

MATHÉMATIQUES

SÉRIES C & E

EXERCICE 1

Une urne contient 3 boules rouges, 3 boules blanches et 2 boules jaunes, toutes indiscernables au toucher.

- On tire une boule de l'urne une fois et on la remet dans l'urne.
Calculer la probabilité de l'évènement A : « obtenir une boule jaune ».
- On répète n fois ($n \geq 2$) l'épreuve qui consiste à tirer une boule puis à la remettre dans l'urne. Les n tirages se déroulent dans les mêmes conditions et sont indépendants.
Soit k un entier naturel tel que $0 \leq k \leq n$.
Calculer la probabilité de tirer exactement k boules jaunes à l'issue des n tirages.
- On désigne par p_n la probabilité de tirer exactement une boule jaune lors des $n - 1$ premiers tirages et une boule jaune lors du $n - i\text{ème}$ tirage.
 - Calculer p_2, p_3, p_4 .
 - Calculer p_n et montrer que $p_n = \frac{n-1}{9} \left(\frac{3}{4}\right)^n$.
- On définit la suite $(U_n)_{n \geq 2}$ par : $U_n = p_2 + p_3 + p_4 + \dots + p_n$.
 - Etudier la monotonie de la suite $(U_n)_{n \geq 2}$.
 - On admet que pour tout ($n \geq 2$), $U_n \leq 1$; en déduire que la suite $(U_n)_{n \geq 2}$ est convergente (on ne demande pas de calculer ici la limite).
 - Montrer par récurrence que pour tout ($n \geq 2$), $U_n = 1 - \left(1 + \frac{n}{3}\right) \left(\frac{3}{4}\right)^n$.
 - Calculer alors la limite de U_n .
- Dans la division euclidienne de 380 par l'entier naturel n , n non nul, le reste est 8.
Déterminer les valeurs possibles du quotient et du diviseur.
 - Pour quelles valeurs de n , le nombre $4^{2n} + 2^{2n}$ est-il divisible par 5.
 - x est un entier tel que $2x \equiv 1[3]$ et $3x \equiv 4[5]$
 - Montrer que $x = 2 + 3k$ et $x = 3 + 5k'$
 - En déduire la forme de x .

EXERCICE 2

Dans un plan orienté (P) , on considère un triangle ABC , rectangle et isocèle en A tel que $AB = 4$ cm et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2}$.

On désigne par O le milieu de $[BC]$ et E celui de $[AC]$.

Soient r_1 la rotation de centre A et d'angle $\pi/2$ et r_2 la rotation de centre O et d'angle $\pi/2$.

On pose $f = r_1 \circ r_2$.

- Justifier que f est une symétrie centrale.
 - En décomposant r_1 et r_2 en deux symétries orthogonales d'axes convenablement choisis, déterminer le centre de f .
- Soit $D = \text{bary}\{(A; 1), (B; -1)\}$ et $G = \text{bary}\{(B; 1 - \sqrt{2}), (A; -\sqrt{2})\}$.
 - Déterminer les points D et G.
 - Déterminer et construire l'ensemble (Γ) des M du plan (P) vérifiant $MA^2 - MB^2 - MC^2 = -12$

3. Soit $\tilde{S}$ la similitude plane indirecte qui laisse invariant le point B et transforme A en C. Notons par F le centre de [CG].
- Vérifier qu'il existe une homothétie h de centre B et transforme A en G dont on précisera le rapport.
 - En déduire les éléments caractéristiques de $\tilde{S}$.
4. On note par :
- (ζ) le cercle de centre C et de rayon 2.
 - I le point d'intersection de (ζ) et (Γ) dont I se trouve à l'extérieur du carré ABCD.
- Montrer que I est le centre de la similitude plane directe S, de rapport $\sqrt{3}$, d'angle $\pi/2$ et qui transforme C en D.

PROBLEME

PARTIE A

Soit g la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $g(x) = x - \ln(x+1)$.

- Montrer que pour tout $x \geq 0$, on a : $g'(x) = \frac{x}{x+1}$.
- Dresser le tableau de variation de g sur $[0, +\infty[$.
- En déduire que pour tout $x \in [0, +\infty[$, $g(x) \geq 0$.

PARTIE B

On considère l'équation différentielle (E) : $y' - y = \frac{x}{x+1}e^x$.

- Résoudre l'équation différentielle homogène associée (E0) : $y' - y = 0$.
- Montrer que la fonction h définie sur $[0, +\infty[$ par $h(x) = (x - \ln(x+1))e^x$ est une solution particulière de l'équation (E).
- En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) sur $[0, +\infty[$.
- Déterminer la solution unique f de (E) dont la courbe représentative passe par l'origine du repère.

PARTIE C

Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = (x - \ln(x+1))e^x$.

On note (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé ($O, \vec{i}, \vec{j}$) (Unité graphique : 2 cm).

- Montrer que pour tout $x \in [0, +\infty[$, $f'(x) = \left(\frac{x}{x+1} + g(x)\right)e^x$.
- Déterminer la limite de f(x) quand x tend vers $+\infty$, puis dresser le tableau de variation de f.
- Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ et interpréter graphiquement ce résultat pour la courbe (C_f).
- Montrer que f réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.
- Tracer la courbe (C_f) (On prendra $\ln 2 \approx 0,69$ et $e \approx 2,71$).
- On pose : $I = \int_0^1 \ln(x+1) dx$.
 - A l'aide d'une intégration par parties, calculer la valeur de l'intégrale I.
 - Calculer l'aire, en unité d'aire, de la partie du plan limitée par la courbe de la fonction $x \rightarrow f(x)e^{-x}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.