \Rightarrow \overrightarrow{MM'} \perp \vec{u}$$

Soit I milieu de $[MM']$; $I \left(1, \frac{y+z}{2}, \frac{y+z}{2} \right)$. $I \in (D)$ car $\overrightarrow{MI} = k\vec{u}$. Ainsi : r est demi tour d'axe $D(A, \vec{u})$

où $A(1, 0, 0)$ et $\vec{u} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

3.a On a : $r = h_2 \circ f = h_2 \circ (h_1 \circ v) = (h_2 \circ h_1) \circ v$. Or : $h_2 \left(B, \frac{1}{2} \right), h_1(A, 2) \Rightarrow h_2 \circ h_1$ est une translation.

$(h_2 \circ h_1)(A) = h_2(A) = A'(1, -1, -1)$ donc le vecteur de la translation est $\overrightarrow{AA'}(0, -1, -1) = \vec{W}$.

Ainsi $r = t_{\vec{W}} \circ v \Leftrightarrow v = t_{-\vec{W}} \circ r$. Par conséquent, v est la composée de r et de la translation de vecteur $-\vec{W}(0, 1, 1) = \vec{u}$ qui est vecteur directeur de D.

EXERCICE 2

1. Soit $M' = s(M)$; $M \in (C)$.

$$M(z) \in (C) : |(1+i)z - 3 + 3i| = 2 \Leftrightarrow |z'| = 2$$

$\Leftrightarrow M \in (C)(O, 2)$. Donc Γ est le cercle de centre O et de rayon 2.

2. $1+i \neq 1 \Rightarrow s$ est une similitude plane directe de centre I(-3, -3) de rapport $k = |1+i| = \sqrt{2}$ et d'angle $\theta = \arg(1+i) = \frac{\pi}{4}(2\pi)$.

3. Coordonnées de P :

$$s(F) = O \Leftrightarrow z_0 = (1 + i)z_F - 3 + 3i$$

$$\Leftrightarrow z_F = -3i$$

- Nature de IFO

I(-3, -3) ; F(0, -3) ; O(0,0) donc $\overrightarrow{IF}(3,0)$ et $\overrightarrow{FO}(0,3)$. $\overrightarrow{IF} \cdot \overrightarrow{FO} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{IF} \perp \overrightarrow{FO}$. $\|\overrightarrow{FO}\| = \|\overrightarrow{IF}\| = 3$. Donc IFO est rectangle isocèle en F.

4. (C) est l'antécédent de Γ par s . Puisque Γ a pour centre O l'antécédent de O qui est F sera le centre de (C). Son rayon r est tel que : $\sqrt{2}r = 2$

$$r = \sqrt{2}$$

Schéma.

EXERCICE 3

$$1. y'' - y = 0 \Leftrightarrow y = k_1 e^x + k_2 e^{-x}, k_1, k_2 \in \mathbb{R}$$

$$f(x) = 2e^x + e^{-x}, \quad f(x) = 2e^x - e^{-x}$$

$$2. M(t) \in (C), \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \begin{pmatrix} 2e^t - e^{-t} \\ 2e^t + e^{-t} \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} 2e^t - e^{-t} = 0 \\ 2e^t + e^{-t} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow e^t = 0 \text{ impossible !!!}$$

Donc $\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \neq 0 \quad \forall M(t) \in (C) \Rightarrow (C)$ admet en tout point une tangente de vecteur directeur $\frac{d\overrightarrow{OM}(t)}{dt}$

$$3.a \quad M(t) \in (C) \Leftrightarrow$$

$$x^2 - y^2 = (2e^t - e^{-t})^2 - (2e^t + e^{-t})^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - y^2 = 8. \text{ Donc } M(t) \in (H). \text{ Ainsi } (C) \text{ est une branche de } (H).$$

b. (H) est l'hyperbole de centre O(0,0) et de sommets $A(2\sqrt{2}, 0)$ et $A'(-2\sqrt{2}, 0)$ et de foyers F(4, 0) et F'(-4, 0). Ses asymptotes sont les droites : $\Delta_1: y = x$ et $\Delta'_1: y = -x$

PROBLEME

Partie A :

$$1. D_f = \mathbb{R}_+^* ; \lim_{x \rightarrow 0^+} f = +\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} f = +\infty$$

f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f'(x) = \frac{x^2-1}{x(x^2+1)}$.

2. $f'(x) - 1 = \frac{-x^3+x^2-x+1}{x(x^2+1)}$. Soit $g(x) = x(x^2+1)(f'(x) - 1)$ et $g'(x) = x(x^2+1)(f'(x) - 1)$

$$g'(x) = -3x^2 + 2x - 1. \Delta' = -2$$

$\Delta' < 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, g'(x) < 0 \Rightarrow g \downarrow$. Ainsi :

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, g(x) \leq g(0) \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, g(x) \leq -1 < 0 < 1$. Ainsi : $\forall x \in \mathbb{R}_+^* f'(x) \leq 1$

- $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f'(x) \leq 1$ et $1 \in D_f$, d'après l'Inégalité des Accroissements Finis, On a :

$f(x) - f(1) \leq (x - 1)$ si $x \geq 1$ et $f(x) - f(1) \geq (x - 1)$ si $x \leq 1$.

$f(1) = 1 \Rightarrow$ si $x \geq 1 \Rightarrow f(x) \leq x$ c'est-à-dire (C) est en dessous de la droite d'équation : $y = x$.

Si $x \leq 1, f(x) \geq x \Rightarrow$ (C) est au dessus de $y = x$.

3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\varphi(x)}{x} = 0$. Donc (C) admet une branche parabolique de direction $(x'x)$.

4. On a : $f(1+t) - f(1) \leq \frac{t^2}{2}$ donc $f(U_n) - 1 \leq \frac{(U_n-1)^2}{2}$. Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}, V_{n+1} \leq \frac{1}{2} V_n^2$

b. Montrons la propriété par récurrence.

- Pour $n = 0$. En effet, $2 \left(\frac{V_1}{2}\right)^{2^0} = 2 \left(\frac{V_1}{2}\right)^1 = V_1$

- Supposons que la propriété est vraie au rang k . On a : $V_{k+1} \leq \frac{1}{2} V_k^2 \leq \frac{1}{2} \left[2 \left(\frac{V_1}{2}\right)^{2^{k-1}} \right]^2$

$$\leq \frac{1}{2} \times 4 \left(\frac{V_1}{2}\right)^{2^k} = 2 \left(\frac{V_1}{2}\right)^{2^{(k+1)-1}}$$

Donc $\forall n \geq 1$, on a $0 \leq V_n \leq 2 \left(\frac{V_1}{2}\right)^{2^{n-1}}$

c. On a : $V_1 \leq \frac{1}{2} V_0^1 \leq \frac{1}{2} (V_0 - 1)^2 \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^3$

Donc $0 \leq V_1 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^3 < 1$. D'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2 \left(\frac{V_1}{2}\right)^{2^{n-1}} = 0$. Par conséquent, $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = 0$. Puisque

$$V_n = U_n - 1 \Rightarrow \lim U_n = 1$$

3.

$$4. \varphi'(t) = f'(1+t) - t = \frac{-t^2(t^2+3t+3)}{t^3+3t^2+4t+2}. \forall t > 0, \varphi'(t) < 0 \text{ donc :}$$

$$\forall t > 0, \varphi(t) \leq \varphi(0) \Rightarrow \varphi \downarrow \text{ c'est-à-dire } \forall t \geq 0, \varphi(1+t). \varphi(1) \geq \frac{t^2}{2}.$$

Partie 2 :

1. Par récurrence sur n :

On a : $u_0 = \frac{3}{2} \geq 1$. Supposons que : $u_k \geq 1$, on a alors $u_{k+1} = f(u_k)$ donc $u_{k+1} \geq 1$ car $f(1) = 1$.

D'où : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 1$.

- Montrons que $(u_n) \downarrow$

2. $\forall x \geq 1, f(x) \leq x$ c'est-à-dire : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \leq u_n$ et $u_n \geq 1$. Donc : $(u_n) \downarrow$

$$3. V_n = U_n - 1$$

$$3.a \ V_{n+1} = f(U_n) - 1. \text{ Posons } U_n = 1 + t$$

$$\Leftrightarrow t = U_n - 1, t \geq 0 \text{ car } U_n \geq 1. \text{ D'après ce qui précède :}$$

$$f(1+t) - f(1) \leq \frac{t^2}{2} \Rightarrow f(U_n) - 1 \leq \frac{(U_n-1)^2}{2}$$

$$\text{Ainsi : } \forall n \in \mathbb{N}, V_{n+1} \leq \frac{1}{2} V_n^2$$

CORRECTION SESSION DE REMPLACEMENT 2000

EXERCICE 1

1. $s_1\left(B, \frac{1}{2}, \frac{\pi}{3}\right)$

a. $s_1(E) = A$ car $\begin{cases} \widehat{(\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{BA})} = \frac{\pi}{3} \\ BA = \frac{1}{2} BE \end{cases}$ b. $s_1^{-1}(J) = D$ car $\begin{cases} \widehat{(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BJ})} = \frac{\pi}{3} \\ BJ = \frac{1}{2} BD \end{cases}$

2. Soit s_2 la similitude de centre J transformant A en F. Soit α son angle et k son rapport. Donc :

$\begin{cases} \widehat{(\overrightarrow{JA}, \overrightarrow{JF})} = -\frac{\pi}{2} \\ k = \frac{JF}{JA} = \sqrt{3} \end{cases}$

3. Soit s la similitude directe transformant E en F et D en J.

a. $\begin{aligned} s_2 \circ s_1(E) &= s_2(s_1(E)) = s_2(H) = F \\ s_2 \circ s_1(D) &= s_2(s_1(D)) = s_2(J) = J = s(D) \end{aligned}$

Théorème : Il existe une et une seule similitude plane directe transformant E en F et D en J. Alors on en déduit que : $s = s_2 \circ s_1$

b. Soit Ω le centre de s. Déterminons son angle et son rapport :

$\begin{cases} \widehat{(\overrightarrow{\Omega E}, \overrightarrow{\Omega F})} = -\frac{\pi}{6} \text{ (} 2\pi \text{)} \\ \frac{\Omega F}{\Omega E} = k = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \theta = \frac{\pi}{3} \times -\frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{6} \end{cases}$

Construction du centre.

- On construit le point E' tel que E soit milieu de [EE'].

- Ω est alors le point tel que E'E Ω soit un triangle équilatéral indirect. Schéma : à faire par l'élève.

EXERCICE 2

1.a. $G \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Preuve : (OG) perpendiculaire au plan (ABC) . Il suffit de prouver alors que (OG) perpendiculaire à (AB) et (OG) perpendiculaire à (AC) . Comment ?

$$\overrightarrow{OG} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Donc : $\overrightarrow{OG} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{AB}$ orthogonal à $\overrightarrow{OG}$. $\overrightarrow{OG} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{AC}$ orthogonal à $\overrightarrow{OG}$.

2. Soit $O' = s_{(ABC)}(O)$. Comme (OG) perpendiculaire à (ABC) et $G \in (ABC)$, alors G milieu de $[OO'] \Rightarrow O(2,2,2)$.

3. Soit $A' = s_{(OG)}(A)$, $B' = s_{(OG)}(B)$, $C' = s_{(OG)}(C)$. On a : $s_{(OG)}(O) = O$;

$$A' = s_{(OG)}(A) \Leftrightarrow G \text{ milieu de } [AA'] \Leftrightarrow A'(-1, 2, 2)$$

$$B' = s_{(OG)}(B) \Leftrightarrow G \text{ milieu de } [BB'] \Leftrightarrow B'(2, -1, 2)$$

$$C' = s_{(OG)}(C) \Leftrightarrow G \text{ milieu de } [CC'] \Leftrightarrow C'(2, 2, -1)$$

EXERCICE 3

1. $\Delta = \{ \cos \theta \} \Rightarrow z_1 = \frac{\sin \theta - i}{\cos \theta}, z_2 = \frac{\sin \theta + i}{\cos \theta}. S = \{ z_1, z_2 \}$

2.a. $M \in \mathbb{C}_2$; Soit $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow x = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}, y = \frac{1}{\cos \theta} \Rightarrow x^2 - y^2 + 1 = 0 \quad M \in (H) : x^2 - y^2 + 1 = 0$

(hyperbole).

b. Dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (H) a pour sommets $B(0,1)$ et $B'(0,-1)$. L'axe focal est $D : y = 0$ et les asymptotes sont $\Delta : y = -x, \Delta' : y = x$.

COURBE à faire. Lorsque θ décrit $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$, $y > 0$ donc $M \in (H)$.

PROBLEME

Partie A :

$$\begin{cases} f_n(x) = \frac{\sin 2(n+1)x}{\sin x}, x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\\ f_n(0) = 2n+2 \end{cases}$$

1. Dans $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ f est continue comme quotient de deux fonctions continues à dénominateurs non nuls.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin 2(n+1)x}{\sin x} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin 2(n+1)x}{2(n+1)x} \times \frac{2(n+1)x}{\sin x} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin 2(n+1)x}{2(n+1)x} \times \frac{2(n+1)}{\frac{\sin x}{x}} = 1 \times 2(n+1) = 2(n+1) = f_n(0) \end{aligned}$$

Donc f_n est continue en 0. D'où f_n est continue sur

$$\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$$

2.a. f_n est continue sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ donc U est bien définie dans $\mathbb{N}$.

b. f_n est le prolongement continu de la fonction : $x \mapsto \frac{\sin 2(n+1)x}{\sin x}$ en 0. On a alors :

$$U_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(x) dx, \forall n \in \mathbb{N}. \text{ Ainsi :}$$

$$\begin{aligned} U_{n+1} - U_n &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2n+3)x dx = \left[\frac{1}{2n+3} \sin(2n+3)x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{2(-1)^{n+1}}{2n+3} \end{aligned}$$

$$3. U_0 = 2 ; U_1 = \frac{4}{3} ; U_2 = \frac{26}{15}.$$

PARTIE B :

1. Preuve :

$$\text{Pour } n = 0, 2 \sum_{k=0}^0 \frac{(-1)^k}{2k+1} = 2 = U_0.$$

Supposons que le résultat est vrai au rang n et vérifions – la au rang n+1.

$$U_{n+1} = U_n + \frac{2(-1)^{n+1}}{2n+3} = 2 \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} + \frac{2(-1)^{n+1}}{2n+3}$$

$$= 2 \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(-1)^k}{2k+1}$$

Donc le resultat est toujours vrai.

2.a. Pour $\int_0^1 dx = 1$; $\int_0^1 x^{2k} dx = \frac{1}{2k+1}, \forall k \in \mathbb{N}$.

b. $n = 0, 2 \int_0^1 \frac{1+(-1)^0 x^2}{1+x^2} dx = 2 = U_0$

Pour tout n ,

$$U_n = 2 \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} = 2 \sum_{k=0}^n (-1)^k \int_0^1 x^{2k} dx = 2 \int_0^1 \sum_{k=0}^n (-x^2)^k dx$$

$$= 2 \int_0^1 \frac{1 - (-x^2)^{n+1}}{1 - (-x^2)} dx = 2 \int_0^1 \frac{1 + (-1)^n x^{2n+2}}{1 + x^2} dx$$

3.a. $\left| U_n - 2 \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \right| = \left| 2 \int_0^1 \frac{(-1)^n x^{2n+2}}{1+x^2} dx \right|$

Donc $\left| U_n - 2 \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \right| \leq 2 \int_0^1 \left| \frac{(-1)^n x^{2n+2}}{1+x^2} \right| dx$

$$\leq 2 \int_0^1 x^{2n+2} dx = \frac{2}{2n+3}$$

b. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{2n+3} = 0 \Rightarrow (U_n) \text{ converge et :}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$$

PARTIE C :

1. G est la composée de deux fonctions dérivables donc G est dérivable et :

$$\forall u \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[, G'(u) = F'(\tan u) = 1$$

$$2. \forall u \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[, G'(u) = 1. \text{ Donc : } \exists c \in \mathbb{R} / \forall u \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[G(u) = u + c$$

Pour $u = 0$ $u = 0 \Rightarrow G(0) = c = F(0) = 0$ Donc $G(u) = u$ pour tout u dans $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$.

$$3. \quad J = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \int_0^1 \psi(x) dx = F(1) - F(0) = F(1) \quad F(1) = F\left(\tan \frac{\pi}{4}\right) = G\left(\frac{\pi}{4}\right). \quad \text{On en déduit :}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \frac{\pi}{2}.$$

KORKA



Né en 1991, Thierno Korka DIALLO est élève ingénieur originaire de la région de Ziguinchor où il fit ses études moyenne et secondaire. Après avoir décroché son Bac en série S1, il est admis à l'Ecole Polytechnique de Thiès. Soucieux de la réussite des élèves, il s'est engagé dans l'élaboration de documents pouvant leur être utiles. Ainsi, son objectif dans cet ouvrage est de briser le mythe dont on entoure à tort les Mathématiques. Il garde encore dans son agenda de nombreux recueils qu'il espère publier dans les années à venir.

Pour plus d'informations, Visitez : <http://document1991.skyrock.com>

A quand la sortie de l'Afrique de sa marginalité sur la scène scientifique mondiale ?

La sortie de l'Afrique de sa marginalité sur la scène scientifique mondiale passe d'abord par l'accès à la culture scientifique qui n'a pas nécessairement pour but de former de futurs scientifiques mais d'aider le plus grand nombre à comprendre le monde et permettre à tous de porter un regard critique sur les enjeux des avancées des sciences (risques, utilisation).

A l'école et plus particulièrement au lycée, l'enseignement scientifique est presque essentiellement une acquisition de savoirs. Pour motiver les élèves à l'apprentissage de ces savoirs souvent complexes, peut-être faudrait-il commencer par former les élèves à une démarche scientifique en les mettant dans une véritable situation de recherche ? Entrer dans une démarche de recherche, c'est apprendre la rigueur, se poser des questions, avoir un regard critique à la fois sur les contenus et les méthodes.

Parallèlement, il faudrait former les enseignants, souvent déstabilisés, quand il s'agit d'aider les élèves en situation de recherche. Il n'est pas nécessaire de connaître la réponse à toutes les questions des élèves, mais il s'agit bien de les aider à trouver eux mêmes les réponses.

L'enseignement scientifique attire et fait peur. La démarche scientifique permet de développer, entre autres, l'esprit critique, la créativité, une attitude citoyenne... En ce sens l'apprentissage de cette démarche n'est-elle pas un moyen de contribuer à la réussite du plus grand nombre.

Le savoir est dans la nature, et, pour le trouver il faut se détacher des mœurs de la société, c'est comme le disait Rémy de Gourmont "Savoir ce que tout le monde sait, c'est ne rien savoir. Le savoir commence là où commence ce que le monde ignore"; bref, il faut être anticonformiste pour être un bon scientifique.

Thierno Korka DIALLO

Du même auteur, découvrez (pour les élèves de S1) ou visiter le site :

