

Les examens du baccalauréat
Section Mathématiques

2006 - 2021

MATHÉMATIQUES

LES NOMBRES COMPLEXES

SIGMAMATHS

... — ...
LES ANNALES DU BAC
... — ...

Dhaouadi Nejib

1. Bac 2021 session de contrôle

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

1) a/ Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 + z + \frac{1}{3} = 0$.

On note z_1 et z_2 les solutions avec $\text{Im}(z_1) > 0$.

b/ Ecrire z_1 sous forme exponentielle.

Dans la figure 2 de l'annexe jointe, A et B sont les points d'affixes respectives 1 et $e^{i\frac{\pi}{6}}$.
 Δ est la droite d'équation $x = -\frac{1}{2}$.

2) La droite Δ coupe la droite (OB) au point C.

Montrer que l'affixe du point C est égale à z_1 .

3) Soit D le point d'affixe $\frac{1}{3\sqrt{3}}i$.

a/ Vérifier que $z_D = z_1^3$.

b/ Montrer que $\frac{z_D - 1}{z_1 - 1} = \frac{2}{3}$.

c/ Construire le point D.

4) Soit $z \in \mathbb{C}$.

Montrer que $(z^2 + z \in \mathbb{R})$ équivaut à $(z \in \mathbb{R} \text{ ou } \text{Re}(z) = -\frac{1}{2})$.

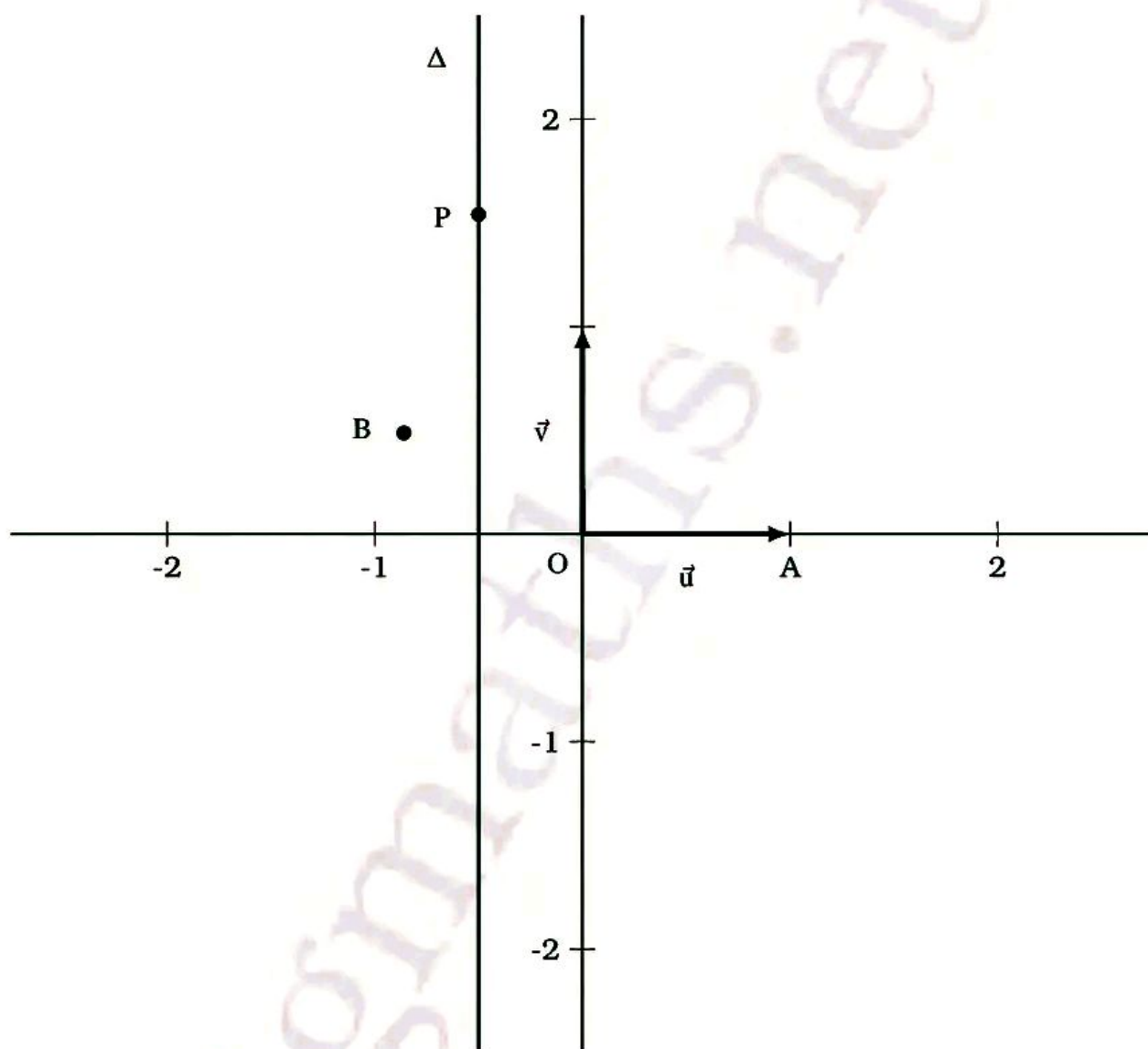
5) Pour $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$, On désigne par M et N les points d'affixes respectives z et z^3 .

a/ Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que les vecteurs $\vec{AM}$ et $\vec{AN}$ sont colinéaires.

b/ Dans la figure 2 de l'annexe, on a placé un point P de la droite Δ d'affixe a .

Construire, en justifiant, le point Q d'affixe a^3 .

Annexe : Figure 2



2. Bac 2020 session principale

On munit le plan complexe d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Dans la figure 1 de l'annexe, (Γ) est le cercle de centre O et de rayon $\sqrt{2}$, A , B et C sont les points d'affixes respectives 1 , $i\sqrt{2}$ et $-i\sqrt{2}$.

Soit Q un point du cercle (Γ) d'affixe un nombre complexe a , distinct de $i\sqrt{2}$ et $-i\sqrt{2}$.

1) On désigne par R le point d'affixe $a + \bar{a}$.

a) Vérifier que $R \in (O, \vec{u})$. Construire R .

b) Déterminer les nombres complexes a pour lesquels O , R et Q sont alignés.

2) Soit P le point du plan d'affixe ia et M un point d'affixe z non nul.

a) Justifier que P est l'image de Q par une rotation que l'on précisera. Construire P .

b) Montrer que A , P et M sont alignés $\iff (i\bar{a} + 1)z - (ia - 1)\bar{z} = i(a + \bar{a})$.

c) Soit H le projeté orthogonal de O sur (AP) . On désigne par Z_H l'affixe du point H .

$$\text{Justifier que } Z_H = \frac{i(a + \bar{a})}{2(i\bar{a} + 1)}.$$

3) Soit N le point d'affixe $Z_N = \frac{a + \bar{a}}{i\bar{a} + 1}$.

a) Vérifier que N est l'image de H par une similitude que l'on déterminera.

b) Construire le point N .

c) Déterminer l'ensemble sur lequel varie le point N lorsque Q varie sur le cercle (Γ) privé des points B et C .

3. Bac 2018 session principale

Soit θ un réel non nul.

Dans la figure 1 de l'annexe jointe,

- $(O, \vec{u}, \vec{v})$ est un repère orthonormé direct ;
- $\mathcal{C}$ est un cercle de centre O et de rayon 1 ;
- E est un point de $\mathcal{C}$ tel que $(\vec{u}, \vec{OE}) \equiv \theta [2\pi]$;
- F et G sont les points d'affixes respectives -1 et $1 + \sqrt{2}$;
- Γ est le demi-cercle de diamètre $[FG]$;
- D est le point d'intersection de Γ et de l'axe $(O, \vec{v})$.

1) a) Vérifier que $OD^2 = 1 + \sqrt{2}$.

b) Soit A le point d'affixe $z_A = i\sqrt{1 + \sqrt{2}}e^{i\theta}$. Vérifier que $z_A = OD e^{i(\theta + \frac{\pi}{2})}$. Construire alors le point A .

2) On considère, dans $\mathbb{C}$, l'équation (E) : $z^2 + \frac{\sqrt{2}}{i\sqrt{1 + \sqrt{2}}}e^{i\theta}z + e^{2i\theta} = 0$.

a) Vérifier que z_A est une solution de l'équation (E).

b) On désigne par B le point d'affixe z_B , où z_B est la deuxième solution de (E). Déterminer z_B .

3) a) Montrer que les points O , A et B sont alignés.

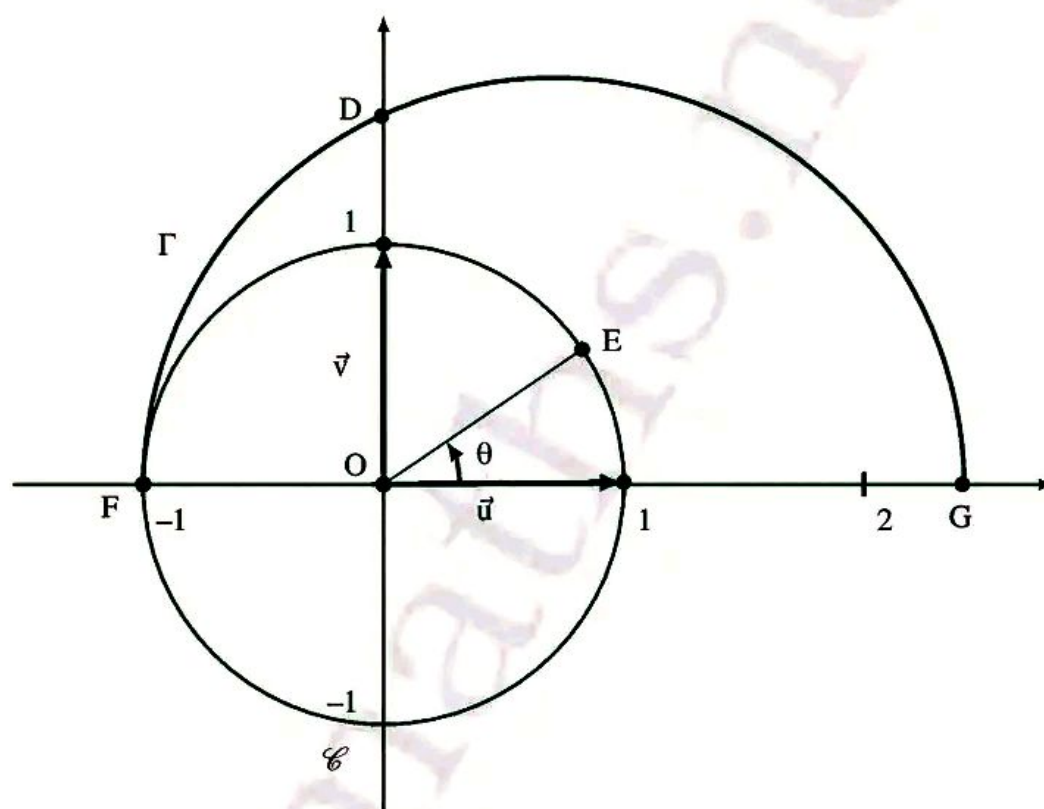
b) Placer le point C d'affixe $z_C = OD e^{i\theta}$.

c) Montrer que $\frac{\text{Aff}(\vec{AC})}{\text{Aff}(\vec{AB})} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)$.

En déduire que le triangle ABC est isocèle et que $(\vec{AB}, \vec{AC}) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$.

d) Construire alors le point B .

Annexe : figure 1



4. Bac 2018 session de contrôle

1) On considère, dans $\mathbb{C}$, l'équation (E) : $z^2 - (1+i)z - i = 0$.

Résoudre l'équation (E). On note z_1 et z_2 les solutions de (E).

2) Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on désigne par A, B, M_1 et M_2 les points d'afixes respectives 1, i, z_1 et z_2 .

Soit z un nombre complexe distinct de 1, i, z_1 et z_2 .

On note M et M' les points d'afixes respectives z et $z' = \frac{z+i}{z-i}$.

Justifier que les points M et M' sont distincts.

Dans la suite de l'exercice on prend $z = i + 2e^{i\theta}$, où θ est un réel.

3) a) Montrer que M décrit le cercle Γ de centre B et de rayon 2.

b) Montrer que $z' = 1 + ie^{-i\theta}$.

c) Montrer que $AM' = 1$ et que $(\vec{u}, \widehat{AM'}) \equiv \frac{\pi}{2} - \theta [2\pi]$.

d) Déterminer l'ensemble des points M' lorsque le point M décrit le cercle Γ .

4) Soit P le milieu du segment $[MM']$ et z_P son affixe.

On désigne par Q le point d'affixe $z_Q = e^{i\frac{\pi}{4}} z_P$.

a) Vérifier que $z_P = \frac{1+i+2e^{i\theta}+ie^{-i\theta}}{2}$.

b) En déduire que $z_Q = \frac{i\sqrt{2} + 2e^{i(\theta+\frac{\pi}{4})} - e^{-i(\frac{\pi}{4}+\theta)}}{2}$.

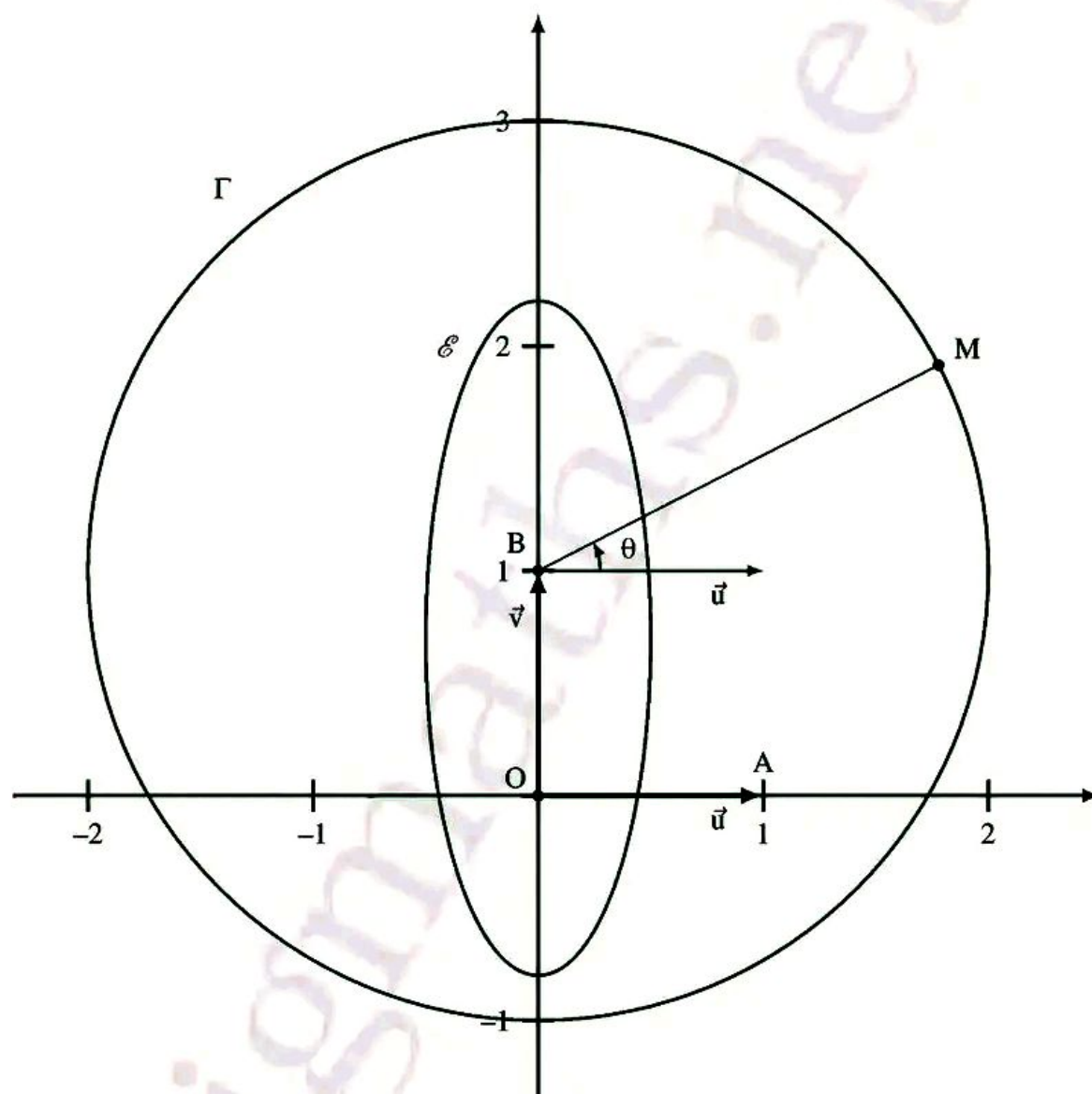
c) Montrer alors que $z_Q = \frac{1}{2} \cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) + i \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{3}{2} \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) \right)$.

5) a) Montrer que lorsque le point M varie sur le cercle Γ , le point Q varie sur l'ellipse $\mathcal{E}$

d'équation : $4x^2 + \frac{4}{9} \left(y - \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 = 1$.

b) Dans la figure 3 de l'annexe jointe, on a tracé dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$ le cercle Γ , l'ellipse $\mathcal{E}$, et on a placé un point M sur le cercle Γ tel que $(\vec{u}, \widehat{BM}) \equiv \theta [2\pi]$. Construire les points M' et Q.

Annexe : figure 3



5. Bac 2017 session de contrôle

Soit dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2 - \left(\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z + 1 = 0$.

1) a) Justifier que l'équation (E) possède deux solutions distinctes. (On ne demande pas de déterminer ces solutions)

b) Déterminer $z_1 + z_2$. En déduire que les solutions de (E) ne sont pas conjuguées.
On désigne par z_1 la solution telle que $|z_1| > 1$ et z_2 l'autre solution.

On considère, dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, les points A, B, I et J d'affixes respectives $z_1, z_2, 1$ et -1 .

2) a) Soit C le milieu du segment [AB]. Montrer que l'affixe du point C est $z_C = \frac{\sqrt{3}}{2}e^{i\frac{\pi}{6}}$.

b) En utilisant $(z_2 - z_1)^2 = (z_2 + z_1)^2 - 4z_1z_2$, montrer que $(z_2 - z_1)^2 = 4(z_1^2 - 1)$.

c) Montrer que $(\widehat{AB, CI}) + (\widehat{AB, CJ}) \equiv 0 [2\pi]$.

En déduire que la droite (AB) porte la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{ICJ}$.

3) Soit (C) le cercle circonscrit au triangle IAJ. On note K le centre de (C) et z_K l'affixe du point K.

a) Prouver que K est un point de l'axe $(O, \vec{v})$. On pose $z_K = iy$ où y est un réel non nul.

b) Soit M un point du plan d'affixe z . Justifier que $(M \in (C))$ équivaut à $(|z - iy|^2 = |1 - iy|^2)$.
En déduire que $(M \in (C))$ équivaut à $(z\bar{z} + iy(z - \bar{z}) = 1)$.

c) En remarquant que $z_1 = \frac{1}{z_2}$, montrer que le point B appartient au cercle (C).

4) a) Construire le point C dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

b) Construire la droite (AB) et la médiatrice du segment [AB].

c) Déduire une construction des points A et B, images des solutions de l'équation (E).

6. Bac 2016 session principale

On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2 - (1 + 2i)mz - (1 - i)m^2 = 0$, où m est un nombre complexe non nul, d'argument $\theta \in]0, \pi[$.

1) a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

On note z_1 et z_2 les solutions de l'équation (E).

b) Montrer que $(z_1 z_2 \text{ est un réel strictement positif})$ si et seulement si $\left(\theta = \frac{5\pi}{8}\right)$.

Dans la suite de l'exercice on prend $\theta = \frac{5\pi}{8}$.

2) Vérifier que $z_1 z_2 = |m|^2 \sqrt{2}$.

3) Soit t un réel strictement positif et $m = \frac{\sqrt{t}}{\sqrt[4]{2}} e^{i\frac{5\pi}{8}}$. On se propose de construire les points M_1 et M_2 , images des solutions z_1 et z_2 de l'équation (E), correspondant au nombre complexe m .

Dans la figure 2 de l'annexe jointe, $(O, \vec{u}, \vec{v})$ est un repère orthonormé direct ;

B et C sont les points d'affixes respectives $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ et t ;

E est le point d'intersection du demi-cercle $\mathcal{C}$ de diamètre [BC] avec l'axe $(O, \vec{v})$.

a) Montrer que $OE^2 = OB \cdot OC$.

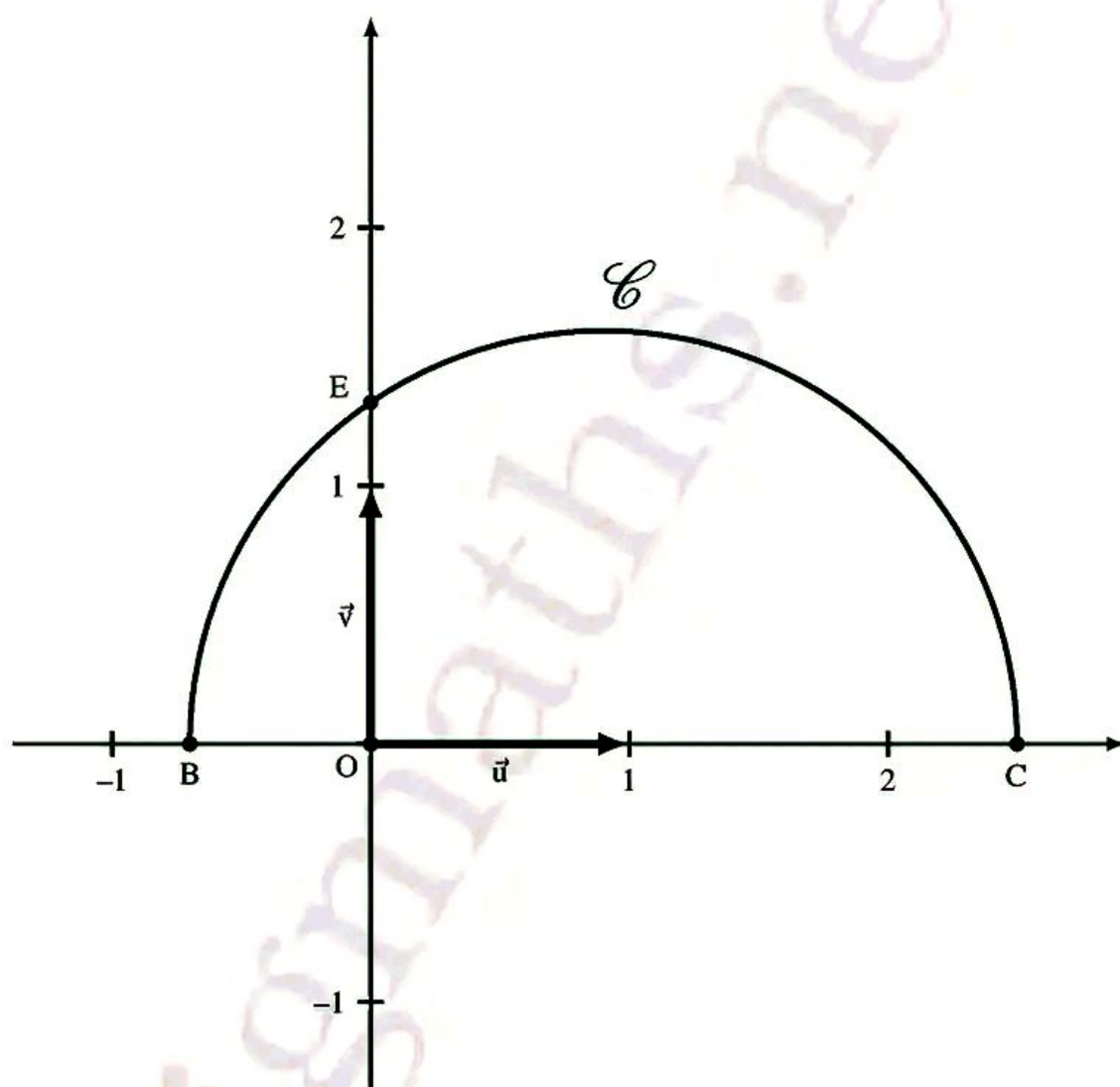
b) En déduire que $|m| = OE$.

4) a) Construire le point A d'affixe m .

b) En déduire une construction des points M_1 et M_2 images des solutions z_1 et z_2 de l'équation (E).

(On convient que $|z_1| < |z_2|$).

Annexe : figure 2



7. Bac 2015 session principale

- 1) a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2 - 2z + 4 = 0$.
b) Déterminer une écriture exponentielle de chacune des solutions de (E).
- 2) Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère le cercle (Γ) de centre O et de rayon 2 et le point A d'affixe 2.
Placer les points B et C d'affixes respectives $2e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $2e^{-i\frac{\pi}{3}}$.
- 3) Soit $\theta \in]-\pi, \pi[$ et M le point du cercle (Γ) d'affixe $2e^{i\theta}$.
On désigne par N le point de (Γ) tel que $(\vec{OM}, \vec{ON}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$.
Justifier que N a pour affixe $2e^{i(\theta + \frac{\pi}{3})}$.
- 4) Soit r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$.
a) Vérifier que la rotation r a pour expression complexe : $z' = e^{i\frac{\pi}{3}}z + 2 - 2e^{i\frac{\pi}{3}}$.
b) Soit F et K les milieux respectifs des segments [BM] et [CN]. Montrer que $r(F)=K$.
c) En déduire la nature du triangle AFK.
- 5) a) Montrer que $AF^2 = 4 - 2\sqrt{3} \cos\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right)$.
b) En déduire l'affixe du point M pour laquelle AF est maximale et construire le triangle AFK correspondant.

8. Bac 2013 session principale

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points E et F d'affixes respectives 1 et i .

On désigne par C_1 et C_2 les cercles de centres respectifs E et F et de même rayon 1.

Soit θ un réel de l'intervalle $[0, 2\pi[$, M le point d'affixe $1 + e^{i\theta}$ et N le point d'affixe $i(1 + e^{i\theta})$.

- 1) a) Calculer $\text{Aff}(\vec{EM})$ et $\text{Aff}(\vec{FN})$.
b) Montrer que, lorsque θ varie dans $[0, 2\pi[$, M varie sur C_1 et N varie sur C_2 .
c) Montrer que les droites (EM) et (FN) sont perpendiculaires.
- 2) Soit P le point d'affixe z_P telle que $z_P = (1 - i) \sin \theta \cdot e^{i\theta}$.
 - a) Montrer que $\frac{\text{Aff}(\vec{EP})}{\text{Aff}(\vec{EM})} = \sin \theta \cdot \cos \theta$ et calculer $\frac{\text{Aff}(\vec{FP})}{\text{Aff}(\vec{FN})}$.
 - b) Montrer que P est le point d'intersection des droites (EM) et (FN).

9. Bac 2012 session de contrôle

Soit a un réel strictement positif.

- 1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - (1 + i)az + ia^2 = 0$.
- 2) Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
On désigne par A et B les points d'affixes respectives a et ia .
 - a) Quelle est la nature du triangle OAB ?
 - b) Déterminer l'affixe du point C tel que $OACB$ soit un carré.
- 3) Soient P et Q les points du plan tels que les triangles OAP et AQC sont équilatéraux de sens direct.
 - a) Montrer que l'affixe de P est égale à $\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a$.
 - b) Calculer l'affixe du point Q .
 - c) Montrer que les points B , P et Q sont alignés.

10. Bac 2011 session principale

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère le point A d'affixe (-1) et les points M, N et P d'affixes respectives z , z^2 et z^3 où z est un nombre complexe non nul différent de (-1) et 1 .

1) a) Montrer que :

(Le triangle MNP est rectangle en P) **si et seulement si** $\left(\frac{1+z}{z} \right)$ est imaginaire pur.

b) On pose $z = x + iy$ où x et y sont des réels. Montrer que $\frac{1+z}{z} = \frac{x^2 + y^2 + x - iy}{x^2 + y^2}$.

c) En déduire que l'ensemble des points M tels que le triangle MNP soit un triangle rectangle en P est le cercle (Γ) de diamètre $[OA]$, privé des points O et A.

2) Dans la **figure 2** de l'annexe ci-jointe, on a tracé le cercle (Γ) et on a placé un point M d'affixe z sur (Γ) et son projeté orthogonal H sur l'axe $(O, \vec{u})$.

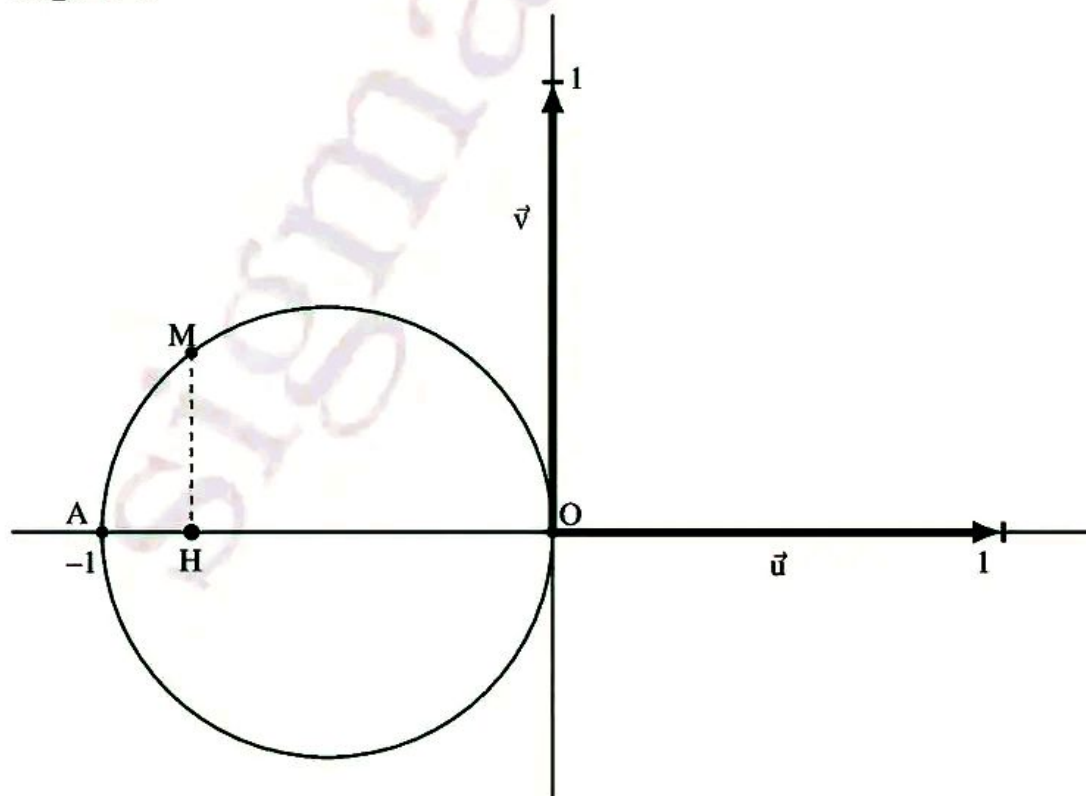
On se propose de construire les points N et P d'affixe respectives z^2 et z^3 tels que le triangle MNP soit rectangle en P.

a) Montrer que $(\widehat{OM}, \widehat{ON}) \equiv (\widehat{u}, \widehat{OM}) [2\pi]$ puis que $(\widehat{ON}, \widehat{OP}) \equiv (\widehat{u}, \widehat{OM}) [2\pi]$.

b) Montrer que $OH = OM^2$.

c) Donner un procédé de construction des points N et P puis les construire.

Annexe : figure 2



11. Bac 2010 session principale

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On note A le point d'affixe -2 .

On considère l'équation (E) : $3z^3 - 2z^2 + 4z + 16 = 0$.

Soit $\alpha \in \mathbb{C}^*$ et M, N et P les points d'affixes respectives α , $\frac{3}{2}\alpha^2$ et $\frac{8}{\alpha}$.

1) Montrer que si $\alpha \in \mathbb{R}^*$ alors les points M, N et P sont alignés.

Dans la suite de l'exercice on suppose que α n'appartient pas à $\mathbb{R}$.

2) Montrer que si MNAP est un parallélogramme, alors α est une solution de l'équation (E).

3) Dans cette question on prend $\alpha = 1 + i\sqrt{3}$.

a) Donner l'écriture exponentielle de chacun des nombres complexes α , $\frac{3}{2}\alpha^2$ et $\frac{8}{\alpha}$.

Placer dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$ les points A, M, N et P.

b) Donner l'écriture algébrique de chacun des nombres complexes $\frac{3}{2}\alpha^2$ et $\frac{8}{\alpha}$.

Montrer que le quadrilatère MNAP est un parallélogramme.

4) a) Montrer que si α est une solution de (E) alors $\bar{\alpha}$ est une solution de (E).

b) En déduire les affixes des points M pour lesquels MNAP est un parallélogramme.

8. Bac 2013 session principale

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points E et F d'affixes respectives 1 et i .

On désigne par C_1 et C_2 les cercles de centres respectifs E et F et de même rayon 1.

Soit θ un réel de l'intervalle $[0, 2\pi[$, M le point d'affixe $1 + e^{i\theta}$ et N le point d'affixe $i(1 + e^{i\theta})$.

- 1) a) Calculer $\text{Aff}(\vec{EM})$ et $\text{Aff}(\vec{FN})$.
b) Montrer que, lorsque θ varie dans $[0, 2\pi[$, M varie sur C_1 et N varie sur C_2 .
c) Montrer que les droites (EM) et (FN) sont perpendiculaires.
- 2) Soit P le point d'affixe z_P telle que $z_P = (1 - i) \sin \theta \cdot e^{i\theta}$.
 - a) Montrer que $\frac{\text{Aff}(\vec{EP})}{\text{Aff}(\vec{EM})} = \sin \theta \cdot \cos \theta$ et calculer $\frac{\text{Aff}(\vec{FP})}{\text{Aff}(\vec{FN})}$.
 - b) Montrer que P est le point d'intersection des droites (EM) et (FN).

9. Bac 2012 session de contrôle

Soit a un réel strictement positif.

- 1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - (1 + i)az + ia^2 = 0$.
- 2) Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
On désigne par A et B les points d'affixes respectives a et ia .
 - a) Quelle est la nature du triangle OAB ?
 - b) Déterminer l'affixe du point C tel que $OACB$ soit un carré.
- 3) Soient P et Q les points du plan tels que les triangles OAP et AQC sont équilatéraux de sens direct.
 - a) Montrer que l'affixe de P est égale à $\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a$.
 - b) Calculer l'affixe du point Q .
 - c) Montrer que les points B , P et Q sont alignés.

10. Bac 2011 session principale

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère le point A d'affixe (-1) et les points M, N et P d'affixes respectives z , z^2 et z^3 où z est un nombre complexe non nul différent de (-1) et 1 .

1) a) Montrer que :

(Le triangle MNP est rectangle en P) **si et seulement si** $\left(\frac{1+z}{z} \right)$ est imaginaire pur.

b) On pose $z = x + iy$ où x et y sont des réels. Montrer que $\frac{1+z}{z} = \frac{x^2 + y^2 + x - iy}{x^2 + y^2}$.

c) En déduire que l'ensemble des points M tels que le triangle MNP soit un triangle rectangle en P est le cercle (Γ) de diamètre $[OA]$, privé des points O et A.

2) Dans la **figure 2** de l'annexe ci-jointe, on a tracé le cercle (Γ) et on a placé un point M d'affixe z sur (Γ) et son projeté orthogonal H sur l'axe $(O, \vec{u})$.

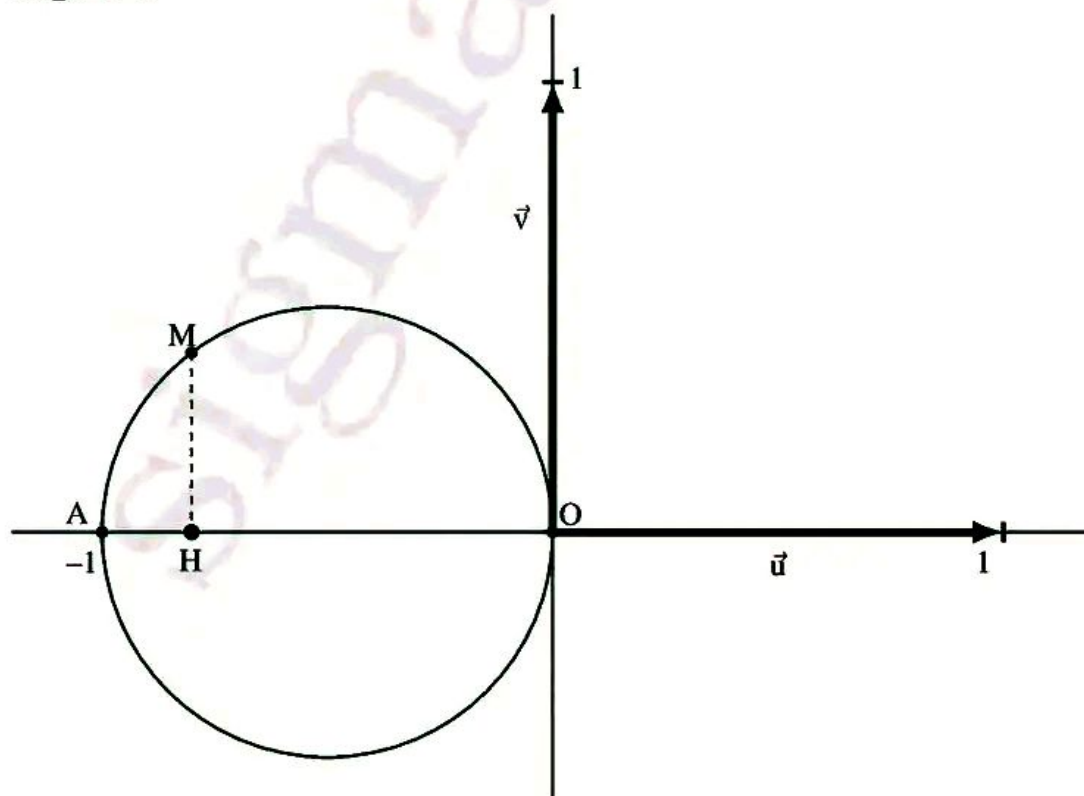
On se propose de construire les points N et P d'affixe respectives z^2 et z^3 tels que le triangle MNP soit rectangle en P.

a) Montrer que $(\widehat{OM}, \widehat{ON}) \equiv (\widehat{u}, \widehat{OM}) [2\pi]$ puis que $(\widehat{ON}, \widehat{OP}) \equiv (\widehat{u}, \widehat{OM}) [2\pi]$.

b) Montrer que $OH = OM^2$.

c) Donner un procédé de construction des points N et P puis les construire.

Annexe : figure 2



11. Bac 2010 session principale

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On note A le point d'affixe -2 .

On considère l'équation (E) : $3z^3 - 2z^2 + 4z + 16 = 0$.

Soit $\alpha \in \mathbb{C}^*$ et M, N et P les points d'affixes respectives α , $\frac{3}{2}\alpha^2$ et $\frac{8}{\alpha}$.

1) Montrer que si $\alpha \in \mathbb{R}^*$ alors les points M, N et P sont alignés.

Dans la suite de l'exercice on suppose que α n'appartient pas à $\mathbb{R}$.

2) Montrer que si MNAP est un parallélogramme, alors α est une solution de l'équation (E).

3) Dans cette question on prend $\alpha = 1 + i\sqrt{3}$.

a) Donner l'écriture exponentielle de chacun des nombres complexes α , $\frac{3}{2}\alpha^2$ et $\frac{8}{\alpha}$.

Placer dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$ les points A, M, N et P.

b) Donner l'écriture algébrique de chacun des nombres complexes $\frac{3}{2}\alpha^2$ et $\frac{8}{\alpha}$.

Montrer que le quadrilatère MNAP est un parallélogramme.

4) a) Montrer que si α est une solution de (E) alors $\bar{\alpha}$ est une solution de (E).

b) En déduire les affixes des points M pour lesquels MNAP est un parallélogramme.

12. Bac 2008 session de contrôle

Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, on considère l'équation

$$(E) : z^3 + (5 + i)z^2 + (10 + 2i)z + 8 = 0.$$

- 1) a) Montrer que l'équation (E) admet une solution réelle que l'on déterminera.
b) Résoudre l'équation (E).
- 2) Dans le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère l'application f qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = (1 + i)z$.
 - a) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f .
 - b) Soit M un point du plan distinct de O et soit M' son image par f .
Montrer que le triangle OMM' est rectangle isocèle et en déduire un procédé de construction du point M' .
- 3) On considère les points A_n définis par :
 A_0 le point d'affixe $(-1+i)$ et pour tout entier naturel n , $A_{n+1} = f(A_n)$.
 - a) Placer les points A_0, A_1, A_2, A_3 et A_4 .
 - b) Pour quelles valeurs de n , les points O, A_0 et A_n sont-ils alignés?

13. Bac 2007 session principale

1) Soit θ un réel de l'intervalle $]0, \pi[$.

Résoudre l'équation : $z^2 - 2iz - 1 - e^{2i\theta} = 0$.

2) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, M et N d'affixes respectives $-1 + i$, $i + e^{i\theta}$ et $i - e^{i\theta}$ où θ est un réel de $]0, \pi[$.

a – Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AN}$ sont orthogonaux.

b – Montrer que lorsque θ varie dans $]0, \pi[$ les points M et N varient sur un cercle $\mathcal{C}$ que l'on déterminera.

3) a – Déterminer en fonction de θ l'aire $\mathcal{A}(\theta)$ du triangle AMN.

b – Déterminer la valeur de θ pour laquelle l'aire $\mathcal{A}(\theta)$ est maximale et placer dans ce cas les points M et N sur le cercle $\mathcal{C}$.

14. Bac 2006 session principale

θ étant un réel de l'intervalle $[0, 2\pi[$; on pose pour tout nombre complexe z

$$f_{\theta}(z) = z^2 - (i + e^{i\theta})z + (1 + i)(-1 + e^{i\theta})$$

1) a – Vérifier que $f_{\theta}(1 + i) = 0$.

b – En déduire les solutions z' et z'' dans $\mathbb{C}$ de l'équation $f_{\theta}(z) = 0$.

2) Dans le plan complexe, rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ on considère les points A, B et M d'affixes respectives -1 , $i\sqrt{3}$ et $-1 + e^{i\theta}$.

[a – Montrer que lorsque θ varie dans $[0, 2\pi[$, M varie sur un cercle $(\mathcal{C})$ de centre A dont on précisera le rayon.

[b – Déterminer les valeurs de θ pour lesquelles la droite (BM) est tangente au cercle $(\mathcal{C})$.