

RÉPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION EXAMEN DU BACCALAURÉAT SESSION 2020	Session principale	
	Épreuve : Mathématiques	Section : Mathématiques
	Durée : 4h	Coefficient de l'épreuve : 4

§ § § § §

Le sujet comporte 5 pages numérotées de 1/5 à 5/5.

La page 5/5 est à rendre avec la copie.

Exercice 1 : (5 points)

Le plan est orienté.

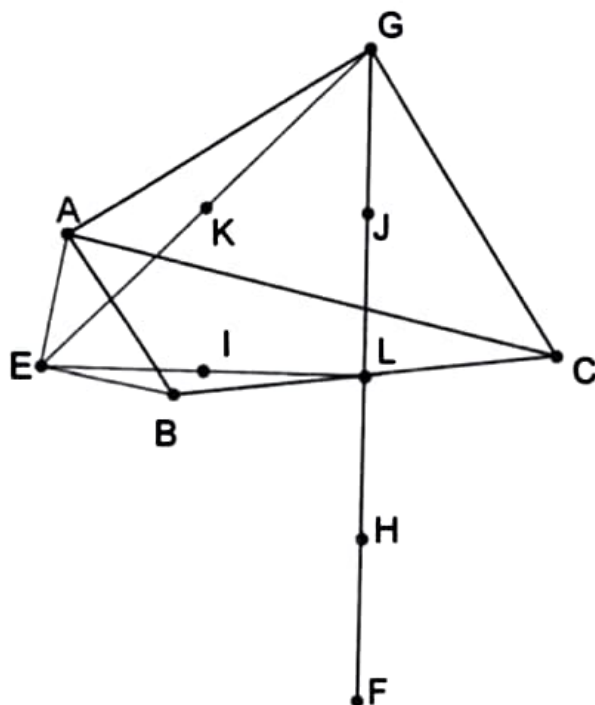
Dans la figure ci-contre, ABC est un triangle direct, non rectangle et non isocèle.

GAC et EBA sont des triangles directs, rectangles et isocèles respectivement en G et en E.

L, K, I et J sont les milieux respectifs des côtés [BC], [GE], [EL] et [GL]. F et H sont les symétriques respectifs de G et J par rapport à L.

On note r_1 et r_2 les rotations de même angle $\frac{\pi}{2}$

et de centres respectifs G et E. S_L désigne la symétrie centrale de centre L.



1) a) Déterminer $r_2 \circ S_L \circ r_1(A)$.

Caractériser $r_2 \circ S_L \circ r_1$.

b) En déduire que le triangle EFG est rectangle, isocèle.

c) Justifier que le quadrilatère LJKI est un carré.

2) Soit φ la symétrie glissante de vecteur $\overrightarrow{LK}$ et d'axe Δ passant par I.

On pose $g = \varphi \circ S_{(LE)}$, où $S_{(LE)}$ est la symétrie orthogonale d'axe (LE).

a) Montrer que $\Delta = (IH)$.

b) Montrer que $g(J) = I$ et $g(L) = E$.

c) Prouver que g est la rotation de centre K et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

3) Soit f l'antidéplacement qui envoie J en I et L en E.

a) Justifier que f est une symétrie glissante.

b) Donner les éléments caractéristiques de f .

4) Soit M un point du plan. Soient M' et M'' les images de M respectivement par f et g .

Montrer que M' et M'' sont symétriques par rapport à une droite fixe que l'on précisera.

Exercice 2 : (4 points)

On munit le plan complexe d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Dans la figure 1 de l'annexe, (Γ) est le cercle de centre O et de rayon $\sqrt{2}$, A, B et C sont les points d'affixes respectives 1, $i\sqrt{2}$ et $-i\sqrt{2}$.

Soit Q un point du cercle (Γ) d'affixe un nombre complexe a , distinct de $i\sqrt{2}$ et $-i\sqrt{2}$.

1) On désigne par R le point d'affixe $a + \bar{a}$.

a) Vérifier que $R \in (O, \vec{u})$. Construire R.

b) Déterminer les nombres complexes a pour lesquels O, R et Q sont alignés.

2) Soit P le point du plan d'affixe ia et M un point d'affixe z non nul.

a) Justifier que P est l'image de Q par une rotation que l'on précisera. Construire P.

b) Montrer que A, P et M sont alignés $\Leftrightarrow (i\bar{a} + 1)z + (ia - 1)\bar{z} = i(a + \bar{a})$.

c) Montrer que $(AP) \perp (OM) \Leftrightarrow (i\bar{a} + 1)z - (ia - 1)\bar{z} = 0$.

d) Soit H le projeté orthogonal de O sur (AP). On désigne par Z_H l'affixe du point H.

$$\text{Justifier que } Z_H = \frac{i(a + \bar{a})}{2(i\bar{a} + 1)}.$$

3) Soit N le point d'affixe $Z_N = \frac{(a + \bar{a})}{(i\bar{a} + 1)}$.

a) Vérifier que N est l'image de H par une similitude que l'on déterminera.

b) Construire le point N.

c) Déterminer l'ensemble sur lequel varie le point N lorsque Q varie sur le cercle (Γ) privé des points B et C.

Exercice 3 : (4 points)

On considère la suite (a_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $a_n = 2 \times 5^n + 7$.

1) a) Justifier que pour tout entier naturel n , a_n est impair.

b) Déterminer suivant les valeurs de n , le reste modulo 8 de 5^n .

c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \equiv 1 \pmod{8}$.

2) a) Montrer que si $\begin{cases} x \equiv 1 \pmod{8} \\ x \equiv 7 \pmod{125} \end{cases}$ alors $x \equiv 257 \pmod{1000}$.

b) Montrer que pour tout $n \geq 3$, $a_n \equiv 257 \pmod{1000}$.

c) Quels sont les trois derniers chiffres de $(2 \times 5^{2020} + 7)(2 \times 5^{2021} + 7)$?

3) a) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $5a_{2n} - a_{2n+1} = 28$.

b) Soit d le PGCD de a_{2n} et a_{2n+1} . Montrer que d est différent de 7.

c) Trouver alors d .

Exercice 4 : (7 points)

I. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+e^{2x}}}$.

On désigne par (ζ) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan P .

1) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout réel x , $f'(x) = \frac{-e^{2x}}{(1+e^{2x})\sqrt{1+e^{2x}}}$.

2) a) Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$. Interpréter graphiquement les résultats obtenus.

b) Vérifier que pour tout réel x , $0 < f(x) < 1$.

3) a) Dresser le tableau de variation de f .

b) Montrer que f réalise une bijection f^{-1} de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J que l'on précisera.

c) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α telle que $0,5 < \alpha < 0,6$.

d) Déterminer le signe de $f(x) - x$ pour tout réel x . Interpréter graphiquement le résultat.

4) Dans la figure 2 de l'annexe, on a construit la droite d'équation $y = x$ et on a placé le réel α sur l'axe des abscisses et le réel $\frac{\sqrt{2}}{2}$ sur l'axe des ordonnées.

a) Tracer la courbe (ζ) .

b) Tracer la courbe (ζ') de f^{-1} .

5) a) Montrer que la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = x - \ln(1 + \sqrt{1+e^{2x}})$ est une primitive de f .

b) On désigne par A l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe (ζ) , l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = \alpha$.

Montrer que $A = \alpha + \ln\left(\frac{\alpha(1+\sqrt{2})}{\alpha+1}\right)$.

II. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction F_k définie sur $[0, +\infty[$, par $F_k(x) = \int_0^x (f(t))^k dt$.

1) a) Montrer que la fonction F_k est croissante sur $[0, +\infty[$.

b) Montrer que pour tout réel $t \in [0, +\infty[$, $0 \leq (f(t))^k \leq e^{-kt}$.

c) En déduire que pour tout $x \in [0, +\infty[$, $0 \leq F_k(x) \leq \frac{1}{k}$.

d) Montrer alors que la fonction F_k possède une limite finie l_k quand x tend vers $+\infty$.

e) Montrer que $\lim_{k \rightarrow +\infty} l_k = 0$.

2) a) En utilisant la question I.5.a) montrer que $l_1 = -h(0)$.

b) Montrer que pour tout réel $t \in [0, +\infty[$, $(f(t))^3 - f(t) = f'(t)$.

c) En déduire que pour tout $x \geq 0$, $F_3(x) = F_1(x) + f(x) - f(0)$.

d) Montrer que $I_3 = \ln(1+\sqrt{2}) - \frac{\sqrt{2}}{2}$.

3) a) Montrer que pour tout $x \geq 0$ et pour tout $k \geq 2$,

$$F_{2k+1}(x) - F_{2k-1}(x) = \frac{1}{2^k - 1} \left((f(x))^{2^k - 1} - (f(0))^{2^k - 1} \right).$$

b) En déduire que $I_{2k+1} - I_{2k-1} = \frac{-1}{(2^k - 1)(\sqrt{2})^{2^k - 1}}$, $k \geq 2$.

c) Montrer que $I_{2k+1} = I_3 - \sum_{m=2}^k \frac{1}{(2^m - 1)(\sqrt{2})^{2^m - 1}}$, $k \geq 2$.

d) En déduire $\lim_{k \rightarrow +\infty} \sum_{m=2}^k \frac{1}{(2^m - 1)(\sqrt{2})^{2^m - 1}}$.



Section : N° d'inscription : Série :

Nom et Prénom :

Date et lieu de naissance :

Signatures des surveillants

.....
.....



Épreuve: Mathématiques - Section : Mathématiques
Session principale (2020)
Annexe à rendre avec la copie

Figure 1

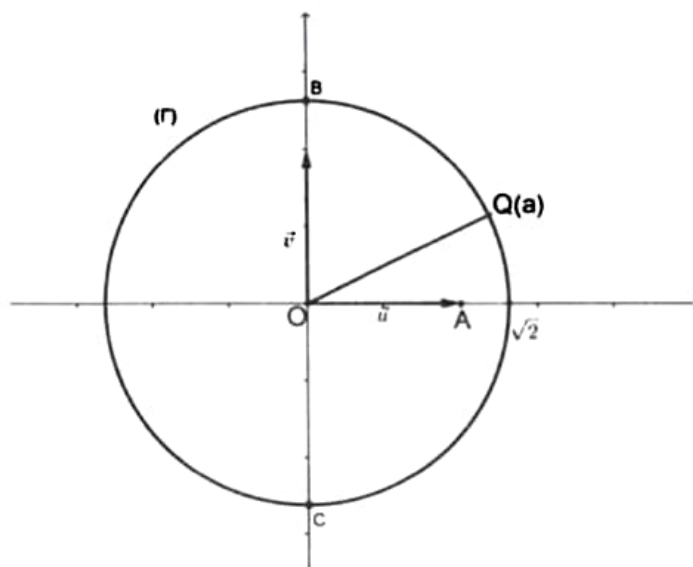


Figure 2

