

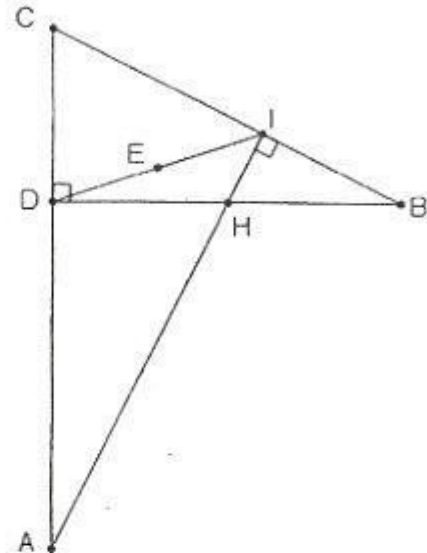
REPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTERE DE L'EDUCATION ●●●●● EXAMEN DU BACCALAUREAT SESSION 2018	Session principale	
	<i>Epreuve :</i> Mathématiques	Section : Mathématiques
	Durée : 4h	◆ Coefficient de l'épreuve : 4

Le sujet comporte six pages numérotées de 1/6 à 6/6.
Les pages 5/6 et 6/6 sont à rendre avec la copie.

Exercice 1 (5 points)

Le plan est orienté. Dans la figure ci-contre,

- DBC est un triangle rectangle en D tel que $\left(\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC}\right) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$ et $DB = 2DC$;
- le point H est le milieu du segment $[DB]$;
- le point I est le projeté orthogonal du point H sur la droite (BC) ;
- le point E est le milieu du segment $[ID]$;
- les droites (IH) et (CD) se coupent au point A .



1) Soit R la rotation de centre H et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

a) Calculer $\widehat{CBD}$. En déduire que $\frac{IH}{IB} = \frac{1}{2}$.

b) Montrer alors que $R(I) = E$.

2) Soit h l'homothétie de centre D et de rapport 2. On pose $f = h \circ R$.

a) Déterminer $f(H)$.

b) Montrer que $f(I) = I$.

c) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f .

d) Montrer que $f(C) = A$.

3) a) La droite (CH) coupe la droite (AB) en un point F .

Justifier que les points B, I, H et F sont sur le cercle de diamètre $[BH]$.

En déduire que $\left(\overrightarrow{IH}, \overrightarrow{IF}\right) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$.

b) Montrer alors que l'image par f de la droite (ID) est la droite (IF) .

c) La droite (ID) coupe les droites (CF) et (AB) respectivement en J et Ω . Montrer que $f(J) = F$.

d) Montrer que $f(F) = \Omega$.

4) Montrer que le triangle $CA\Omega$ est rectangle.

Exercice 2 (3 points)

Soit θ un réel non nul.

Dans la **figure 1** de l'annexe jointe,

- $(O, \vec{u}, \vec{v})$ est un repère orthonormé direct ;
- $\mathcal{C}$ est le cercle de centre O et de rayon 1 ;
- E est le point de $\mathcal{C}$ tel que $\left(\vec{u}, \overrightarrow{OE}\right) \equiv \theta [2\pi]$;
- F et G sont les points d'affixes, respectives, -1 et $1+\sqrt{2}$;
- Γ est le demi-cercle de diamètre $[FG]$;
- D est le point d'intersection de Γ et l'axe $(O, \vec{v})$.

1) a) Vérifier que $OD^2 = 1 + \sqrt{2}$.

b) Soit A le point d'affixe $z_A = i\sqrt{1+\sqrt{2}} e^{i\theta}$. Vérifier que $z_A = OD e^{i\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)}$. Construire alors le point A .

2) On considère, dans $\mathbb{C}$, l'équation (E) : $z^2 + \frac{\sqrt{2}}{i\sqrt{1+\sqrt{2}}} e^{i\theta} z + e^{2i\theta} = 0$.

a) Vérifier que z_A est une solution de l'équation (E).

b) On désigne par B le point d'affixe z_B , où z_B est la deuxième solution de (E).

Déterminer z_B .

3) a) Montrer que les points O, A et B sont alignés.

b) Placer le point C d'affixe $z_C = OD e^{i\theta}$.

c) Montrer que $\frac{\text{Aff}(\overrightarrow{AC})}{\text{Aff}(\overrightarrow{AB})} = \frac{\sqrt{2}}{2} (1+i)$.

En déduire que le triangle ABC est isocèle et que $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$.

d) Construire alors le point B .

Exercice 3 (7 points)

A) On considère la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par $\begin{cases} f(x) = x \ln x & \text{si } x > 0, \\ f(0) = 0. \end{cases}$

On note (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a) Vérifier que f est continue à droite en 0.

b) Étudier la dérivabilité de f à droite en 0. Interpréter graphiquement.

c) Dresser le tableau de variation de f .

2) Dans la **Figure 2** de l'annexe jointe, on a tracé dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, la courbe Γ

de la fonction $x \mapsto e^x$ et les droites Δ et Δ' d'équations respectives $y = x$ et $y = -x$.

a) Construire les points A et B de (C_f) d'abscisses respectives e et $\frac{1}{e}$.

b) Déterminer la position relative de (C_f) et Δ puis la position relative de (C_f) et Δ' .

c) Tracer la courbe (C_f) .

3) Soit S la partie du plan limitée par la courbe (C_f) et les droites Δ et Δ' .

Montrer que l'aire de la partie S est égale à $\frac{1}{4} \left(e^2 - \frac{1}{e^2} \right)$.

B) Soit n un entier naturel.

On pose $u_n = \int_{\frac{1}{e}}^1 t^n e^t dt$ et $v_n = \int_{\frac{1}{e}}^1 t^n e^t f(t) dt$.

1) a) Montrer que $u_n > 0$.

b) Montrer que $0 < u_n \leq \frac{e}{n+1}$. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

c) Montrer que $u_{n+1} = e - \frac{e^e}{e^{n+1}} - (n+1) u_n$.

d) Montrer alors que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1) u_n = e$.

2) a) Montrer que $-\frac{u_n}{e} \leq v_n \leq 0$. Déterminer alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$.

b) Vérifier que pour tout $t \in]0, +\infty[$, $f(t) = t f'(t) - t$.

Montrer alors que $v_n = \int_{\frac{1}{e}}^1 t^{n+1} e^t f'(t) dt - u_{n+1}$.

c) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $(n+2) v_n = \frac{e^{\frac{1}{e}}}{e^{n+2}} - v_{n+1} - u_{n+1}$.

d) Montrer alors que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n+2) v_n = 0$.

3) a) Montrer qu'il existe un seul réel α_n appartenant à l'intervalle $\left[\frac{1}{e}, 1 \right]$ tel que $f(\alpha_n) = \frac{v_n}{u_n}$.

b) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{v_n}{u_n} = 0$.

c) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n$.

Exercice 4 (5 points)

A) Soit q un entier naturel.

1) Montrer que q^2 est impair si et seulement si q est impair.

2) Montrer que si q est impair alors $q^2 \equiv 1 \pmod{8}$.

B) On se propose de déterminer l'ensemble A des triplets d'entiers naturels non nuls (m, n, q) tels que $2^{2m} + 3^{2n} = q^2$.

1) Vérifier que le triplet $(2, 1, 5)$ est un élément de A .

Dans la suite de l'exercice on suppose que (m, n, q) est un élément de A .

2) a) Montrer que q est impair.

b) Montrer que $q^2 - 3^{2n} \equiv 0 \pmod{8}$.

c) Montrer alors que m est différent de 1.

3) On suppose que $m \geq 2$.

a) Justifier que les entiers $(q-3^n)$ et $(q+3^n)$ sont pairs.

b) Soit $d = (q-3^n) \wedge (q+3^n)$.

Montrer que d divise $2q$ et que d divise 2^{2m} . En déduire que $d = 2$.

c) Montrer que $q-3^n = 2$ et que $q+3^n = 2^{2m-1}$.

En déduire que $q = 2^{2m-2} + 1$ et que $3^n = 2^{2m-2} - 1$.

4) Déterminer n et q lorsque $m = 2$.

5) On suppose que $m \geq 3$.

a) Montrer que $3^n \equiv -1 \pmod{16}$.

b) Déterminer, suivant les valeurs de l'entier naturel k , les restes possibles de 3^k dans la division euclidienne par 16.

c) En déduire qu'il n'existe pas de triplets (m, n, q) éléments de l'ensemble A tels que $m \geq 3$.

6) Déterminer l'ensemble A .

Section : N° d'inscription : Série :
Nom et Prénom :
Date et lieu de naissance :

Signatures des surveillants

Épreuve : **Mathématiques** - Section : **Mathématiques** - Session principale - 2018

Annexe à rendre avec la copie

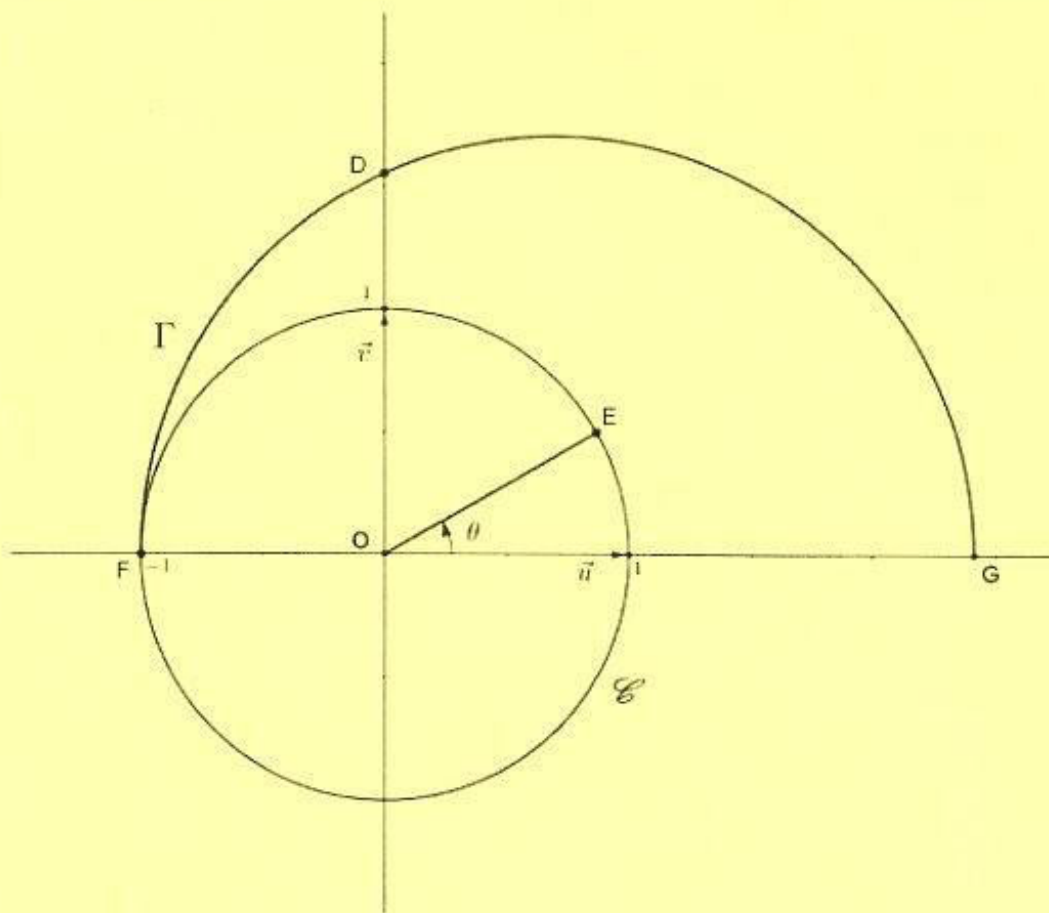


Figure 1

Ne rien écrire ici

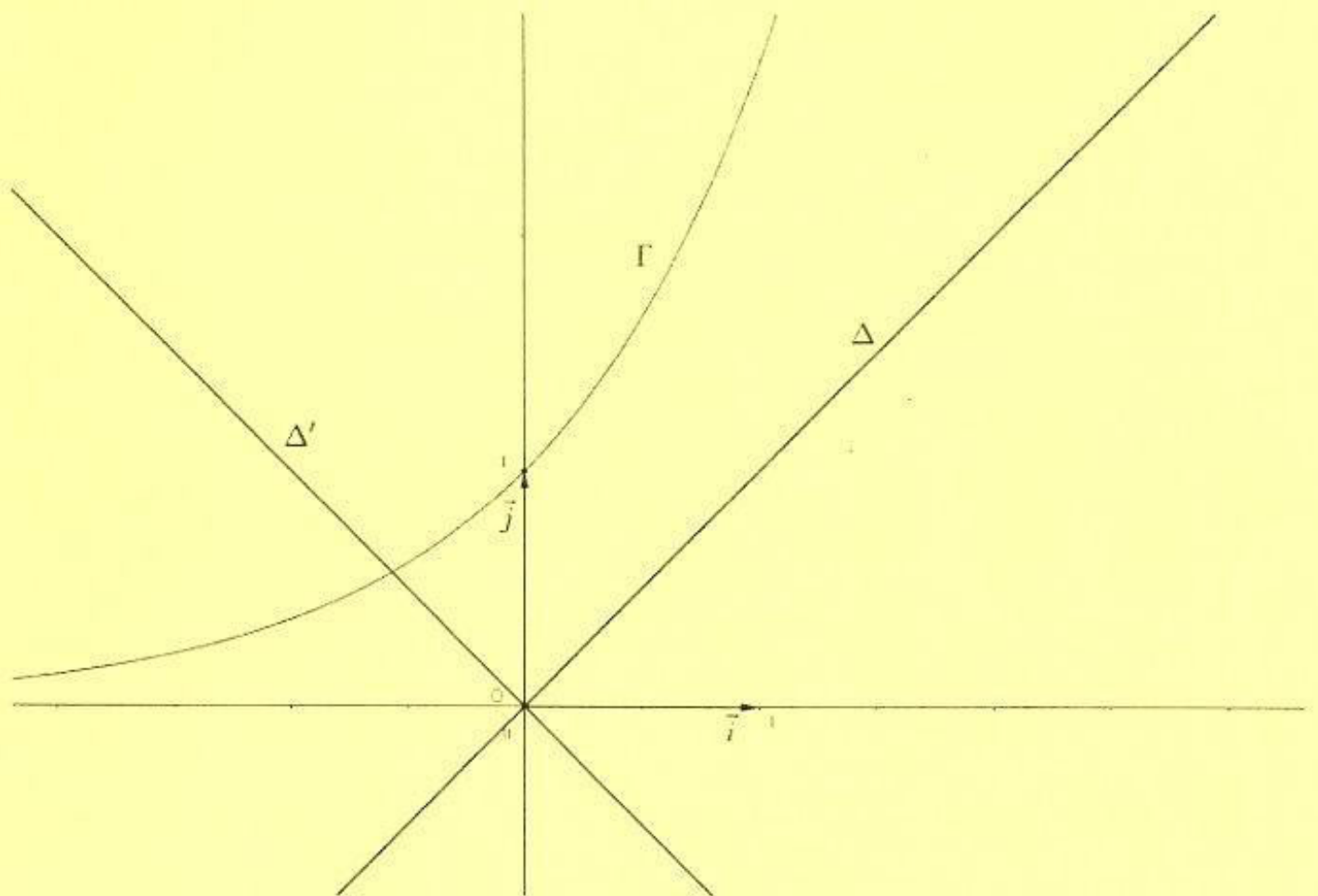


Figure 2

REPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTERE DE L'EDUCATION ●●●●● EXAMEN DU BACCALAUREAT SESSION 2018	Session de contrôle	
	Epreuve : Mathématiques	Section : Mathématiques
	Durée : 4h	 Coefficient de l'épreuve : 4

Le sujet comporte sept pages numérotées de 1/7 à 7/7.
 Les pages 5/7, 6/7 et 7/7 sont à rendre avec la copie.

Exercice 1 (5 points)

Le plan est orienté. Dans la Figure 1 de l'annexe jointe,

- ABC est un triangle équilatéral direct tel que $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$;
- $\mathcal{C}_1$ est le cercle circonscrit au triangle ABC et O son centre ;
- I est le milieu du segment [BC] ;
- AICD est un rectangle direct.

1) Soit f le déplacement tel que $f(A) = C$ et $f(B) = A$.

Montrer que f est une rotation dont on précisera son centre et une mesure de son angle.

2) Soit g l'antidépacement tel que $g(A) = C$ et $g(B) = A$.

a) Justifier que g est une symétrie glissante.

b) Montrer que $g = t_{\overrightarrow{BI}} \circ S_{\Delta}$, où Δ est la médiatrice du segment [AI].

3) Soit h l'homothétie de centre A et telle que $h(O) = I$. On pose $\varphi = g \circ h \circ f$.

a) Montrer que φ est une similitude indirecte de rapport $\frac{3}{2}$.

b) Montrer que $\varphi(B) = C$ et $\varphi(O) = D$.

4) Soit $E = \varphi(C)$.

a) Montrer que le triangle DCE est isocèle en D.

b) Justifier que $\left(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DE}\right) \equiv -\frac{2\pi}{3}[2\pi]$.

c) Construire alors le point E.

d) Soit Ω le centre de φ .

Montrer que $\overrightarrow{\Omega B} = \frac{4}{5} \overrightarrow{BE}$. Construire le point Ω .

5) On pose $\mathcal{C}_2 = \varphi(\mathcal{C}_1)$.

Le cercle $\mathcal{C}_2$ coupe le cercle $\mathcal{C}_1$ au point C et en un autre point M. On pose $N = \varphi(M)$.

Montrer que les points Ω , B et M sont alignés. Construire alors le point N.

Exercice 2 (3 points)

Une urne contient six pièces de monnaie :

- quatre pièces sont équilibrées ;
- les deux autres pièces sont truquées de façon que la probabilité d'obtenir « FACE » est égale à $\frac{2}{3}$.

On tire, au hasard, une pièce de l'urne et on effectue n lancers successifs de cette pièce, $n \geq 1$.

On considère les événements suivants :

- E : « la pièce tirée est équilibrée ».
- F_n : « on obtient FACE pour les n lancers ».

1) a) Déterminer $p(E)$, $p(F_1/E)$ et $p(F_1/\bar{E})$.

b) Montrer que $p(F_1) = \frac{5}{9}$.

2) Montrer que $p(F_n) = \frac{1}{3} \left(\left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} + \left(\frac{2}{3} \right)^n \right)$.

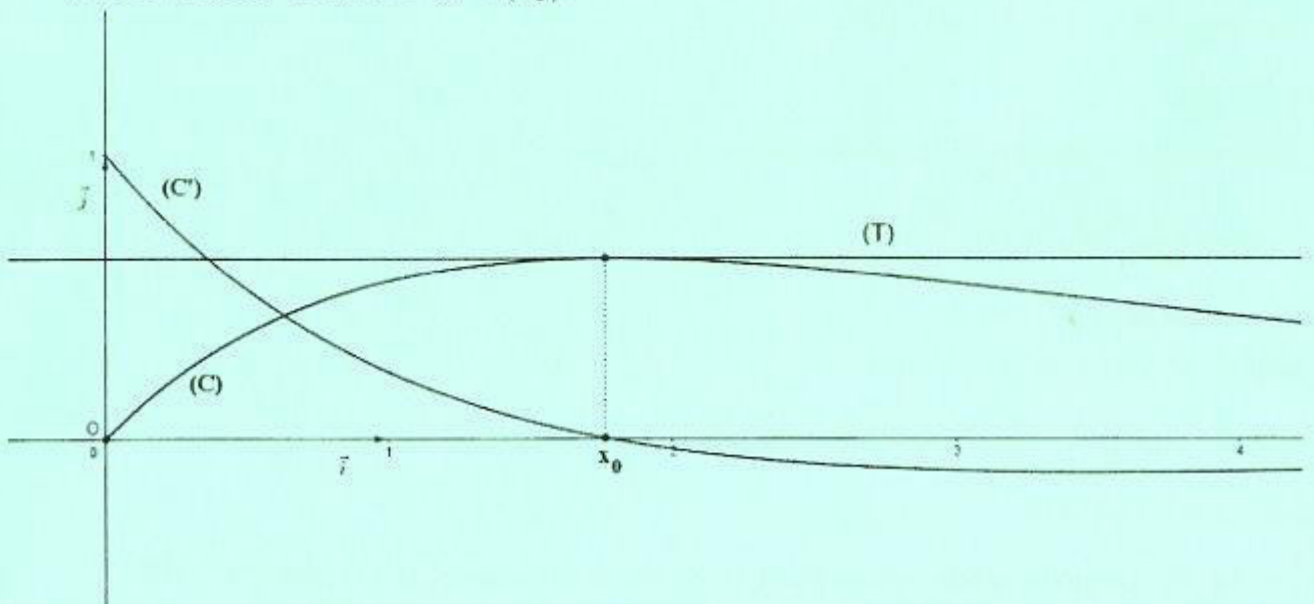
3) Soit X_n la variable aléatoire définie de la manière suivante :
$$\begin{cases} X_n = n & \text{si } F_n \text{ est réalisé ;} \\ X_n = 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

a) Donner la loi de probabilité de X_n .

b) Déterminer l'espérance mathématique de X_n .

c) Dans la figure ci-dessous,

- $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormé du plan,
- (C) est la courbe représentative de la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{x}{3} \left(\left(\frac{1}{2} \right)^{x-1} + \left(\frac{2}{3} \right)^x \right)$,
- (C') est la courbe représentative de la fonction dérivée f' de f ,
- la courbe (C') coupe l'axe $(O, \vec{i})$ en un seul point d'abscisse x_0 ,
- (T) est la droite d'équation $y = f(x_0)$.



Exploiter le graphique pour déterminer l'entier naturel n pour lequel l'espérance mathématique $E(X_n)$ est maximale.

Exercice 3 (7 points)

1) Soit g la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = 1 - x + x \ln x$.

a) Etudier les variations de g .

b) En déduire que pour tout $x \in]0, +\infty[$, $1 + x \ln x \geq x$.

2) Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par
$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{1 + x \ln x} & \text{si } x > 0, \\ f(0) = 1. \end{cases}$$

On note (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

a) Montrer que f est continue à droite en 0.

b) Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - 1}{x} = +\infty$. Interpréter graphiquement.

c) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. Interpréter graphiquement.

3) a) Montrer pour tout $x \in]0, +\infty[$, $f'(x) = -\frac{1 + \ln x}{(1 + x \ln x)^2}$.

b) Dresser le tableau de variation de f .

4) Dans la figure 2 de l'annexe jointe, on a tracé dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, les courbes (C_1) et (C_2) des fonctions définies sur $]0, +\infty[$ respectivement par $x \mapsto \ln x$ et $x \mapsto \frac{1}{x}$.

a) Construire le point A de (C_1) d'abscisse $\frac{1}{e}$ et le point B de (C_2) d'abscisse $1 - \frac{1}{e}$.

En déduire une construction du point C de (C_f) d'abscisse $\frac{1}{e}$.

b) Déduire de la question 1) b) que pour tout $x \in]0, +\infty[$, $f(x) \leq \frac{1}{x}$.

Déterminer alors la position relative de (C_f) et (C_2) .

c) Tracer la courbe (C_f) .

5) On considère la fonction F définie sur $[1, +\infty[$ par $F(x) = \int_1^x f(t) dt$.

a) Montrer que pour tout $t \in [1, +\infty[$, $\frac{1}{t + t \ln(t)} \leq f(t)$.

b) Montrer alors que pour tout $x \in [1, +\infty[$, $\ln(1 + \ln x) \leq F(x) \leq \ln x$.

c) Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x}$.

6) Soit n un entier naturel non nul.

a) Montrer que la fonction $h : x \mapsto x - F(x)$ est une bijection de $[1, +\infty[$ sur $[1, +\infty[$.

b) En déduire que l'équation $h(x) = n$ admet dans $[1, +\infty[$ une seule solution α_n .

c) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = +\infty$.

d) Vérifier que $\frac{\alpha_n}{n} = \frac{1}{1 - \frac{F(\alpha_n)}{\alpha_n}}$. Déterminer alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\alpha_n}{n}$.

Exercice 4 (5 points)

1) On considère, dans $\mathbb{C}$, l'équation (E): $z^2 - (1+i)z - i = 0$.

Résoudre l'équation (E). On note z_1 et z_2 , les solutions de (E).

2) Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on désigne par A, B, M_1 et M_2 les points d'affixes respectives 1, i, z_1 et z_2 .

Soit z un nombre complexe distinct de 1, i, z_1 et z_2 .

On note M et M' les points d'affixes respectives z et $z' = \frac{z+i}{z-i}$.

Justifier que les points M et M' sont distincts.

Dans la suite de l'exercice on prend $z = i + 2e^{i\theta}$, où θ est un réel.

3) a) Montrer que M décrit le cercle Γ de centre B et de rayon 2.

b) Montrer que $z' = 1 + ie^{-i\theta}$.

c) Montrer que $AM' = 1$ et que $\left(\vec{u}, \overrightarrow{AM'}\right) \equiv \frac{\pi}{2} - \theta [2\pi]$.

d) Déterminer l'ensemble des points M' lorsque le point M décrit le cercle Γ .

4) Soit P le milieu du segment $[MM']$ et z_P son affixe.

On désigne par Q le point d'affixe $z_Q = e^{i\frac{\pi}{4}} z_P$.

a) Vérifier que $z_P = \frac{1+i+2e^{i\theta}+ie^{-i\theta}}{2}$.

b) En déduire que $z_Q = \frac{i\sqrt{2} + 2e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)} - e^{-i\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)}}{2}$.

c) Montrer alors que $z_Q = \frac{1}{2} \cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) + i \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{3}{2} \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) \right)$.

5) a) Montrer que lorsque le point M varie sur le cercle Γ , le point Q varie sur l'ellipse $\mathcal{E}$ d'équation

$$4x^2 + \frac{4}{9} \left(y - \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 = 1.$$

b) Dans la **figure 3** de l'annexe jointe, on a tracé dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$ le cercle Γ , l'ellipse $\mathcal{E}$,

et on a placé un point M sur le cercle Γ tel que $\left(\vec{u}, \overrightarrow{BM}\right) \equiv \theta [2\pi]$. Construire les points M' et Q.

Section : N° d'inscription : Série :
Nom et Prénom :
Date et lieu de naissance :

Signatures des surveillants
.....
.....



Épreuve : **Mathématiques** - Section : **Mathématiques** - Session de contrôle - 2018
Annexe à rendre avec la copie

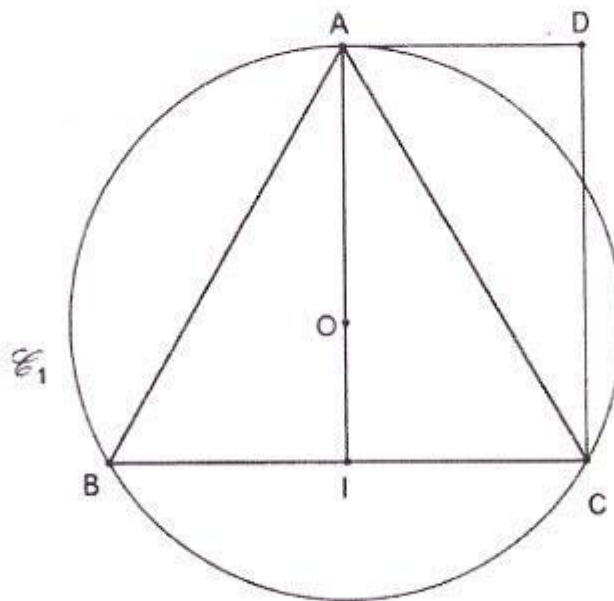


Figure 1

Ne rien écrire ici

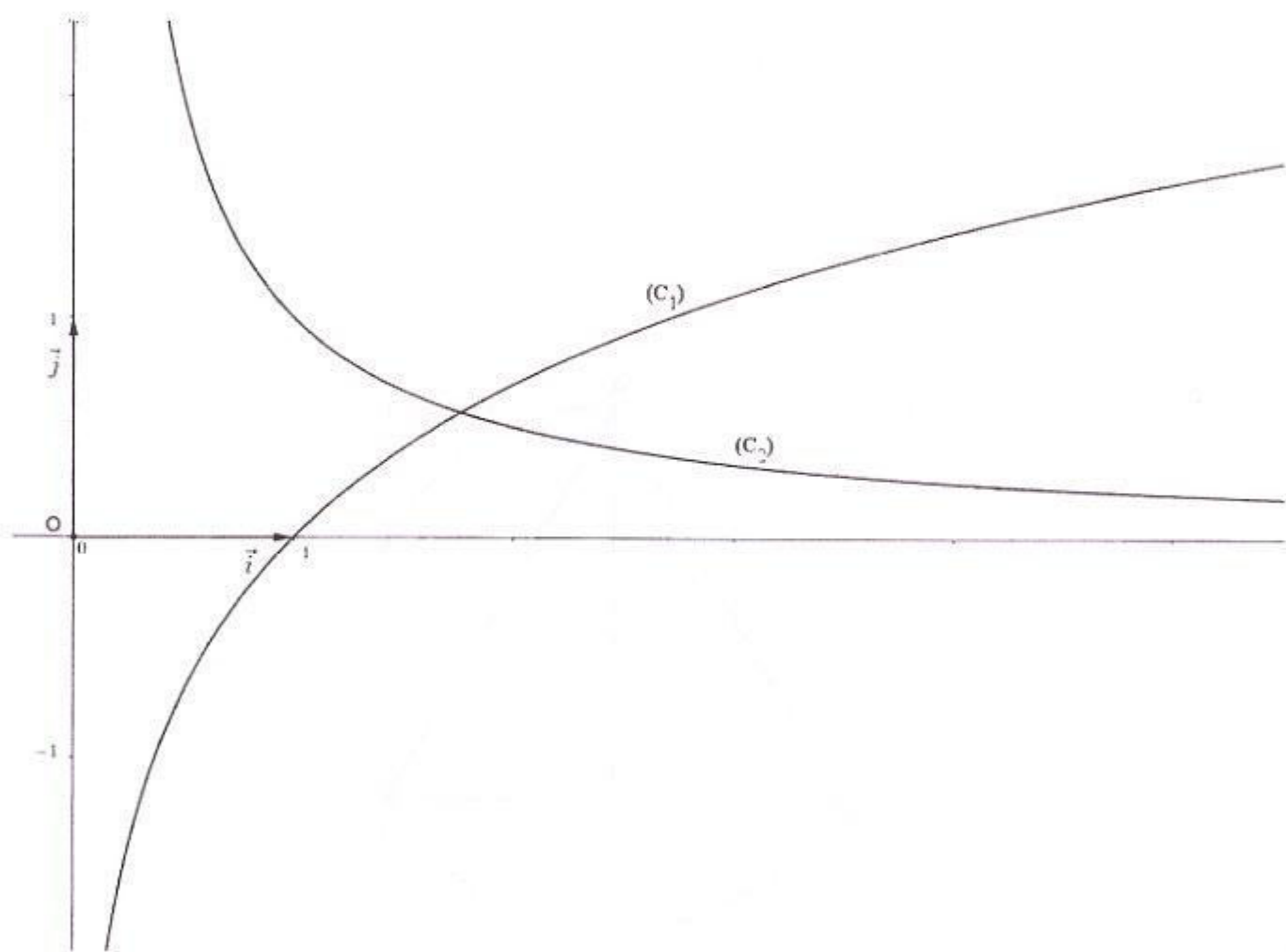


Figure 2

Ne rien écrire ici

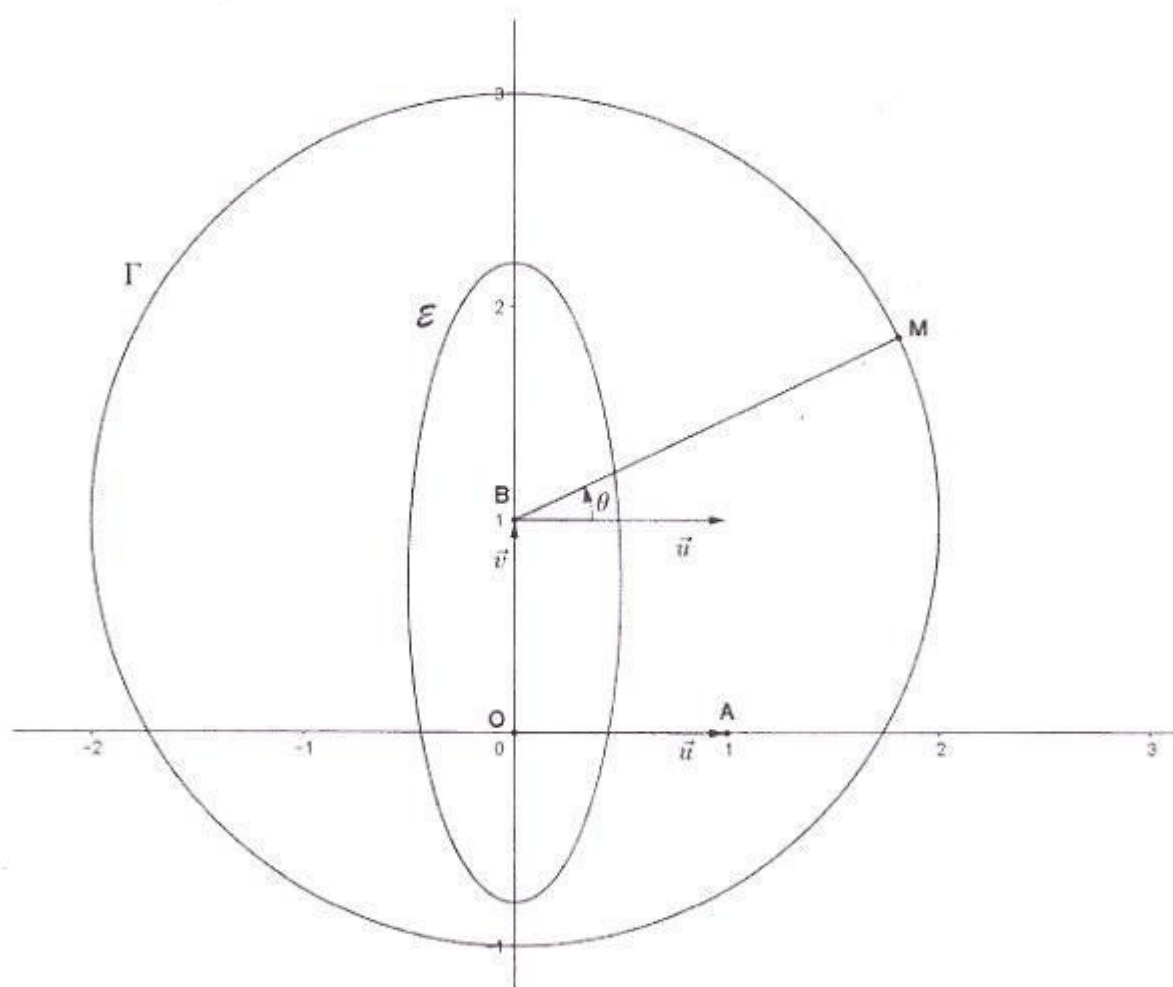


Figure 3

Le sujet comporte six pages numérotées de 1/6 à 6/6.

Les pages 5/6 et 6/6 sont à rendre avec la copie.

Exercice 1 (5 points)

Le plan est orienté.

Dans la figure 1 de l'annexe 1 jointe,

ABC est un triangle équilatéral tel que $\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$,

Ω est un point intérieur au triangle ABC tel que $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Omega}\right) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$,

I et J sont les projetés orthogonaux de Ω respectivement sur les droites (AB) et (AC),

D est le point de la droite (AC) tel que $DA = D\Omega$.

1) Montrer que $\left(\overrightarrow{\Omega J}, \overrightarrow{\Omega D}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$.

2) Soit $R = S_{(\Omega D)} \circ S_{(\Omega J)}$.

a) Justifier que R est la rotation de centre Ω et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

b) Soit $F = R(J)$.

Montrer que F est un point de la demi-droite $[\Omega I)$. Construire le point F.

3) Soit h l'homothétie de centre Ω et telle que $h(F) = I$. On pose $f = h \circ R$.

a) Vérifier que $f(J) = I$.

b) Montrer que f est une similitude directe dont on précisera le centre et l'angle.

c) Calculer $\frac{\Omega I}{\Omega A}$ et $\frac{\Omega A}{\Omega J}$. (On donne $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$).

En déduire que le rapport de f est égal à $1 + \sqrt{3}$.

4) Soit g la similitude indirecte de centre Ω telle que $g(J) = I$.

a) Montrer que $g = f \circ S_{(\Omega J)}$.

b) Déterminer le rapport de g.

c) Montrer que l'axe de g est la droite (ΩD) .

d) Montrer que $g = h \circ S_{(\Omega D)}$.

e) La droite (ΩD) coupe la droite (BC) en un point K. On pose $K' = g(K)$.

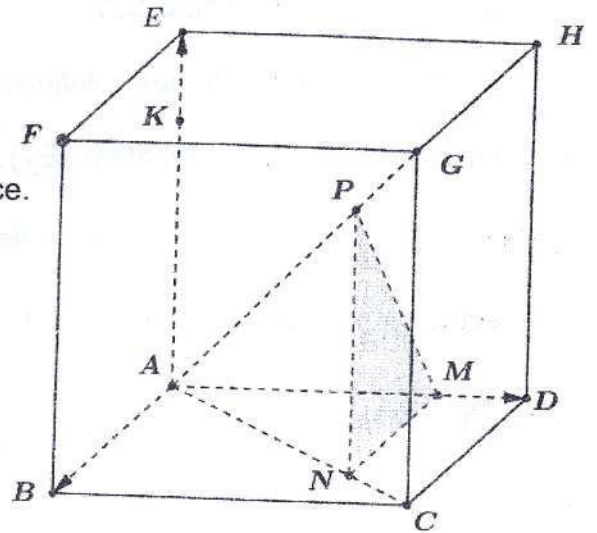
Vérifier que $h(K) = K'$. Construire alors le point K'.

Exercise 2 (3,5 points)

L'espace est orienté.

Dans la figure ci-contre ABCDEFGH est un cube d'arrête 1.

$(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ est un repère orthonormé direct de l'espace.



- 1) a) Montrer que $\overrightarrow{EC} \wedge \overrightarrow{ED} = \overrightarrow{AH}$.
 - b) Montrer que l'aire du triangle ECD est égale à $\frac{\sqrt{2}}{2}$.
 - c) Calculer le volume du tétraèdre AECD.
- 2) Soit h l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{3}{4}$.

On pose $M = h(D)$.

- a) Le plan passant par M et parallèle au plan (DCG) coupe les segments [AC] et [AG] respectivement en N et P. Montrer que $h(C) = N$ et $h(G) = P$.
- b) Le plan passant par M et parallèle au plan (ECD) coupe la droite (AE) en un point K. Calculer le volume du tétraèdre AKNM.

- 3) Soit (S) la sphère de centre le point I $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ et de rayon $R = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

- a) Montrer que la sphère (S) coupe le plan (DCG) suivant un cercle dont on précisera le centre et le rayon.
- b) Soit (S') l'image de la sphère (S) par l'homothétie h .
- Montrer que (S') coupe le plan (MNP) suivant un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

Exercise 3 (4 points)

- 1) Soit x un entier non nul premier avec 53.
- a) Déterminer le reste modulo 53 de x^{52} .
- b) En déduire que pour tout entier naturel k , $x^{52k+1} \equiv x \pmod{53}$.

- 2) Soit l'équation $(E_1): x^{29} \equiv 2 \pmod{53}$, où $x \in \mathbb{Z}$.

Montrer que 2^9 est une solution de (E_1) .

- 3) Soit x une solution de l'équation (E_1) .
- a) Montrer que x est premier avec 53.
 - b) Montrer que $x^{261} \equiv x \pmod{53}$.
 - c) En déduire que $x \equiv 2^9 \pmod{53}$.

4) a) Montrer que $2^9 \equiv 35 \pmod{53}$.

b) Donner alors l'ensemble des solutions dans $\mathbb{Z}$ de l'équation (E_1) .

5) On considère dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E_2) : $71u - 53v = 1$.

a) Vérifier que $(3, 4)$ est une solution de l'équation (E_2) .

b) Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E_2) .

6) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système
$$\begin{cases} x \equiv 34 \pmod{71} \\ x^{29} \equiv 2 \pmod{53} \end{cases}$$

Exercice 4 (7,5 points)

Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{e^x - 1}$.

On note (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement.

2) a) Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = +\infty$. Interpréter graphiquement.

b) Montrer que pour tout $x \in]0, +\infty[$, $f'(x) = \frac{e^x}{2\sqrt{e^x - 1}}$.

c) Dresser le tableau de variation de f .

d) En déduire que $e^x - 1 \leq \sqrt{e^x - 1}$, si et seulement si, $x \leq \ln(2)$.

3) Montrer que le point $B(\ln 2, 1)$ est un point d'inflexion de (C_f) .

4) Dans la figure 2 de l'annexe 2 jointe, on a tracé dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ la courbe Γ de la fonction $x \mapsto e^x - 1$.

a) Etudier la position relative de (C_f) par rapport à Γ .

b) Tracer la courbe (C_f) .

5) Soit g la fonction définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ par $g(x) = \tan(x)$.

a) Montrer que g réalise une bijection de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ sur $[0, +\infty[$. On note g^{-1} sa fonction réciproque.

b) Calculer $(g^{-1})(0)$ et $(g^{-1})(1)$.

c) Montrer que g^{-1} est dérivable sur $[0, +\infty[$ et que $(g^{-1})'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

d) Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g^{-1}(x)}{x} = 1$.

6) On pose pour tout $x \in [0, +\infty[$, $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ et $G(x) = 2 \left(f(x) - (g^{-1} \circ f)(x) \right)$.

a) Montrer que pour tout $x \in]0, +\infty[$, $F'(x) = G'(x)$.

b) En déduire que pour tout $x \in [0, +\infty[$, $F(x) = G(x)$.

c) Soit A l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C_f) , la courbe Γ et les droites

d'équations $x = 0$ et $x = \ln 2$. Montrer que $A = 1 + \ln 2 - \frac{\pi}{2}$.

7) Soit n un entier naturel tel que $n \geq 2$.

On désigne par f_n la fonction définie sur $[\ln(n), +\infty[$ par $f_n(x) = \sqrt{e^x - n}$.

On note (C_n) sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

a) Soit G_n la fonction définie sur $[\ln(n), +\infty[$ par $G_n(x) = 2 \left(f_n(x) - \sqrt{n} g^{-1} \left(\frac{f_n(x)}{\sqrt{n}} \right) \right)$.

Montrer que pour tout $x \in [\ln(n), +\infty[$, $G_n(x) = \int_{\ln(n)}^x f_n(t) dt$.

b) Vérifier que pour tout $x \geq \ln(n)$, $\sqrt{e^x - n} < \sqrt{e^x - 1}$.

En déduire que pour tout $x \geq \ln(n)$, $f_n(x) \leq e^x - 1$.

c) Soit A_n l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C_n) , la courbe Γ et les droites

d'équations $x = \ln(n)$ et $x = \ln(n+1)$. Montrer que $A_n = 2 \sqrt{n} g^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right) + \ln \left(\frac{n}{n+1} \right) - 1$.

d) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n$.



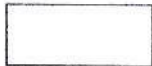
Section : N° d'inscription : Série :

Nom et Prénom :

Date et lieu de naissance :

Signatures des surveillants

.....
.....



Épreuve : Mathématiques

Section : Mathématiques

Annexe 1 à rendre avec la copie

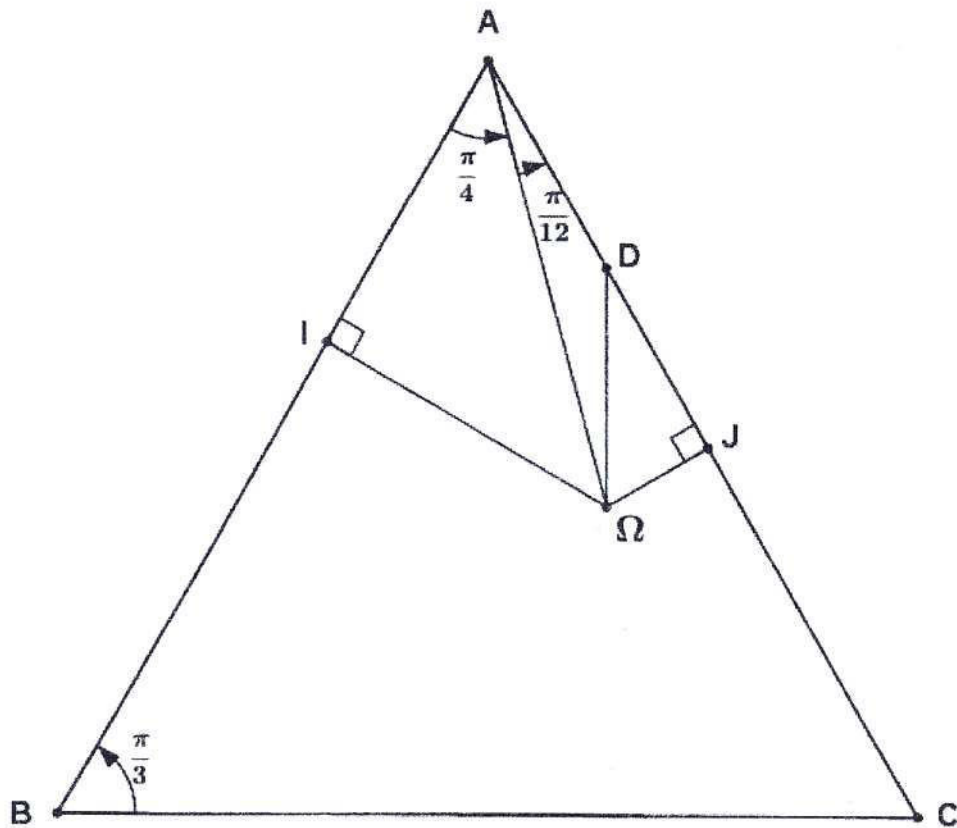


Figure 1

NE RIEN ECRIRE ICI

Épreuve : Mathématiques

Section : Mathématiques

Annexe 2 à rendre avec la copie

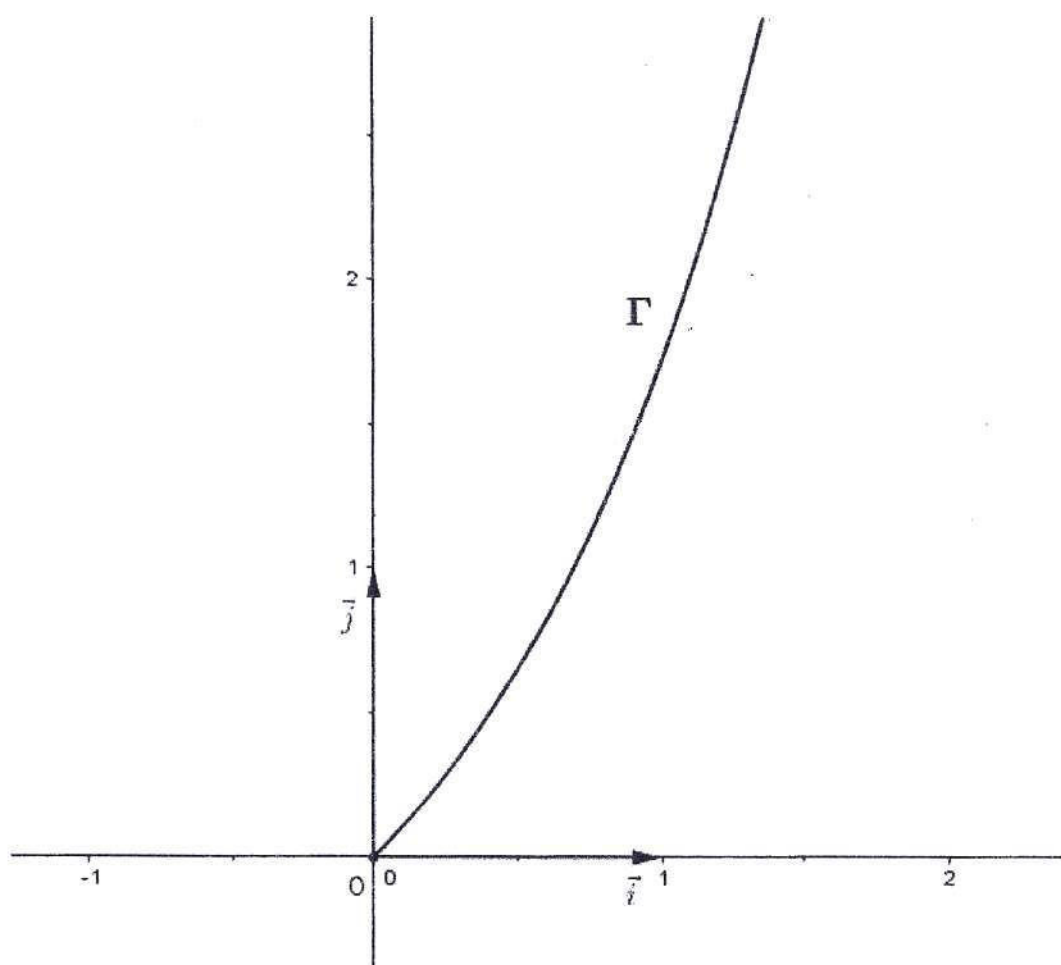


Figure 2

Exercice 1

1) $(\overrightarrow{\Omega J}, \overrightarrow{\Omega D}) \equiv (\overrightarrow{\Omega J}, \overrightarrow{\Omega A}) + (\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega D}) [2\pi]$.

$A\Omega J$ est un triangle rectangle en J tel que $(\overrightarrow{A\Omega}, \overrightarrow{AJ}) \equiv \frac{\pi}{12} [2\pi]$.

Alors $(\overrightarrow{\Omega J}, \overrightarrow{\Omega A}) \equiv (\overrightarrow{JA}, \overrightarrow{J\Omega}) - (\overrightarrow{A\Omega}, \overrightarrow{AJ}) [2\pi] \equiv \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12} [2\pi]$

$DA\Omega$ est un triangle isocèle (direct) en D tel que $(\overrightarrow{A\Omega}, \overrightarrow{AD}) \equiv (\overrightarrow{A\Omega}, \overrightarrow{AJ}) [2\pi] \equiv \frac{\pi}{12} [2\pi]$.

Alors $(\overrightarrow{\Omega D}, \overrightarrow{\Omega A}) \equiv (\overrightarrow{A\Omega}, \overrightarrow{AJ}) [2\pi] \equiv \frac{\pi}{12} [2\pi]$. Par la suite $(\overrightarrow{\Omega J}, \overrightarrow{\Omega D}) \equiv \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12} - \frac{\pi}{12} [2\pi] \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$.

2) a) R est la composée de deux symétries orthogonales d'axes sécants au point Ω

Donc R est la rotation de centre Ω d'angle $\frac{2\pi}{3}$ car $2(\overrightarrow{\Omega J}, \overrightarrow{\Omega D}) \equiv \frac{2\pi}{3} [2\pi]$.

b) $\bullet F = R(J)$ donc $(\overrightarrow{\Omega J}, \overrightarrow{\Omega F}) \equiv \frac{2\pi}{3} [2\pi]$, de plus $(\overrightarrow{\Omega J}, \overrightarrow{\Omega I}) \equiv \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{4} [2\pi] \equiv \frac{2\pi}{3} [2\pi]$.

$\bullet (\overrightarrow{\Omega F}, \overrightarrow{\Omega I}) \equiv (\overrightarrow{\Omega F}, \overrightarrow{\Omega J}) + (\overrightarrow{\Omega J}, \overrightarrow{\Omega I}) [2\pi] \equiv -\frac{2\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} [2\pi] \equiv 0 [2\pi]$ donc $F \in [\Omega I]$.

3) a) $f(J) = h \circ R(J) = h(F) = I$.

b) f est la composée d'une homothétie et d'un déplacement donc f est une similitude directe.

$\bullet f(\Omega) = h \circ R(\Omega) = h(\Omega) = \Omega$. Alors Ω est le centre de f .

$\bullet f(J) = I$ et $(\overrightarrow{\Omega J}, \overrightarrow{\Omega I}) \equiv \frac{2\pi}{3} [2\pi]$ donc f est d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

Remarques :

* $f = h \circ R$ donc l'angle de f est celui de R car le rapport de h est positif car $h(F) = I$ et $F \in [\Omega I]$.

* h et R ont le même centre Ω alors Ω est le centre de $f = h \circ R$.

c) Le triangle ΩAI est rectangle et isocèle en I , $\frac{\Omega I}{\Omega A} = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Le triangle $\Omega J A$ est rectangle en J et $\overrightarrow{\Omega A} \wedge \overrightarrow{\Omega J} = \frac{\pi}{12}$, donc $\frac{\Omega A}{\Omega J} = \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1}$.

$\bullet f(J) = I$. Donc le rapport de f est égal à $\frac{\Omega I}{\Omega J} = \frac{\Omega I}{\Omega A} \cdot \frac{\Omega A}{\Omega J} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1} = \frac{2}{\sqrt{3}-1} = \sqrt{3} + 1$.

4) a) $\bullet g$ est une similitude indirecte telle que $g(\Omega) = \Omega$ et $g(J) = I$.

$\bullet f \circ S_{(\Omega J)}$ est la composée d'une similitude directe et d'un antidéplacement ($S_{(\Omega J)}$),

donc $f \circ S_{(\Omega J)}$ est une similitude indirecte. ($S_{(\Omega J)}$ est une similitude indirecte).

On vérifie facilement que $f \circ S_{(\Omega J)}(\Omega) = \Omega$ et $f \circ S_{(\Omega J)}(J) = I$.

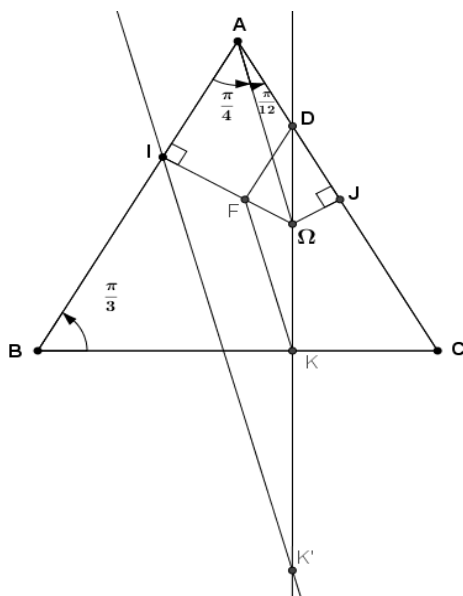
Ainsi g et $f \circ S_{(\Omega J)}$ sont deux similitudes indirectes qui coïncident en deux points distincts donc $g = f \circ S_{(\Omega J)}$.

b) $\bullet$ Méthode 1: $g = f \circ S_{(\Omega J)}$ et $S_{(\Omega J)}$ est une similitude indirecte de rapport 1.

Donc le rapport de g est celui de f c'est à dire $\sqrt{3} + 1$.

$\bullet$ Méthode 2: $g(J) = I$ alors le rapport de g est $\frac{\Omega I}{\Omega J} = \sqrt{3} + 1$.

- c) $g(J) = I$ donc l'axe de g est la droite qui porte la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{I\Omega J}$.
 Or $\left(\overrightarrow{\Omega J}, \overrightarrow{\Omega D}\right) \equiv \left(\overrightarrow{\Omega D}, \overrightarrow{\Omega I}\right) [2\pi]$, alors la droite (ΩD) porte la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{I\Omega J}$.
 Ainsi l'axe de g est la droite (ΩD) .
- d) g est la similitude indirecte de centre Ω , de rapport $\sqrt{3} + 1$ et d'axe (ΩD) donc la forme réduite de g est $g = h_{(\Omega, \sqrt{3}+1)} \circ S_{(\Omega D)} = S_{(\Omega D)} \circ h_{(\Omega, \sqrt{3}+1)}$
 h est l'homothétie de centre Ω , de rapport $\frac{\Omega I}{\Omega F} = \frac{\Omega I}{\Omega J} = \sqrt{3} + 1$. Donc $g = h \circ S_{(\Omega D)}$.
 Ou bien : $g = f \circ S_{(\Omega J)} = h \circ R \circ S_{(\Omega J)} = h \circ S_{(\Omega D)} \circ S_{(\Omega J)} \circ S_{(\Omega J)} = h \circ S_{(\Omega D)}$.
- e) K est un point de l'axe de g donc $K' = g(K) = h \circ S_{(\Omega D)}(K) = h(K)$.
 * $h(K) = K'$ et $h(F) = I$
 * Le point K' est donc le point d'intersection de la droite (ΩK) avec la droite passant par I et parallèle à la droite (FK) .



Exercice 2

- 1) a) $\overrightarrow{EC} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{ED} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ d'où $\overrightarrow{EC} \wedge \overrightarrow{ED} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ or $\overrightarrow{AH} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{EC} \wedge \overrightarrow{ED} = \overrightarrow{AH}$.
- b) L'aire du triangle ECD est égale à : $\frac{1}{2} \|\overrightarrow{EC} \wedge \overrightarrow{ED}\| = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{AH}\| = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
- c) Le volume du tétraèdre AECD est : $v = \frac{1}{6} |(\overrightarrow{EC} \wedge \overrightarrow{ED}) \cdot \overrightarrow{EA}|$. Avec $\overrightarrow{EA} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, On trouve $v = \frac{1}{6}$.
- 2) a) • $C \in (AC) \cap (DCG)$ d'où $h(C) \in h(AC) \cap h(DCG)$.
 $h(AC) = (AC)$ car le centre de h appartient à (AC) et $h(DCG)$ est le plan passant

par M et parallèle au plan (DCG).

Comme $(AC) \cap h(DCG) = \{N\}$ alors $h(C) = N$.

• $C \in (AG) \cap (DCG)$ d'où $h(G) \in h(AG) \cap h(DCG)$.

$h(AG) = (AG)$ et $(AG) \cap h(DCG) = \{P\}$ alors $h(G) = P$.

b) $h(E)$ est le point d'intersection du plan $h(ECD)$ avec la droite $(AE) = h(AE)$. Donc $h(E) = K$.

($h(ECD)$ est le plan parallèle à (ECD) et passant par M).

Ainsi l'image par h du tétraèdre $AECD$ est le tétraèdre $AKMN$.

Par la suite $V(AKMN) = \left(\frac{3}{4}\right)^3 \times \frac{1}{6}$.

3) a) **Méthode 1** : une équation du plan (DCG) est $y - 1 = 0$ d'où $d(I, (DCG)) = \frac{1}{2}$,

par conséquent : le plan (DCG) coupe la sphère (S) suivant un cercle (C) de rayon

$$r = \sqrt{R^2 - d(I, (DCG))^2} = \sqrt{\frac{3}{4} - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Le centre de (C) est le point H du plan (DCG) vérifiant $\overrightarrow{IH} = \alpha \overrightarrow{AD}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

(Le vecteur $\overrightarrow{AD}$ est normal au plan (DCG)). On trouve $H\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}\right)$.

Méthode 2 : Remarquons que les points D, C et G (qui ne sont pas alignés) appartiennent à (S), alors le plan (DCG) coupe la sphère (S) suivant le cercle (C) circonscrit au triangle DCG (qui est rectangle en C). Le centre du cercle (C) est donc le milieu du segment [DG]

c'est-à-dire le point de coordonnées $\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}\right)$ et le rayon de (C) est $\frac{DG}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

b) $h(S) = (S')$, $h(DCG) = (MNP)$ et $(S) \cap (DCG) = (C)$.

Donc le plan (MNP) coupe la sphère (S') suivant le cercle (C') = $h(C)$.

(C') est un cercle de centre le point $H' = h(H)$ et de rayon $R' = \frac{3}{4}R = \frac{3\sqrt{2}}{8}$.

On trouve $H'\left(\frac{3}{8}, \frac{3}{4}, \frac{3}{8}\right)$.

Exercice 3

1) a) 53 est premier et x est un nombre premier avec 53 donc d'après Fermat :

$x^{52} \equiv 1 \pmod{53}$. Le reste modulo 53 de x^{52} est égal à 1.

b) Soit k un entier naturel, on écrit $x^{52k+1} = (x^{52})^k \cdot x$

Comme $x^{52} \equiv 1 \pmod{53}$ alors $x^{52k+1} \equiv x \pmod{53}$.

2) $(2^9)^{29} = 2^{9 \times 29}$ et $9 \times 29 = 261 = 1 + 52 \times 5$. Comme 2 est premier avec 53,

alors d'après 1)b) $(2^9)^{29} \equiv 2 \pmod{53}$ d'où 2^9 est solution de l'équation (E_1) .

3) a) Soit $d = x \wedge 53$.

d divise x donc d divise x^{29} et d divise 53 donc d divise 2. Car $x^{29} \equiv 2 \pmod{53}$.

($x^{29} \equiv 2 \pmod{53}$) alors il existe $p \in \mathbb{Z}$ tel que $x^{29} = 2 + 53p$ c'est à dire $x^{29} - 53p = 2$)

Donc $d = 1$ ou $d = 2$. Comme 2 ne divise pas 53 alors $d = 1$.

b) x une solution de l'équation (E_1) . D'après 3)a) x est premier avec 53.

$$261 = 5x \cdot 52 + 1 \text{ donc } x^{261} \equiv x \pmod{53} \text{ d'après 1) b).}$$

c) x est une solution de (E_1) alors $x^{29} \equiv 2 \pmod{53}$ d'où $(x^{29})^9 \equiv 2^9 \pmod{53}$. (I)

Or $29 \times 9 = 261$ donc $(x^{29})^9 \equiv x^{261} \pmod{53}$. D'après : 3)b) $x^{261} \equiv x \pmod{53}$. (II)

(I) et (II) donnent $x \equiv 2^9 \pmod{53}$.

4) a) $2^9 = 512 = 9 \times 53 + 35$ d'où $2^9 \equiv 35 \pmod{53}$

b) • Si x est une solution de (E_1) alors $x \equiv 2^9 \pmod{53}$, d'après 3)c)

• Si $x \equiv 2^9 \pmod{53}$ alors $x^{29} \equiv (2^9)^{29} \pmod{53}$

et comme $(2^9)^{29} \equiv 2 \pmod{53}$ (car 2^9 solution de (E_1)) alors $x^{29} \equiv 2 \pmod{53}$.

D'où x solution de (E_1) .

Conclusion : x solution de $(E_1) \Leftrightarrow x \equiv 2^9 \pmod{53}$.

Or $2^9 \equiv 35 \pmod{53}$ d'après 4)a), d'où les solutions de l'équation (E_1) sont les entiers $53k + 35$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

5) a) $71 \times 3 - 53 \times 4 = 213 - 212 = 1$ donc $(3, 4)$ solution de (E_2) .

b) • Soit (u, v) une solution de (E_2)

Des égalités : $71u - 53v = 1$ et $71 \times 3 - 53 \times 4 = 1$ on déduit que $71(u - 3) = 53(v - 4)$

Comme $71 \wedge 53 = 1$ alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $v - 4 = 71k$ (lemme de Gauss)

Ainsi $S_{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}} \subset \{ (u, 4 + 71k), (u, k) \in \mathbb{Z}^2 \}$

• Soit $(u, k) \in \mathbb{Z}^2$,

$(u, 4 + 71k)$ est une solution de $(E_2) \Leftrightarrow 71u - 53(4 + 71k) = 1$

$$\Leftrightarrow 71u - 53(4 + 71k) = 71 \times 3 - 53 \times 4$$

$$\Leftrightarrow 71u - 53 \cdot 71k = 71 \times 3$$

$$\Leftrightarrow u - 53 \cdot k = 3$$

$$\Leftrightarrow u = 3 + 53k$$

Par la suite $\{ (u, 4 + 71k), (u, k) \in \mathbb{Z}^2 \} \subset S_{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}}$ si et seulement si $u = 3 + 53k$.

Conclusion : $S_{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}} = \{ (3 + 53k, 4 + 71k), k \in \mathbb{Z} \}$

Remarque : On pourra appliquer le lemme de Gauss deux fois : On exprime u et v en fonction de k et k' puis on vérifie que $k=k'$.

6) Soit $x \in \mathbb{Z}$,

$$\bullet \begin{cases} x \equiv 34 \pmod{71} \\ x^{29} \equiv 2 \pmod{53} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \equiv 34 \pmod{71} \\ x \equiv 35 \pmod{53} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 34 + 71u, & u \in \mathbb{Z} \\ x = 35 + 53v, & v \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Alors $71u - 53v = 1$. Donc (u, v) est solution de l'équation (E_2) .

Par la suite il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\begin{cases} u = 3 + 53k \\ v = 4 + 71k \end{cases}$.

Ainsi $x = 34 + 71(3 + 53k) = 247 + 3763k, k \in \mathbb{Z}$.

réciroquement :

si $x = 247 + 3763 k$, $k \in \mathbb{Z}$ alors

$$\bullet x = 71 \times 3 + 34 + 71x(53 k) \equiv 34 \pmod{71}$$

$$\bullet x = 35 + 53 \times 4 + 53x(71 k) \equiv 35 \pmod{53}. \text{ On sait que } 2^{29} \equiv 35 \pmod{53}.$$

Conclusion : l'ensemble des solutions du système est $S_{\mathbb{Z}} = \{ 247 + 3763 k, k \in \mathbb{Z} \}$.

Exercice 4

1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{e^x - 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{e^x}{x^2} - \frac{1}{x^2}} = +\infty.$$

(C_f) admet au voisinage de $+\infty$, une branche parabolique de direction $(O, \vec{j})$.

2) a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{e^x - 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \sqrt{\frac{e^x - 1}{x}} = +\infty$ car $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$.

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = +\infty \text{ donc } f \text{ n'est pas dérivable à droite en } 0.$$

La courbe (C_f) admet au point d'abscisse 0 une demi-tangente verticale.

b) Pour tout $x \in]0, +\infty[$, $f'(x) = \frac{e^x}{2\sqrt{e^x - 1}}$.

En effet: la fonction dérivée de $u: x \mapsto e^x - 1$ est la fonction $u': x \mapsto e^x$ et $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$.

(u est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $u(x) > 0, \forall x \in]0, +\infty[$)

c)

x	0	$+\infty$
f'(x)		+
f	0	$+\infty$

d) $f(\ln(2)) = 1$ et la fonction f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$:

$$x \in [0, \ln 2] \Leftrightarrow f(x) \leq 1 \Leftrightarrow \sqrt{e^x - 1} \leq 1 \Leftrightarrow \sqrt{e^x - 1} \times \sqrt{e^x - 1} \leq 1 \times \sqrt{e^x - 1} \\ \Leftrightarrow e^x - 1 \leq \sqrt{e^x - 1}$$

(On sait que $\sqrt{e^x - 1} \geq 0$ pour tout $x \geq 0$).

3) On vérifie que pour tout $x \in]0, +\infty[$, $f''(x) = \frac{e^x(e^x - 2)}{4(\sqrt{e^x - 1})^3}$.

x	0	$\ln(2)$	$+\infty$
f''(x)		0	+

$f''(x)$ s'annule en $\ln(2)$ en changeant de signe donc le point $B(\ln(2), 1)$ est un point d'inflexion de (C_f) .

4) a) D'après 2) d): $x \in [0, \ln 2] \Leftrightarrow e^x - 1 \leq f(x)$. b)

Par la suite :

- si $x \in [0, \ln 2]$ alors (C_f) au-dessus de Γ .
- si $x \in [\ln(2), +\infty[$ alors (C_f) au-dessous de Γ .

(Remarque : $(C_f) \cap \Gamma = \{B\}$)

5) a) La fonction g est dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.

Pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, $g'(x) = 1 + \tan^2(x) > 0$

donc g est strictement croissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.

Ainsi g réalise une bijection de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ sur $g\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right[\right)$.

De la continuité g sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ et des égalités $g(0) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} g(x) = +\infty$.

On déduit que $g\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right[\right) = [0, +\infty[$.

b) $g^{-1}(0) = 0$ et $g^{-1}(1) = \frac{\pi}{4}$. Car $g(0) = 0$ et $g\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$.

c) Pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, $g'(x) \neq 0$ alors g^{-1} est dérivable sur $g\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right[\right) = [0, +\infty[$.

Soit $x \in [0, +\infty[$ et $y \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, $(g^{-1}(x) = y) \Leftrightarrow (g(y) = x) \Leftrightarrow (\tan y = x)$, ainsi :

$$\text{pour tout } x \in [0, +\infty[, \quad (g^{-1})'(x) = \frac{1}{g'(g^{-1}(x))} = \frac{1}{g'(y)} = \frac{1}{1 + (\tan y)^2} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g^{-1}(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g^{-1}(x) - g^{-1}(0)}{x - 0} = (g^{-1})'(0) = 1.$$

6) a) f est continue sur $[0, +\infty[$ donc F est la primitive de f sur $[0, +\infty[$ qui s'annule en 0. ($F(0) = 0$)

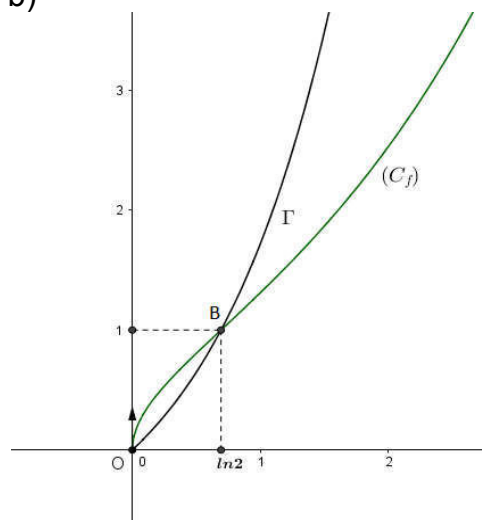
ainsi pour tout $x \in [0, +\infty[$ $F'(x) = f(x)$.

$$\bullet G(x) = 2 \left(f(x) - (g^{-1} \circ f)(x) \right).$$

G est dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour tout $x \in]0, +\infty[$,

$$G'(x) = 2 \left[f'(x) - f'(x) \cdot (g^{-1})'(f(x)) \right] = 2f'(x) \left[1 - (g^{-1})'(f(x)) \right]$$

$$= 2f'(x) \left(1 - \frac{1}{1 + (f(x))^2} \right) = 2f'(x) \left(1 - \frac{1}{1 + e^x - 1} \right) = 2 \cdot \frac{e^x}{2\sqrt{e^x - 1}} \left(\frac{e^x - 1}{e^x} \right) = \sqrt{e^x - 1} = f(x).$$



Donc $F'(x) = G'(x)$ pour tout $x \in]0, +\infty[$.

b) Pour tout $x \in]0, +\infty[$, $F'(x) = G'(x)$,

donc il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que ,pour tout $x \in]0, +\infty[$, $F(x) = G(x) + k$.

Les fonctions F et G sont continues en 0 et $F(0) = G(0)$ alors $k = 0$.

(En effet $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} G(x) + k$ c'est à dire $F(0) = G(0) + k$)

Conclusion: pour tout $x \in]0, +\infty[$, $F(x) = G(x)$.

c) Pour tout $x \in [0, \ln(2)]$, $e^x - 1 \leq f(x)$.

$$A = \int_0^{\ln(2)} (f(t) - (e^t - 1)) dt = G(\ln(2)) - [e^t - t]_0^{\ln(2)} = 2(1 - g^{-1}(1)) - (2 - \ln(2) - 1). \text{D'où } A = 1 + \ln 2 - \frac{\pi}{2}.$$

7)a) La fonction G_n est dérivable sur $]\ln(n), +\infty[$ et pour tout $x \in]\ln(n), +\infty[$,

$$\begin{aligned} G'_n(x) &= 2 \left((f_n)'(x) - \sqrt{n} \frac{(f_n)'(x)}{\sqrt{n}} \cdot (g^{-1})' \left(\frac{f_n(x)}{\sqrt{n}} \right) \right) = 2(f_n)'(x) \left(1 - \sqrt{n} \frac{1}{1 + \left(\frac{f_n(x)}{\sqrt{n}} \right)^2} \right) \\ &= 2(f_n)'(x) \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{e^x - n}{n}} \right) = 2 \frac{e^x}{2\sqrt{e^x - n}} \left(\frac{e^x - n}{e^x} \right) = \sqrt{e^x - n} = f_n(x). \end{aligned}$$

La fonction $u : x \mapsto \int_{\ln(n)}^x f_n(t) dt$ est dérivable sur $[\ln(n), +\infty[$ et $u'(x) = f_n(x)$.

(Voir l'explication en 6)a))

Donc pour tout $x \in]\ln(n), +\infty[$, $G'_n(x) = u'(x)$.

Alors il existe $k \in \mathbb{R}$, tel que pour tout $x \in]\ln(n), +\infty[$, $G_n(x) = u(x) + k$.

comme $\lim_{x \rightarrow \ln n} G_n(x) = \lim_{x \rightarrow \ln n} [u(x) + k]$, de plus G_n et u sont continues en $\ln(n)$,

alors $G_n(\ln n) = u(\ln n) + k$ et puisque $G_n(\ln(n)) = u(\ln(n)) = 0$ on trouve $k = 0$.

Conclusion : Pour tout $n \geq 2$ et pour tout $x \in [\ln(n), +\infty[$, $G_n(x) = \int_{\ln(n)}^x f_n(t) dt$.

b) Soit $n \geq 2$; $n > 1$ alors $-n < -1$ d'où $e^x - n < e^x - 1$.

Comme $n \geq 2$ et $x \geq \ln(n)$, $e^x - n \geq 0$ et $e^x - 1 \geq 0$.

D'où pour tout $n \geq 2$ et pour tout $x \geq \ln(n)$, $\sqrt{e^x - n} < \sqrt{e^x - 1}$.

Or d'après 4)a), $f(x) \leq e^x - 1$ pour tout $x \in [\ln(n), +\infty[$, car $(\ln(n) \geq \ln(2))$.

Donc $f_n(x) \leq e^x - 1$, pour tout $n \geq 2$ et pour tout $x \in [\ln(n), +\infty[$.

$$\begin{aligned}
c) A_n &= \int_{\ln(n)}^{\ln(n+1)} \left((e^x - 1) - f_n(x) \right) dx = \left[e^x - x \right]_{\ln(n)}^{\ln(n+1)} - \left[G_n(x) \right]_{\ln(n)}^{\ln(n+1)} \\
&= (n+1 - \ln(n+1) - n + \ln(n)) - G_n(\ln(n+1)) \\
&= 1 + \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) - 2 \left(1 - \sqrt{n} g^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \right) = 2 \sqrt{n} g^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) + \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) - 1.
\end{aligned}$$

$$d) \bullet \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = 0 \quad \text{car} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+1} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \ln(x) = 0$$

$$\bullet \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} g^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{g^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = 1 \quad \text{car} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g^{-1}(x)}{x} = 1 \quad \text{d'après 5)d).}$$

$$D'où \lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = 2 - 1 = 1.$$

Le sujet comporte six pages numérotées de 1/6 à 6/6.
Les pages 5/6 et 6/6 sont à rendre avec la copie.

Exercice 1 (3 points)

Pour chacune des questions suivantes une seule des trois réponses proposées est exacte.

Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondante à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

On représente une expérience aléatoire par l'arbre de probabilité ci-contre :

1) La probabilité de l'évènement $\bar{B}$ sachant A est égale à :

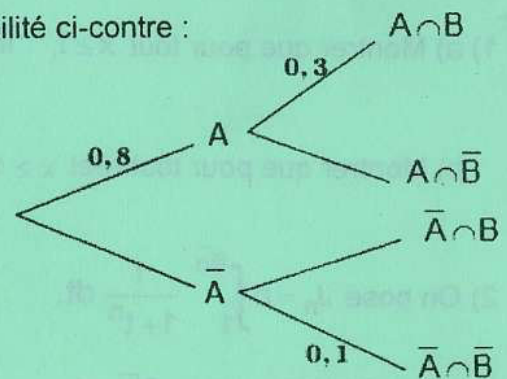
- a) 0,7 b) 0,24 c) 0,11

2) La probabilité de l'évènement $\bar{A} \cap B$ est égale à :

- a) 0,11 b) 0,18 c) 0,92

3) La probabilité de l'évènement A sachant B est égale à :

- a) $\frac{3}{7}$ b) $\frac{5}{7}$ c) $\frac{4}{7}$



Exercice 2 (6 points)

Le plan est orienté.

Dans la figure 1 de l'annexe 1 jointe, ABC est un triangle direct tel que $\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}\right) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$

et $\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right) \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi]$. Les points I , J et K sont les pieds des hauteurs du triangle ABC issues respectivement des sommets A , B et C . Le point E est le milieu du segment $[AC]$.

1) Montrer que le triangle AIE est équilatéral direct.

2) Soit S la similitude directe de centre A , de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $-\frac{\pi}{4}$.

On note Δ est la médiatrice du segment $[IE]$ et on pose $f = S \circ S_{\Delta}$.

a) Montrer que $S(I) = B$. En déduire que $f(E) = B$.

b) Montrer que f est une similitude indirecte de centre A et de rapport $\sqrt{2}$.

c) Caractériser $f \circ f$. En déduire que $f(B) = C$.

d) Montrer que l'image par f de la droite (BJ) est la droite (CK) . En déduire que $f(J) = K$.

3) Soit g la similitude indirecte telle que $g(C) = A$ et $g(K) = I$.

a) En remarquant que le triangle BCK est rectangle, isocèle et direct, montrer que le point B est le centre de g .

b) On pose $D = g(A)$. Montrer que le point D appartient à la droite (BI) .

c) Justifier que $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right) \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi]$. Construire alors le point D .

4) On pose $\varphi = g \circ f$.

a) Montrer que φ est une similitude directe. Déterminer $\varphi(A)$ et $\varphi(B)$.

b) Montrer qu'une mesure de l'angle de φ est $\frac{7\pi}{6}$.

5) Soit Ω le centre de φ .

a) Vérifier que $D = \varphi \circ \varphi \circ \varphi(E)$. En déduire que $\left(\overrightarrow{\Omega E}, \overrightarrow{\Omega D}\right) \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi]$.

b) On pose $F = \varphi \circ \varphi \circ \varphi(J)$. Montrer les droites (FD) et (JE) sont perpendiculaires.

c) Vérifier que $F = \varphi \circ \varphi(I)$. En remarquant que $IB = IE$, montrer que $FD = FA$.

d) Construire le point F . En déduire une construction du point Ω .

Exercice 3 (4 points)

Soit dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2 - \left(\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z + 1 = 0$.

1) a) Justifier que l'équation (E) possède deux solutions distinctes. (On ne demande pas de déterminer ces solutions).

b) Déterminer $z_1 + z_2$. En déduire que les solutions de l'équation (E) ne sont pas conjuguées.

On désigne par z_1 la solution telle que $|z_1| > 1$ et z_2 l'autre solution.

On considère, dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, les points A, B, I et J d'affixes respectives $z_1, z_2, 1$ et -1 .

2) a) Soit C le milieu du segment $[AB]$. Montrer que l'affixe du point C est $z_C = \frac{\sqrt{3}}{2} e^{i\frac{\pi}{6}}$.

b) En utilisant $(z_2 - z_1)^2 = (z_2 + z_1)^2 - 4z_1z_2$, montrer que $(z_2 - z_1)^2 = 4(z_C^2 - 1)$.

c) Montrer que $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CI}\right) + \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CJ}\right) \equiv 0 [2\pi]$.

En déduire que la droite (AB) porte la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{ICJ}$.

3) Soit (C) le cercle circonscrit au triangle IAJ . On note K le centre de (C) et z_K l'affixe du point K .

a) Prouver que K est un point de l'axe $(O, \vec{v})$. On pose $z_K = iy$, où y est un réel non nul.

b) Soit M un point du plan d'affixe z . Justifier que $(M \in (C))$ équivaut à $(|z - iy|^2 = |1 - iy|^2)$.

En déduire que $(M \in (C))$ équivaut à $(z\bar{z} + iy(z - \bar{z}) = 1)$.

c) En remarquant que $z_1 = \frac{1}{z_2}$, montrer que le point B appartient au cercle (C) .

4) a) Construire le point C dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

b) Construire la droite (AB) et la médiatrice du segment $[AB]$.

c) Déduire une construction des points A et B , images des solutions de l'équation (E) .

Exercice 4 (7 points)

Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \ln\left(\frac{x^2}{x+1}\right)$.

On désigne par (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

A) 1) a) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$. Interpréter graphiquement.

b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$. Interpréter graphiquement.

2) a) Montrer que pour tout $x \in]0, +\infty[$, $f'(x) = \frac{x+2}{x(x+1)}$.

b) Dresser le tableau de variation de f .

c) Montrer que f réalise une bijection de $]0, +\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

3) a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^2 = x + 1$.

b) On note α la solution positive. Vérifier que la deuxième solution est égale à $-\frac{1}{\alpha}$.

c) Montrer que la courbe (C_f) coupe l'axe des abscisses au point A d'abscisse α .

d) Montrer qu'une équation de la tangente T à (C_f) au point A est $y = \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^3}\right)(x - \alpha)$.

e) Vérifier que la tangente T passe par le point $B\left(0, -1 - \frac{1}{\alpha^2}\right)$.

4) Dans la figure 2 de l'annexe 2 jointe, on a tracé dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, la droite D d'équation

$$y = x + 2 \text{ et la courbe } \Gamma \text{ de la fonction } x \mapsto x^2 + 1.$$

a) Construire les points A et B.

b) Construire la tangente T et tracer la courbe (C_f) .

B) Soit n un entier naturel non nul.

On pose pour tout $x \geq 1$, $G_n(x) = \int_1^x f(t^n) dt$.

1) a) Montrer que pour tout $x \geq 1$, $\ln\left(\frac{1}{2}\right)(x-1) \leq G_n(x) \leq f(x^n)(x-1)$.

b) Montrer que pour tout réel $x \geq 1$, $G_n(x) = x f(x^n) - \ln\left(\frac{1}{2}\right) - n(x-1) - \int_1^x \frac{n}{1+t^n} dt$.

2) On pose $J_n = n \int_1^{\sqrt[n]{a}} \frac{1}{1+t^n} dt$.

a) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

b) En utilisant B1)a), montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} G_n(\sqrt[n]{a}) = 0$.

c) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[n]{a} - 1}{\frac{1}{n}} = \ln(a)$.

d) Déterminer alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n$.

Section : N° d'inscription : Série :
Nom et Prénom :
Date et lieu de naissance :

Signatures des surveillants
.....
.....

✂
.....

Épreuve : Mathématiques Section : Mathématiques
Annexe 1 à rendre avec la copie

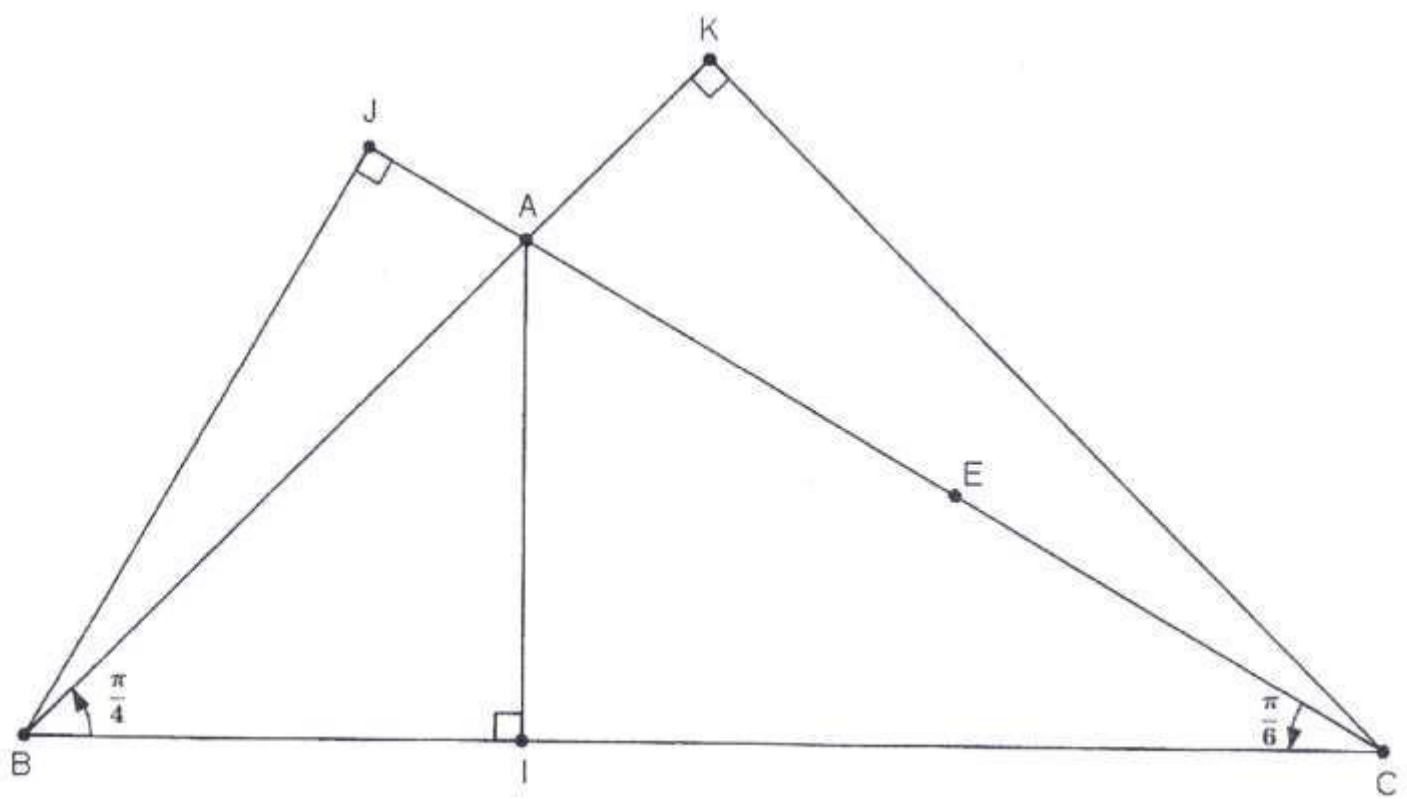


Figure 1

NE RIEN ECRIRE ICI

Épreuve : Mathématiques

Section : Mathématiques

Annexe 2 à rendre avec la copie

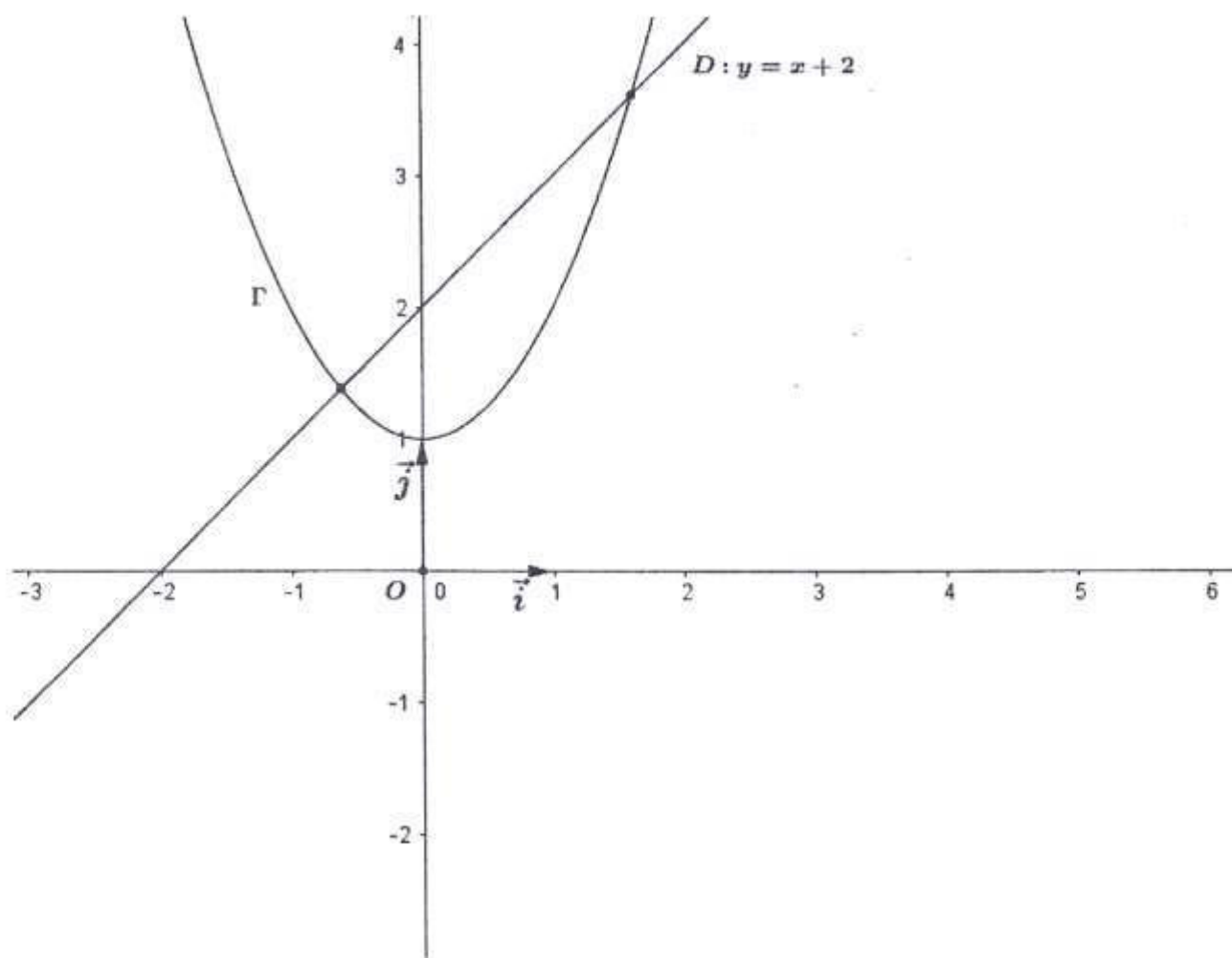


Figure 2

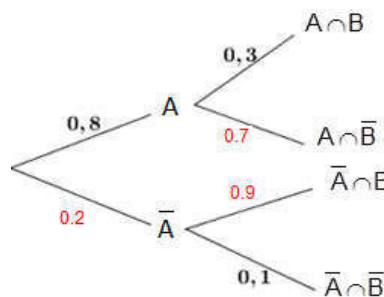
Exercice 1

Il suffit de compléter l'arbre de probabilité :

1) a) 0.7

2) b) $0.18 = 0.2 \times 0.9$

$$3) \text{ c) } \frac{p(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.8 \times 0.3}{0.8 \times 0.3 + 0.2 \times 0.9} = \frac{24}{42} = \frac{4}{7}.$$



Exercice 2

Le triangle AIC est rectangle en I et $(\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$ car $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CI}) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$, puisque $I \in [CB]$.

De plus $[IE]$ est une médiane dans ce triangle donc $IE = AE$ donc AIE est équilatéral.

AIE est direct car $(\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AE}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$.

2) a) ABI est un triangle rectangle en I, isocèle et direct donc

$$AB = \sqrt{2} AI \text{ et } (\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AB}) \equiv -\frac{\pi}{4}[2\pi] \text{ par la suite } S(I) = B.$$

• $S_{\Delta}(E) = I$ alors $f(E) = S \circ S_{\Delta}(E) = S(I) = B$.

b) f est la composée d'une similitude directe S de centre A et de rapport $\sqrt{2}$ et d'une similitude indirecte S_{Δ} de rapport 1 et comme $A \in \Delta$ alors $f(A) = S \circ S_{\Delta}(A) = A$ ($f(A) = A$) par la suite f est une similitude indirecte de centre A et de rapport $\sqrt{2} \times 1 = \sqrt{2}$.

c) $f \circ f$ est une homothétie de centre A et de rapport : $\sqrt{2}^2 = 2$.

* $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AE}$ donc $f \circ f(E) = C$.

* $f \circ f(E) = C$ d'où $f(f(E)) = C$ or $f(E) = B$ alors $f(B) = C$.

d) * $(BJ) \perp (AE)$ et $f(B) = C$ donc :

$f(BJ)$ est la droite passant par C et perpendiculaire à la droite $f(AE) = (AB)$. D'où $f(BJ) = (CK)$.

* $J \in (BJ) \cap (AC)$ donc $f(J) \in f(BJ) \cap f(AC) = (CK) \cap (AB) = \{K\}$. Ainsi $f(J) = K$. ($f(AC) = f(AE)$).

3) a) On a $g(C) = A$ et $g(K) = I$. On note $B' = g(B)$.

le triangle KBC est rectangle en K, isocèle et direct donc son image $IB'A$ par g est un triangle rectangle en I, isocèle et indirect. Or le triangle IBA est rectangle en I, isocèle et indirect. D'où $B = B'$ et par la suite B est le centre de g.

b) $g(B) = B$ et $g(K) = I$ et A appartient à la droite (BK) donc $D = g(A)$ est un point de la droite (BI).

c) $g(C) = A$, $g(B) = B$ et $g(A) = D$; g est une similitude indirecte d'où

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) \equiv -(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA})[2\pi] \equiv (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})[2\pi] \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi].$$

On construit un point T tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AT}) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$.

Le point D est l'intersection de la droite (BI) avec la demi-droite $[AT)$.

4) a) φ est la composée de deux similitudes indirectes donc c'est une similitude directe.

• $\varphi(A) = \text{gof}(A) = g(A) = D$ et $\varphi(B) = \text{gof}(B) = g(C) = A$.

b) $\varphi(A) = D$ et $\varphi(B) = A$. Soit θ une mesure de l'angle de φ .

$$\theta \equiv \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DA} \right) [2\pi] \equiv \pi + \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD} \right) [2\pi] \equiv \frac{7\pi}{6} [2\pi].$$

5) • $\varphi(E) = \text{gof}(E) = g(B) = B$, $\varphi(B) = A$ et $\varphi(A) = D$. Donc $\varphi \circ \varphi \circ \varphi(E) = D$.

• $\varphi \circ \varphi \circ \varphi$ est la composée de 3 similitudes directes de même centre Ω et de même angle $\frac{7\pi}{6}$ donc c'est une similitude directe de centre Ω et d'angle $3 \times \frac{7\pi}{6} \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi]$.

• $\varphi \circ \varphi \circ \varphi(E) = D$ donc $(\overrightarrow{\Omega E}, \overrightarrow{\Omega D}) \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi]$.

b) $\varphi \circ \varphi \circ \varphi(E) = D$ et $\varphi \circ \varphi \circ \varphi(J) = F$ donc $\left(\overrightarrow{EJ}, \overrightarrow{DF} \right) \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi]$, donc $(EJ) \perp (DF)$.

c) • $F = \varphi \circ \varphi \circ \varphi(J)$ et $\varphi(J) = g \circ f(J) = g(K) = I$ d'où $F = \varphi \circ \varphi(I)$

$$\begin{cases} \varphi \circ \varphi(I) = F \\ \varphi \circ \varphi(E) = A \\ \varphi \circ \varphi(B) = D \end{cases} \text{ et comme } IB = IE \text{ alors } FD = FA.$$

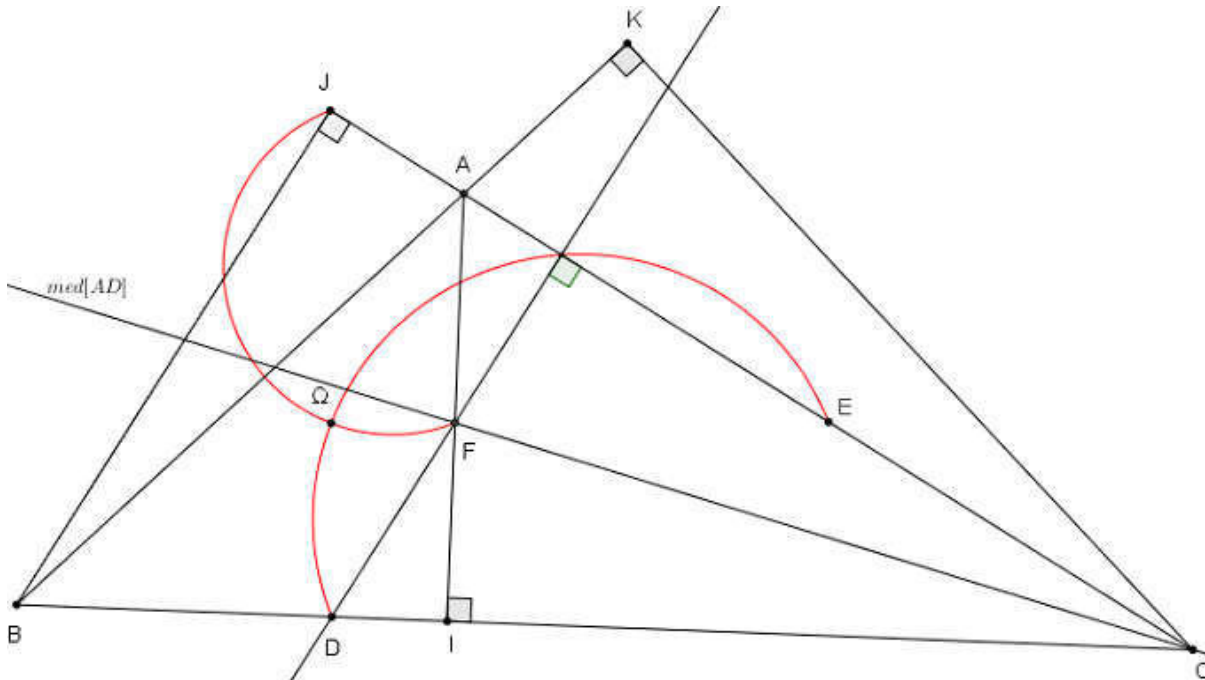
d) • Pour la construction du point D :

On utilise le fait que $FD = FA$ c'est à dire $F \in \text{med}[AD]$ et que $(FD) \perp (JE)$.

• $(\overrightarrow{\Omega E}, \overrightarrow{\Omega D}) \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi]$ donc Ω est un point du demi-cercle Γ_1 de diamètre $[ED]$. Voir figure

$(\overrightarrow{\Omega J}, \overrightarrow{\Omega F}) \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi]$ donc Ω est un point du demi-cercle Γ_2 de diamètre $[JF]$. Voir figure

• $\Omega \in \Gamma_1 \cap \Gamma_2$.



Exercice 3

1) a) Il suffit de vérifier que le discriminant de l'équation (E) est non nul.

b) $z_1 + z_2 = \frac{3}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \notin \mathbb{R}$ donc z_1 et z_2 ne sont pas conjugués.

2) a) $z_C = \frac{z_1 + z_2}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2} e^{i\frac{\pi}{6}}$

b) $(z_2 - z_1)^2 = (z_2 + z_1)^2 - 4z_1 z_2 = (2z_C)^2 - 4 = 4(z_C^2 - 1)$. Car $z_2 + z_1 = 2z_C$ et $z_1 z_2 = 1$.

c) $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CI} \right) + \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CJ} \right) \equiv \arg \left(\frac{1 - z_C}{z_2 - z_1} \right) + \arg \left(\frac{-1 - z_C}{z_2 - z_1} \right) [2\pi] \equiv \arg \left(\frac{1 - z_C}{z_2 - z_1} \cdot \frac{-1 - z_C}{z_2 - z_1} \right) [2\pi]$
 $\equiv \arg \left(\frac{z_C^2 - 1}{(z_2 - z_1)^2} \right) [2\pi] \equiv \arg \left(\frac{1}{4} \right) [2\pi] \equiv 0 [2\pi]$

d'où la droite (AB) porte la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{ICJ}$.

3) a) K est le centre d'un cercle passant par I et J donc K appartient à la médiatrice du segment [IJ].

La médiatrice du segment [IJ] est l'axe des ordonnées.

b) • $(M \in (C)) \Leftrightarrow KM = KI \Leftrightarrow |z - iy| = |1 - iy| \Leftrightarrow (|z - iy|^2 = |1 - iy|^2)$

$\Leftrightarrow (z - iy)(\bar{z} + iy) = (1 - iy)(1 + iy)$

$\Leftrightarrow z\bar{z} + iy(z - \bar{z}) + y^2 = 1 + y^2$

$\Leftrightarrow z\bar{z} + iy(z - \bar{z}) = 1$.

c) $A \in (C) \Leftrightarrow z_1 \bar{z}_1 + iy(z_1 - \bar{z}_1) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{z_2} \frac{1}{z_2} + iy \left(\frac{1}{z_2} - \frac{1}{z_2} \right) = 1$

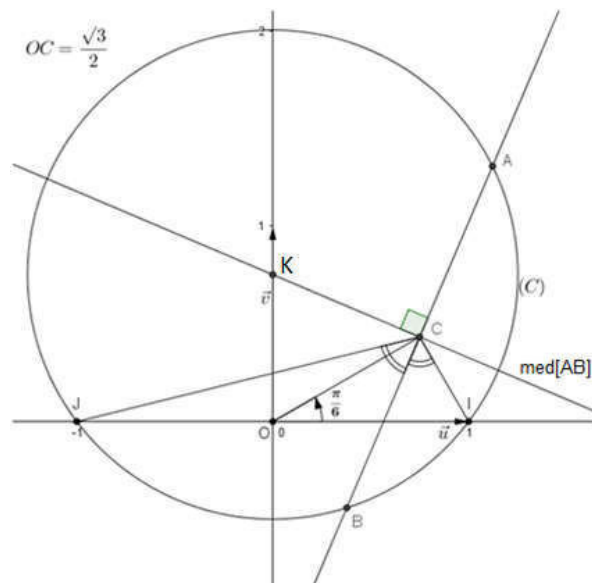
$\Leftrightarrow \frac{1}{z_2 \cdot z_2} (1 + iy(\bar{z}_2 - z_2)) = 1 \Leftrightarrow z_2 \bar{z}_2 + iy(z_2 - \bar{z}_2) = 1 \Leftrightarrow B \in (C).$

4) a) $z_C = \frac{\sqrt{3}}{2} e^{i\frac{\pi}{6}}$, Voir figure.

b) La droite (AB) porte la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{ICJ}$.

La médiatrice du segment [AB] est la perpendiculaire en C à la droite (AB).

c) Les points A et B sont les points d'intersection du cercle (C) avec la droite (AB). ($OA > OB$ car $|z_1| > 1$.)



Exercice 4

A) 1) a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{x+1} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$.

La droite d'équation $x = 0$ est une asymptote verticale à (C_f)

b) • $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ car $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$.

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 \frac{\ln(x)}{x} - \frac{\ln(x+1)}{x}$. (pour $x > 0$, $f(x) = \ln(x^2) - \ln(x+1) = 2\ln x - \ln(x+1)$)

* $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$,

* $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x+1} \cdot \frac{x+1}{x}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x+1} = 0$ car $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$

d'où $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$.

La courbe (C_f) admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction celle de $(0, \vec{i})$.

2) a) Pour tout $x > 0$,

$$f(x) = \ln\left(\frac{x^2}{x+1}\right) = 2\ln x - \ln(x+1).$$

$$\text{D'où } f'(x) = \frac{2}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{x+2}{x(x+1)}.$$

b) Tableau de variation

x	0	+
	∞	
f'(x)		+
f		$+\infty$

c) La fonction f est strictement croissante sur $]0, +\infty[$ donc f est une bijection de $]0, +\infty[$ sur $f(]0, +\infty[)$.

De la continuité de f sur $]0, +\infty[$ et des égalités $\lim_{0^+} f = -\infty$ et $\lim_{+\infty} f = +\infty$ on déduit que $f(]0, +\infty[) = \mathbb{R}$.

3) a) On trouve $x' = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $x'' = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

b) $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ d'où $-\frac{1}{\alpha} = -\frac{2}{1+\sqrt{5}} = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = x''$.

Soit $M(x, y)$ un point du plan.

$$M \in (C_f) \cap (O, \vec{i}) \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ y = f(x) \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \frac{x^2}{x+1} = 1 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x^2 = x+1. \\ y = 0 \end{cases}$$

Donc la courbe (C_f) coupe l'axe des abscisses en un seul point A d'abscisse $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

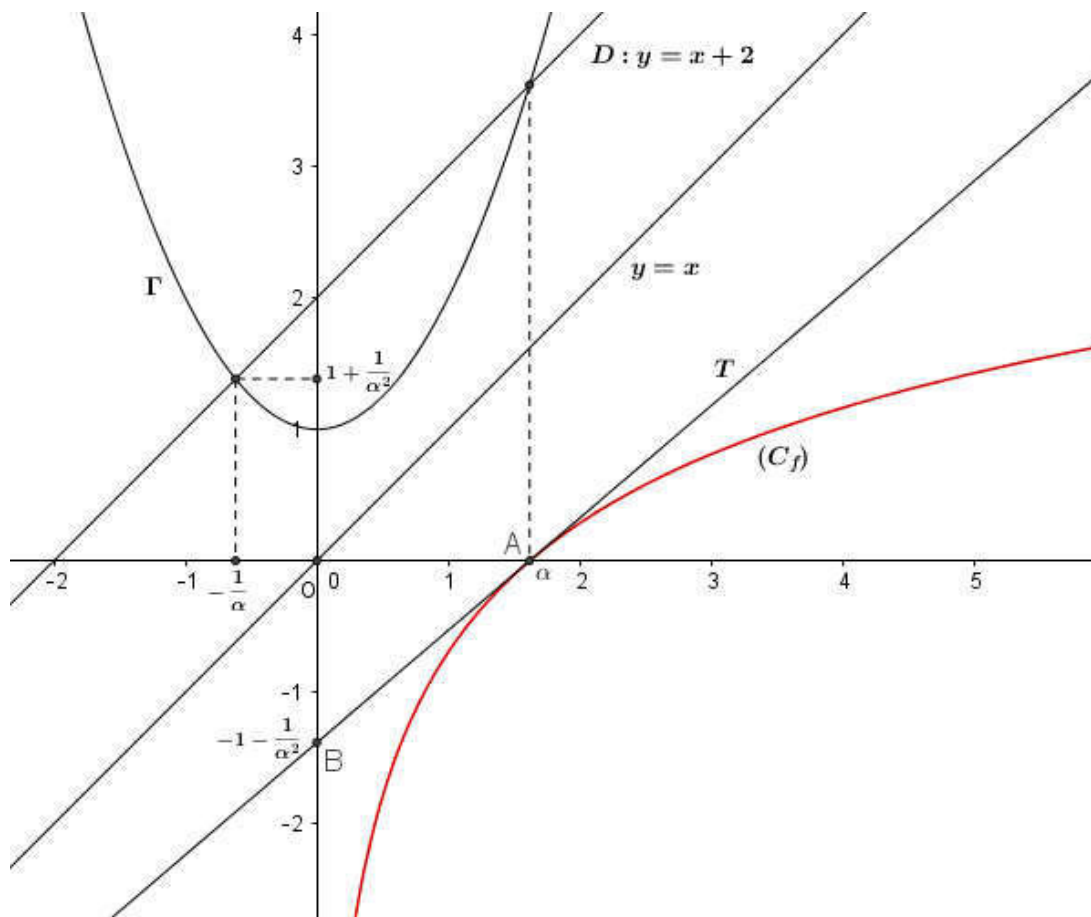
d) $T: y = f'(\alpha)(x - \alpha) + f(\alpha).$

$f(\alpha) = 0$ et $f'(\alpha) = \frac{\alpha+2}{\alpha(\alpha+1)} = \frac{\alpha^2+1}{\alpha^3}$ puisque $\alpha^2 = \alpha+1$, d'où $f'(\alpha) = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^3}.$

Par la suite $T: y = \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^3}\right)(x - \alpha).$

e) $B\left(0, -1 - \frac{1}{\alpha^2}\right)$ et $\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^3}\right)(0 - \alpha) = -1 - \frac{1}{\alpha^2}$ alors $B \in (T).$

4) a) et b)



B) 1) a) Soit $x \geq 1$ et $t \in [1, x],$

* $1 \leq t \leq x$ et $n \geq 1$ alors $1 \leq t^n \leq x^n$ or f est strictement croissante sur $[1, +\infty[$

donc $f(1) \leq f(t^n) \leq f(x^n)$ d'où $\int_1^x \ln\left(\frac{1}{2}\right) dt \leq \int_1^x f(t^n) dt \leq \int_1^x f(x^n) dt.$

Donc pour tout $x \geq 1,$ $\ln\left(\frac{1}{2}\right)(x-1) \leq G_n(x) \leq f(x^n)(x-1).$

b) $G_n(x) = \int_1^x f(t^n) dt$. On intègre par parties:

$$\text{Posons } \begin{cases} u(t) = f(t^n) \\ v'(t) = 1 \end{cases}, \begin{cases} u'(t) = n t^{n-1} \frac{t^n + 2}{t^n (t^n + 1)} = \frac{n}{t} \frac{t^n + 2}{(t^n + 1)} \\ v(t) = t \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } G_n(x) &= \left[t f(t^n) \right]_1^x - n \int_1^x \frac{t^n + 2}{t^n + 1} dt = x f(x^n) - f(1) - n \int_1^x \left(1 + \frac{1}{t^n + 1} \right) dt \\ &= x f(x^n) - \ln\left(\frac{1}{2}\right) - n(x-1) - \int_1^x \frac{n}{t^n + 1} dt. \end{aligned}$$

Autrement : vérifier l'égalité de deux fonctions (ont la même dérivée et coïncident en 1).

2) a) $\alpha > 1$ donc $\sqrt[n]{\alpha} > 1$

$$\text{D'après B)1)a) : } \ln\left(\frac{1}{2}\right) (\sqrt[n]{\alpha} - 1) \leq G_n(\sqrt[n]{\alpha}) \leq f\left((\sqrt[n]{\alpha})^n\right) (\sqrt[n]{\alpha} - 1).$$

$$\text{Or } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\alpha} = 1 ; (\sqrt[n]{\alpha} = \alpha^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n} \ln \alpha}) \text{ et } f\left((\sqrt[n]{\alpha})^n\right) = f(\alpha) = 0$$

$$\text{D'après le théorème de comparaison des limites } \lim_{n \rightarrow +\infty} G_n(\sqrt[n]{\alpha}) = 0.$$

$$\text{c) } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[n]{\alpha} - 1}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{1}{n} \ln(\alpha)} - 1}{\frac{1}{n} \ln(\alpha)} \cdot \ln(\alpha). \text{ Or } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln(\alpha) = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

$$\text{Par la suite } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[n]{\alpha} - 1}{\frac{1}{n}} = \ln(\alpha).$$

$$\text{d) } J_n = -G_n(\sqrt[n]{\alpha}) + \sqrt[n]{\alpha} f\left((\sqrt[n]{\alpha})^n\right) - \ln\left(\frac{1}{2}\right) - n(\sqrt[n]{\alpha} - 1).$$

$$* \lim_{n \rightarrow +\infty} G_n(\sqrt[n]{\alpha}) = 0.$$

$$* \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\alpha} f\left((\sqrt[n]{\alpha})^n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\alpha} f(\alpha) = 1 \times 0 = 0$$

$$* \lim_{n \rightarrow +\infty} n(\sqrt[n]{\alpha} - 1) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[n]{\alpha} - 1}{\frac{1}{n}} = \ln(\alpha).$$

$$\text{D'où } \lim_{n \rightarrow +\infty} J_n = -\ln\left(\frac{1}{2}\right) - \ln(\alpha) = \ln\left(\frac{2}{\alpha}\right).$$

RÉPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION ***** EXAMEN DU BACCALAURÉAT	Épreuve : MATHÉMATIQUES	
	Section : Mathématiques	
	Durée : 4 h	Coefficient : 4
SESSION 2016	Session principale	

Le sujet comporte cinq pages numérotées de 1/5 à 5/5
La page 5/5 est à rendre avec la copie.

Exercice 1 (5 points)

Le plan est orienté.

Dans la figure 1 de l'annexe jointe, ABC est un triangle direct, rectangle en A et tel que $AB < AC$.
La médiatrice du segment [BC] coupe les droites (AB), (AC) et (BC) respectivement en E, F et G.

1) Soit f la similitude directe de centre A et telle que $f(B) = F$.

- Déterminer l'angle de f .
- Montrer que l'image de la droite (BC) par f est la droite (GF).
- Déterminer $f(C)$.

2) Le cercle $\mathcal{C}_1$ de diamètre [BC] et le cercle $\mathcal{C}_2$ de diamètre [EF] se coupent en A et H.

- Montrer que $f(\mathcal{C}_1) = \mathcal{C}_2$.
- Soit $I = f(H)$. Construire le point I.
- Montrer que le quadrilatère HEIF est un rectangle.
- La droite (FI) coupe la droite (AE) en un point J. Montrer que $f(F) = J$.

3) Soit g la similitude indirecte de centre A et telle que $g(B) = F$.

- Montrer que $g = S_{(AC)} \circ f$.
- Soit $E' = f(E)$. Montrer que E' est un point de la droite (AC).
- Soit $F' = g(F)$ et $H' = g(H)$. Construire l'image par g du rectangle FHEI.

Exercice 2 (3 points)

On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2 - (1+2i)mz - (1-i)m^2 = 0$, où m est un nombre complexe non nul, d'argument $\theta \in]0, \pi[$.

1) a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

On note z_1 et z_2 les solutions de l'équation (E).

b) Montrer que ($z_1 z_2$ est un réel strictement positif) si et seulement si $\left(\theta = \frac{5\pi}{8} \right)$.

Dans la suite de l'exercice on prend $\theta = \frac{5\pi}{8}$.

2) Vérifier que $z_1 z_2 = |m|^2 \sqrt{2}$.

3) Soit t un réel strictement positif et $m = \frac{\sqrt{t}}{\sqrt[4]{2}} e^{i\frac{5\pi}{8}}$. On se propose de construire les points M_1 et M_2 ,

images des solutions z_1 et z_2 de l'équation (E), correspondant au nombre complexe m .

Dans la figure 2 de l'annexe jointe, $(O, \vec{u}, \vec{v})$ est un repère orthonormé direct ;

B et C sont les points d'affixes respectives $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ et t ;

E est le point d'intersection du demi-cercle $\mathcal{C}$ de diamètre $[BC]$ avec l'axe $(O, \vec{v})$.

a) Montrer que $OE^2 = OB \cdot OC$.

b) En déduire que $|m| = OE$.

4) a) Construire le point A d'affixe m .

b) En déduire une construction des points M_1 et M_2 images des solutions z_1 et z_2 de l'équation (E).

(On convient que $|z_1| < |z_2|$).

Exercice 3 (4 points)

1) Soit a un entier tel que $a \equiv 1 \pmod{2^4}$ et $a \equiv 1 \pmod{5^4}$. Montrer que $a \equiv 1 \pmod{10^4}$.

2) Soit $b = (9217)^4$. Montrer que $b \equiv 1 \pmod{5}$ et $b \equiv 1 \pmod{2^4}$.

3) Pour tout entier naturel n , on pose $b_n = b^{5^n} - 1$.

a) Montrer que pour tout entier naturel n , $b_{n+1} = (b_n + 1)^5 - 1$.

b) En déduire que pour tout entier naturel n , $b_{n+1} = b_n^5 + 5b_n^4 + 10b_n^3 + 10b_n^2 + 5b_n$.

4) a) Montrer que si 5^{n+1} divise b_n alors 5^{n+2} divise b_n^5 .

b) Montrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n , $b_n \equiv 0 \pmod{5^{n+1}}$.

5) a) Montrer que $(9217)^{500} \equiv 1 \pmod{625}$.

b) Montrer que $(9217)^{500} \equiv 1 \pmod{10000}$.

c) Trouver un entier dont le cube est congru à 9217 modulo 10000.

Exercice 4 (8 points)

A) On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$.

On note (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$. Interpréter graphiquement.

b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement.

2) a) Montrer que pour tout $x \in]0, +\infty[$, $f'(x) = \frac{(\sqrt{x} - 1)e^{\sqrt{x}}}{2x\sqrt{x}}$.

b) Dresser le tableau de variation de f .

c) Tracer la courbe (C_f) .

3) Soit λ un réel de $]0, 1[$. On désigne par S_λ l'aire de la partie du plan limitée par (C_f) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = \lambda$ et $x = 1$.

Calculer S_λ en fonction de λ et déterminer $\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} S_\lambda$.

B) 1) Soit g_1 et g_2 les restrictions de f respectivement à chacun des intervalles $]0, 1]$ et $[1, +\infty[$.

Montrer que g_1 réalise une bijection de $]0, 1]$ sur un intervalle I que l'on déterminera et que g_2 réalise une bijection de $[1, +\infty[$ sur l'intervalle I .

2) Soit n un entier naturel non nul.

a) Montrer que l'équation $f(x) = e + \frac{1}{n}$ admet dans $]0, +\infty[$ exactement deux solutions notées

α_n et β_n telles que $0 < \alpha_n < 1 < \beta_n$.

On définit ainsi, pour tout entier naturel non nul n , deux suites réelles (α_n) et (β_n) .

b) Montrer que les suites (α_n) et (β_n) sont convergentes et déterminer leur limite.

3) On considère la fonction h définie sur $[0, +\infty[$ par $h(x) = \begin{cases} \sqrt{x} \left(f(x) - \left(e + \frac{1}{n} \right) \right) & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

On note (C_h) sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

a) Montrer que h est continue à droite en 0.

b) Déterminer le signe de $h(x)$ pour tout $x \in [0, +\infty[$.

4) Soit H la primitive de h sur $[0, +\infty[$ qui s'annule en 0.

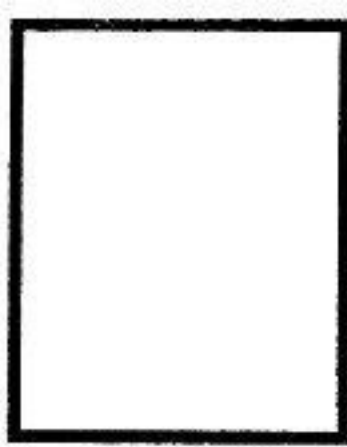
a) Justifier que les fonctions $u : x \mapsto \int_0^x e^{\sqrt{t}} dt$ et $v : x \mapsto 2 + 2(\sqrt{x} - 1) e^{\sqrt{x}}$ sont continues sur $[0, +\infty[$ et dérivables sur $]0, +\infty[$.

b) Montrer que pour tout $x \geq 0$, $u(x) = v(x)$.

c) Donner l'expression de $H(x)$ pour tout $x \in [0, +\infty[$.

5) Soit $\mathcal{A}_n$ l'aire de la partie du plan limitée par (C_n) , l'axe des abscisses et les droites d'équations

$x = 0$ et $x = \beta_n$. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{A}_n = 2 - \frac{2}{3}e$.



Section : N° d'inscription : Série :

Nom et prénom :

Date et lieu de naissance :

Signatures des
surveillants

.....

.....



Épreuve : Mathématiques (Section : Mathématiques) Session principale

Annexe (à rendre avec la copie)

Figure 1

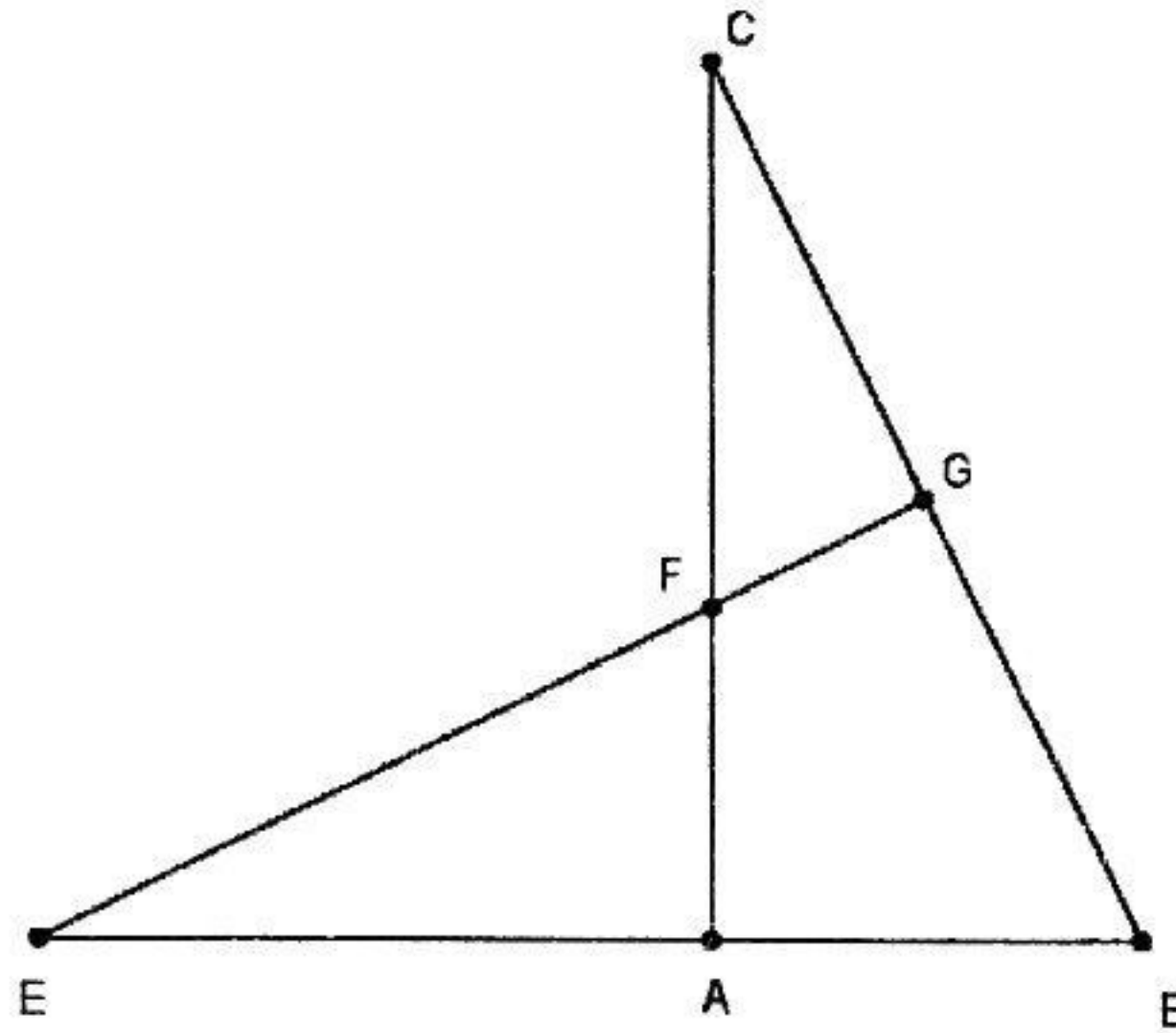
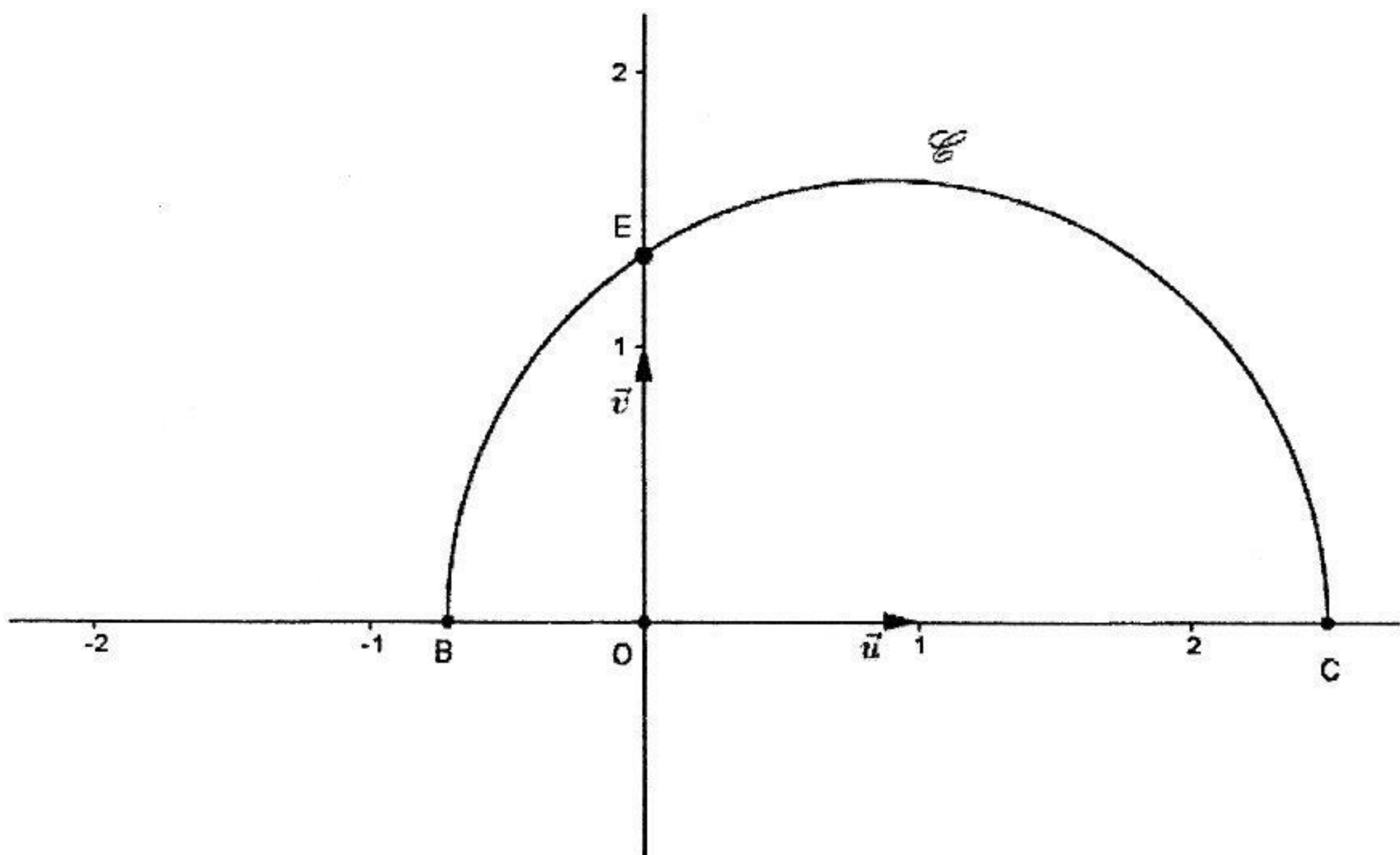


Figure 2



Corrigé de l'épreuve de mathématiques du baccalauréat

Section : Mathématiques

Session principale 2016

Exercice 1

1) a) $\theta \equiv \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AF} \right) [2\pi] \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$.

b) On sait que $f(B) = F$ et $(GF) \perp (BC)$ car (GF) est la médiatrice de $[BC]$, on en déduit que l'image de (BC) est (GF) .

c) Puisque $f(A) = A$ et $(AB) \perp (AC)$ donc l'image de (AC) est (AB) .

$$C \in (BC) \cap (AC) \text{ donc } f(C) \in f((BC)) \cap f((AC)) \text{ donc } f(C) \in (GF) \cap (AB) = \{E\}.$$

Il en résulte que $f(C) = E$.

2) a) Le cercle ζ_1 est de diamètre $[BC]$ donc son image par f est le cercle de diamètre $[f(B)f(C)]$, or $f(B) = F$ et $f(C) = E$, il en résulte que l'image de ζ_1 par f est le cercle de diamètre $[EF]$.

Ainsi $f(\zeta_1) = \zeta_2$.

b) (Voir figure)

c) Les points I et H appartiennent au cercle ζ_2 de diamètre $[EF]$ privé de E et F donc

$$\angle EIF = \angle EHF = \frac{\pi}{2}, \text{ de plus les points } A \text{ et } F \text{ sont deux points de l'arc orienté } IH \setminus \{I, H\} \text{ situé sur } \zeta_2$$

donc $\left(\overrightarrow{FH}, \overrightarrow{FI} \right) \equiv \left(\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{AI} \right) [2\pi] \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$. Ainsi le quadrilatère $HEIF$ admet trois angles droits donc c'est un rectangle.

d) $F \in (AF) \cap (HF)$ donc $f(F) \in f((AF)) \cap f((HF))$ donc $(AE) \cap (IF) = \{I\}$.

Il en résulte que $f(F) = I$.

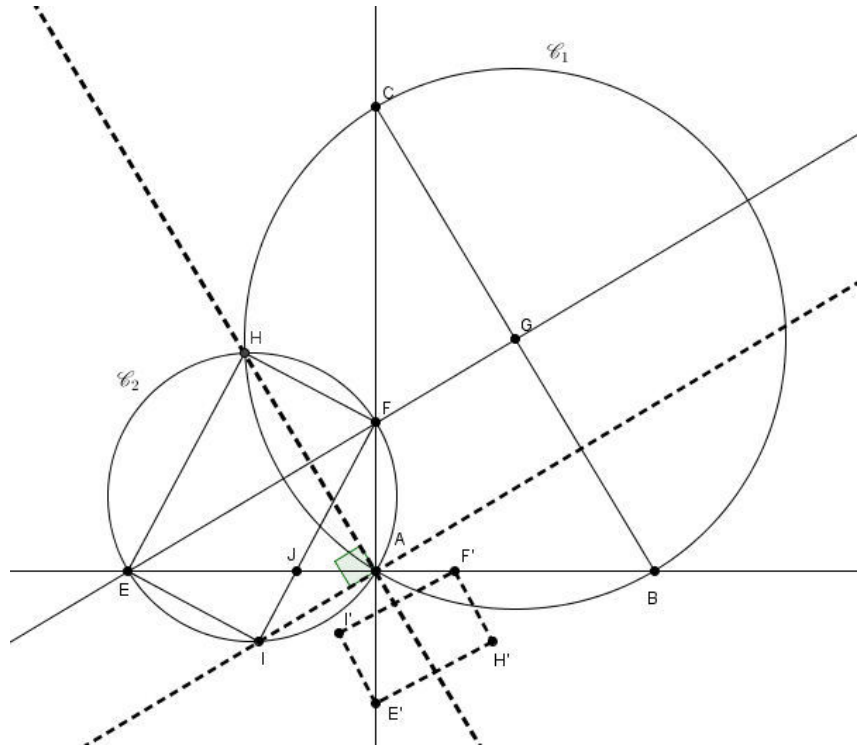
3) a) $S_{(AC)} \circ f$ est la composée d'une symétrie orthogonale (similitude indirecte) et d'une similitude directe donc c'est une similitude indirecte

$$\text{de plus } \begin{cases} S_{(AC)} \circ f(A) = A = g(A) \\ S_{(AC)} \circ f(B) = F = g(B) \\ A \neq B \end{cases}, \text{ on en déduit que } g = S_{(AC)} \circ f.$$

b) Le point $E \in (AB)$ donc

$$E' = g(E) \in g((AB)) = (AF) = (AC).$$

c) Voir figure.



Exercise 2

1) a) $\Delta = (1+2i)^2 m^2 + 4(1-i)m^2 = m^2$. Soit $\delta = m$.

$$z_1 = \frac{(1+2i)m - m}{2} = im \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{(1+2i)m - m}{2} = m(1+i).$$

$$b) (z_1 z_2 \text{ est un réel strictement positif}) \Leftrightarrow \begin{cases} \arg(z_1 z_2) \equiv 0[2\pi] \\ \theta \in]0, \pi[\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \arg(z_1) + \arg(z_2) \equiv 0[2\pi] \\ \theta \in]0, \pi[\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\theta + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \equiv 0[2\pi] \\ \theta \in]0, \pi[\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\theta \equiv -\frac{3\pi}{4}[2\pi] \\ \theta \in]0, \pi[\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \theta = -\frac{3\pi}{8} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \theta \in]0, \pi[\end{cases} \Leftrightarrow \left(\theta = \frac{5\pi}{8} \right).$$

$$2) z_1 z_2 = m^2 i(1+i) = |m|^2 e^{i\frac{5\pi}{4}} e^{i\frac{\pi}{2}} \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}} = |m|^2 \sqrt{2} e^{i2\pi} = |m|^2 \sqrt{2}.$$

3) a) Le point $E \in \mathcal{C} \setminus \{B, C\}$ donc le triangle BEC est rectangle en E et les triangles OCE et OEB sont rectangles en O.

$$\frac{OC}{OE} = \tan(\angle OEC) = \cotan\left(\frac{\pi}{2} - \angle OEC\right) = \cotan(\angle BEO) = \frac{OE}{OB}, \text{ il en résulte que}$$

$$\frac{OC}{OE} = \frac{OE}{OB} \Leftrightarrow OE^2 = OC \cdot OB.$$

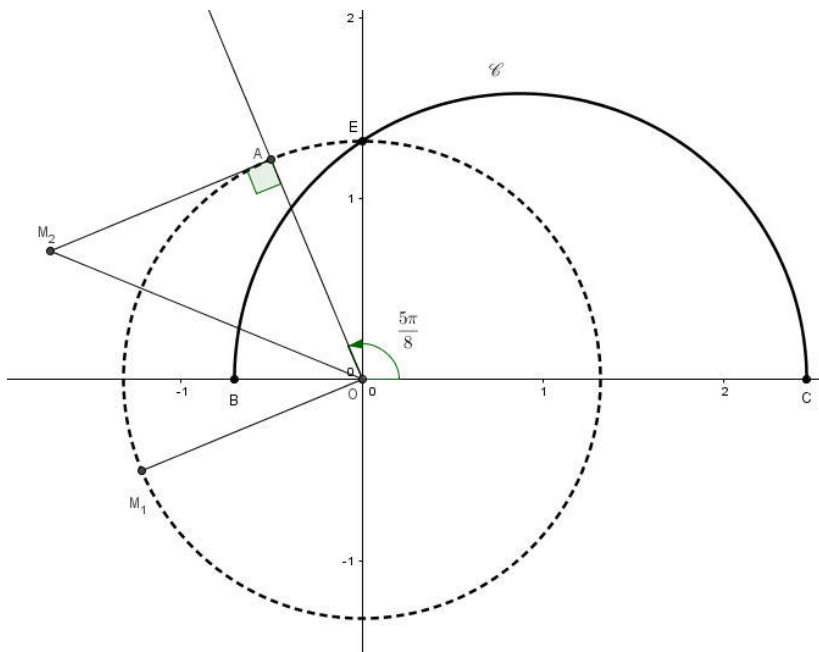
$$b) \text{ D'une part } m = \frac{\sqrt{t}}{4\sqrt{2}} e^{i\frac{5\pi}{8}} \text{ donc } |m| = \frac{\sqrt{t}}{4\sqrt{2}}, \text{ d'autre part } OE^2 = OC \cdot OB = t \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ donc } OE = \frac{\sqrt{t}}{4\sqrt{2}}.$$

Il en résulte que $|m| = OE$.

4) a) Voir figure.

a) On a $z_2 = m(1+i) = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}} m$, il en résulte que M_2 est l'image de A par la similitude directe de centre O, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$

$z_1 = im = e^{i\frac{\pi}{2}} m$, il en résulte que M_1 est l'image de A par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.



Exercise 3

- 1) On a $\begin{cases} a \equiv 1 \pmod{2^4} \\ a \equiv 1 \pmod{5^4} \end{cases}$ donc $\begin{cases} a - 1 \equiv 0 \pmod{2^4} \\ a - 1 \equiv 0 \pmod{5^4} \end{cases}$, on en déduit que $a - 1 \equiv 0 \pmod{2^4 \times 5^4}$ ou encore $2^4 \wedge 5^4 = 1$

$$a \equiv 1 \pmod{10^4}.$$

- 2) $9217 \equiv 2 \pmod{5}$ donc $b = (9217)^4 \equiv 2^4 \pmod{5} \equiv 1 \pmod{5}$.

$$9217 \equiv 1 \pmod{2^4} \text{ donc } b = (9217)^4 \equiv 1 \pmod{2^4}.$$

- 3) a) Pour tout entier naturel n , $b_{n+1} = b^{5^{n+1}} - 1 = (b^{5^n})^5 - 1 = (b^{5^n} - 1 + 1)^5 - 1 = (b_n + 1)^5 - 1$.

b) En utilisant la formule du binôme,

$$b_{n+1} = (b_n + 1)^5 - 1 = b_n^5 + 5b_n^4 + 10b_n^3 + 10b_n^2 + 5b_n + 1 - 1 = b_n^5 + 5b_n^4 + 10b_n^3 + 10b_n^2 + 5b_n.$$

- 4) a) Si 5^{n+1} divise b_n alors il existe un entier k tel que $b_n = 5^{n+1}k$, il en résulte que

$$b_n^5 = (5^{n+1}k)^5 = 5^{5n+5}k^5 = 5^{n+2}(5^{4n+3}k^5) \text{ ce qui prouve que } 5^{n+2} \text{ divise } b_n^5.$$

- b) Vérification pour $n = 0$. $b_0 = b - 1 \equiv 0 \pmod{5}$ Vrai (D'après 2)

Soit n un entier naturel. Supposons que $b_n \equiv 0 \pmod{5^{n+1}}$ et montrons que $b_{n+1} \equiv 0 \pmod{5^{n+2}}$.

Puisque $b_n \equiv 0 \pmod{5^{n+1}}$ c'est-à-dire 5^{n+1} divise b_n donc 5^{n+2} divise b_n^5 , $5b_n^4$, $10b_n^3$, $10b_n^2$ et $5b_n$, il en résulte que 5^{n+2} divise $b_n^5 + 5b_n^4 + 10b_n^3 + 10b_n^2 + 5b_n = b_{n+1}$. D'où le résultat.

- 5) a) D'après 4)b) et pour $n = 3$, $b_3 = b^{125} - 1 = 9217^{500} - 1 \equiv 0 \pmod{5^4}$ donc $(9217)^{500} \equiv 1 \pmod{625}$.

- b) D'après 2) $b = (9217)^4 \equiv 1 \pmod{2^4}$ donc $b^{125} = (9217)^{500} \equiv 1 \pmod{16}$.

Ainsi $(9217)^{500} \equiv 1 \pmod{16}$ et $(9217)^{500} \equiv 1 \pmod{625}$ d'après 1) $(9217)^{500} \equiv 1 \pmod{10000}$.

- c) on sait que $(9217)^{500} \equiv 1 \pmod{10000}$ donc $(9217)^{501} \equiv 9217 \pmod{10000}$, il en résulte que

$$\left((9217)^{167}\right)^3 \equiv 9217 \pmod{10000} \text{ ou encore le cube du nombre } (9217)^{167} \text{ est congru à } 9217 \text{ modulo } 10000.$$

Exercice 4

A.

1) a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$. La droite $x = 0$ est une asymptote à (C_f) .

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\sqrt{x}}}{x\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\sqrt{x}}}{(\sqrt{x})^3} = +\infty$. (C_f) admet une branche

parabolique infinie de direction celle de $(O, \vec{j})$ en $+\infty$.

2) a) La fonction f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $f'(x) = \frac{\frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}\sqrt{x} - \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{(\sqrt{x} - 1)e^{\sqrt{x}}}{2x\sqrt{x}}$.

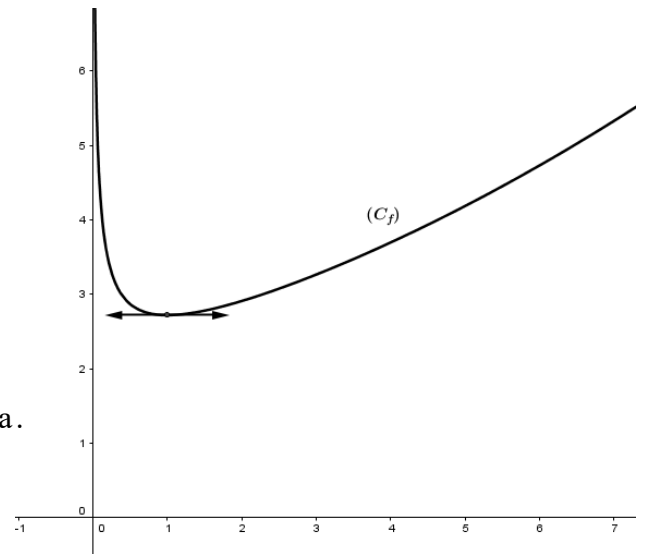
b) Le signe de $f'(x)$ est celui de $\sqrt{x} - 1 = \frac{x-1}{\sqrt{x}+1}$.

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		-	+
$f(x)$		$+\infty$	$+\infty$

c) Voir figure.

$$3) S_\lambda = \int_\lambda^1 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = 2 \int_\lambda^1 \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} dx = 2 \left[e^{\sqrt{x}} \right]_\lambda^1 = 2(e - e^\lambda) \text{ ua.}$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} S_\lambda = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} 2(e - e^\lambda) = 2(e - 1).$$



B.

1) La fonction g_1 est continue et strictement décroissante sur $]0, 1]$ donc elle réalise une bijection de $]0, 1]$ sur $g_1([0, 1]) = [e, +\infty[$.

La fonction g_2 est continue et strictement décroissante sur $[1, +\infty[$ donc elle réalise une bijection de $[1, +\infty[$ sur $g_2([1, +\infty[) = [e, +\infty[$.

2) a) La fonction g_1 est une bijection de $]0, 1]$ sur $[e, +\infty[$. $e + \frac{1}{n} \in [e, +\infty[$ donc l'équation $g_1(x) = e + \frac{1}{n}$ admet une solution unique $\alpha_n \in]0, 1]$, or $g_1(1) = e \neq e + \frac{1}{n}$ il en résulte que $\alpha_n \in]0, 1[$.

La fonction g_2 est une bijection de $[1, +\infty[$ sur $[e, +\infty[$. $e + \frac{1}{n} \in [e, +\infty[$ donc l'équation $g_2(x) = e + \frac{1}{n}$ admet une solution unique $\beta_n \in [1, +\infty[$, or $g_2(1) = e \neq e + \frac{1}{n}$ il en résulte que $\beta_n \in]1, +\infty[$.

Conclusion : L'équation $f(x) = e + \frac{1}{n}$ admet dans $]0, +\infty[$ exactement deux solutions α_n et β_n telle que $0 < \alpha_n < 1 < \beta_n$.

b) On sait que $g_1(\alpha_n) = e + \frac{1}{n} \Leftrightarrow \alpha_n = g_1^{-1}\left(e + \frac{1}{n}\right)$. Or $\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} e + \frac{1}{n} = e \\ \lim_{x \rightarrow e} g_1^{-1}(x) = 1 \end{cases}$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = 1$.

De même on sait que $g_2(\beta_n) = e + \frac{1}{n} \Leftrightarrow \alpha_n = g_2^{-1}\left(e + \frac{1}{n}\right)$. Or $\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} e + \frac{1}{n} = e \\ \lim_{x \rightarrow e} g_2^{-1}(x) = 1 \end{cases}$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \beta_n = 1$.

3) a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} f(x) - \left(e + \frac{1}{n}\right) \sqrt{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\sqrt{x}} - \left(e + \frac{1}{n}\right) \sqrt{x} = 1 = h(0)$ donc h est continue à droite en 0.

b) Pour tout $x \in [0, +\infty[$, $h(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $f(x) = e + \frac{1}{n} \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = \alpha_n$ ou $x = \beta_n$.

x	0	α_n	β_n	$+\infty$
h(x)	○	+	○	+

4) a) La fonction $x \mapsto e^{\sqrt{x}}$ est continue sur $[0, +\infty[$ et $0 \in [0, +\infty[$ donc la fonction u est la primitive de la fonction $x \mapsto e^{\sqrt{x}}$ qui s'annule en 0, il en résulte que u est continue sur $[0, +\infty[$ et dérivable sur $]0, +\infty[$.

Les fonctions $x \mapsto e^{\sqrt{x}}$ et $x \mapsto \sqrt{x} - 1$ sont continues sur $[0, +\infty[$ et dérivables sur $]0, +\infty[$, il en résulte que la fonction v est continue sur $[0, +\infty[$ et dérivable sur $]0, +\infty[$.

b) Pour tout $x \in]0, +\infty[$, $u'(x) = e^{\sqrt{x}}$ et $v'(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} + \frac{(\sqrt{x} - 1)}{\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}} = e^{\sqrt{x}}$.

Il en résulte que pour tout $x \in]0, +\infty[$, $u'(x) = v'(x)$ par suite pour tout $x \in]0, +\infty[$,

$u(x) = v(x) + c$ où c est un réel, or les fonctions u et v sont continues sur $[0, +\infty[$ donc

$u(x) = v(x) + c$ pour tout $x \in [0, +\infty[$ et comme $u(0) = v(0) = 0$ donc $c = 0$.

Ainsi $u(x) = v(x)$ pour tout $x \in [0, +\infty[$.

c) Pour tout $x \in [0, +\infty[$, $h(x) = \begin{cases} \sqrt{x} f(x) - \sqrt{x} \left(e + \frac{1}{n}\right) & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases} = \begin{cases} e^{\sqrt{x}} - \sqrt{x} \left(e + \frac{1}{n}\right) & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$,

on en déduit que pour tout $x \in [0, +\infty[$, $h(x) = e^{\sqrt{x}} - \sqrt{x} \left(e + \frac{1}{n}\right)$ par suite pour tout $x \in [0, +\infty[$,

$$\begin{aligned} H(x) &= \int_0^x e^{\sqrt{t}} dt - \left(e + \frac{1}{n}\right) \int_0^x \sqrt{t} dt = 2 + 2(\sqrt{x} - 1)e^{\sqrt{x}} - \frac{2}{3} \left(e + \frac{1}{n}\right) [t\sqrt{t}]_0^x \\ &= 2 + 2(\sqrt{x} - 1)e^{\sqrt{x}} - \frac{2}{3} \left(e + \frac{1}{n}\right) x\sqrt{x}. \end{aligned}$$

5) $A_n = \int_0^{\beta_n} |h(x)| dx = \int_0^{\alpha_n} h(x) dx + \int_{\beta_n}^{\alpha_n} h(x) dx = 2H(\alpha_n) - H(\beta_n)$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2H(\alpha_n) - H(\beta_n)$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} 2 + 4(\sqrt{\alpha_n} - 1)e^{\sqrt{\alpha_n}} - \frac{4}{3} \left(e + \frac{1}{n}\right) \alpha_n \sqrt{\alpha_n} - 2(\sqrt{\beta_n} - 1)e^{\sqrt{\beta_n}} + \frac{2}{3} \left(e + \frac{1}{n}\right) \beta_n \sqrt{\beta_n} = 2 - \frac{2}{3}e.$$

RÉPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION ***** EXAMEN DU BACCALAURÉAT	Épreuve : MATHÉMATIQUES	
	Section : Mathématiques	
	Durée : 4 h	Coefficient : 4
SESSION 2016	Session de contrôle	

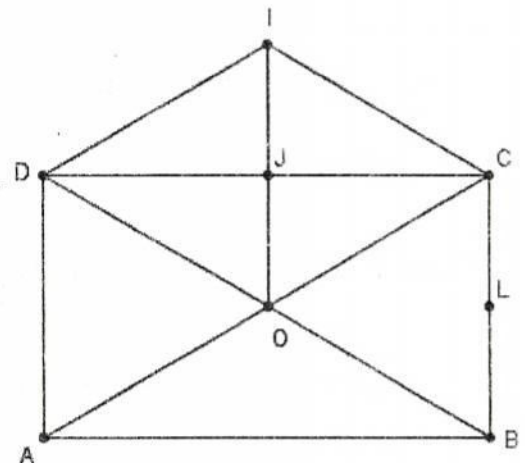
Le sujet comporte six pages numérotées de 1/6 à 6/6
Les pages 5/6 et 6/6 sont à rendre avec la copie.

Exercice 1 (5 points)

Le plan est orienté.

Dans la figure ci-contre ABCD est un rectangle direct de centre O

AOID et OCID sont deux losanges. Le point J est le milieu du segment [CD] et le point L est le milieu du segment [BC].



1) Soit R la rotation de centre I et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

a) Déterminer $R(O)$ et $R(D)$.

b) Montrer que $R(A) = B$.

2) Soit $g = S_{(OL)} \circ S_{(OI)} \circ S_{(AD)}$.

a) Vérifier que $g(A) = C$ et $g(D) = B$.

b) Donner la nature et les éléments caractéristiques de g .

3) Soit h l'homothétie de centre le point C et de rapport $\frac{1}{2}$ et on pose $\varphi = R \circ h \circ g^{-1}$.

a) Montrer que φ est une similitude indirecte de centre C .

b) Soit K le milieu du segment $[IC]$. Montrer que $\varphi(B) = K$.

c) Montrer que $\varphi = h \circ S_{(AC)}$.

4) Déterminer l'image par φ du rectangle ABCD.

Exercice 2 (4 points)

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct, on désigne par (E) l'ellipse d'équation : $x^2 + 9y^2 = 9$.

Dans la figure 1 de l'annexe 1 jointe, (C_1) est le cercle de centre O et de rayon 1, (C_2) est le cercle de centre O et de rayon 3, N est le point de coordonnées $(\cos\theta, \sin\theta)$. P est le point de coordonnées $(3\cos\theta, 3\sin\theta)$, où θ est un réel appartenant à $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

1) Soit M le point de coordonnées $(3\cos\theta, \sin\theta)$.

a) Vérifier que M est un point de l'ellipse (E).

b) Placer le point M.

c) Justifier qu'une équation de la tangente T à (E) en M est $x \cos\theta + 3y \sin\theta = 3$.

2) La tangente T à (E) en M coupe l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées respectivement en H et K.

a) Déterminer les coordonnées des points H et K.

b) Montrer que $HK^2 = \frac{9}{\cos^2\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}$.

3) Soit f la fonction définie sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ par $f(\theta) = HK^2$.

a) Montrer que pour tout $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, $f'(\theta) = 2(4\sin^2\theta - 1) \frac{\cos^2\theta + 3\sin^2\theta}{\cos^3\theta \sin^3\theta}$.

b) En déduire que la distance HK est minimale si et seulement si $\theta = \frac{\pi}{6}$.

c) On désigne par D le point de l'ellipse (E) correspondant à $\theta = \frac{\pi}{6}$.

Construire le point D ainsi que la tangente en ce point à l'ellipse (E).

Exercice 3 (4 points)

Soit a un entier naturel non nul et premier avec 5.

1) En utilisant les restes possibles de la division euclidienne de a par 5, montrer que $a^4 \equiv 1 \pmod{5}$.

2) Soit p et q deux entiers naturels non nuls tels que $p \leq q$ et $q \equiv p \pmod{4}$.

a) Montrer que $a^q \equiv a^p \pmod{5}$.

b) Montrer que $a^q \equiv a^p \pmod{2}$.

c) En déduire que $a^q \equiv a^p \pmod{10}$.

3) Soit dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E) : $25x - 21y = 4$.

a) Vérifier que $(1,1)$ est une solution de (E).

b) Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E).

c) En déduire l'ensemble A des solutions de l'équation (E) dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

d) Soit (α, β) un élément de A. Montrer que, pour tout entier naturel non nul n et premier avec 5, n^α et n^β ont le même chiffre d'unité.

Exercice 4 (7 points)

Soit f la fonction définie sur $[e^{-\sqrt{2}}, e^{\sqrt{2}}]$ par $f(x) = \frac{\sqrt{2 - \ln^2 x}}{x}$.

On note C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a) Montrer que $\lim_{x \rightarrow e^{\sqrt{2}}} \left(\frac{\ln x - \sqrt{2}}{x - e^{\sqrt{2}}} \right) = e^{-\sqrt{2}}$.

b) En écrivant $\frac{f(x)}{x - e^{\sqrt{2}}} = \frac{-(\ln x + \sqrt{2})}{x\sqrt{2 - \ln^2 x}} \cdot \frac{\ln x - \sqrt{2}}{x - e^{\sqrt{2}}}$, montrer que $\lim_{x \rightarrow (e^{\sqrt{2}})^-} \left(\frac{f(x)}{x - e^{\sqrt{2}}} \right) = -\infty$.

Interpréter graphiquement le résultat.

c) Montrer que f n'est pas dérivable à droite en $e^{-\sqrt{2}}$.

2) On donne, ci-dessous, le tableau donnant le signe de $f''(x)$, le signe de $f'(x)$ et les variations de la fonction f.

x	$e^{-\sqrt{2}}$	e^{-1}	α	β	$e^{\sqrt{2}}$
$f''(x)$	-	0	-	0	+
$f'(x)$	+	0	-	-	-
f	0	e			0

Justifier que les points C et D, de coordonnées respectives $(\alpha, f(\alpha))$ et $(\beta, f(\beta))$, sont deux points d'inflexion de C_f .

3) Dans la figure 2 de l'annexe 2 jointe, $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormé direct ;

A et B sont les points de coordonnées respectives $(\sqrt{2}, 0)$ et $(-\sqrt{2}, 0)$;

C et D sont les points de coordonnées respectives $(\alpha, f(\alpha))$ et $(\beta, f(\beta))$;

Γ est la courbe représentative de la fonction exponentielle.

a) Construire les points de C_f d'abscisses $e^{-\sqrt{2}}$, e^{-1} et $e^{\sqrt{2}}$.

b) Tracer la courbe C_f dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

4) Soit g la fonction définie sur $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ par $g(x) = \sin x$.

a) Montrer que la fonction g réalise une bijection de $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ sur $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$.

On note h sa fonction réciproque.

b) Montrer que la fonction h est dérivable sur $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ et que $h'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

c) Soit u la fonction définie sur $[e^{-1}, e]$ par $u(x) = h\left(\frac{\ln x}{\sqrt{2}}\right)$.

Montrer que pour tout $x \in [e^{-1}, e]$, $u'(x) = \frac{1}{x\sqrt{2-\ln^2 x}}$.

d) En déduire que $\int_{e^{-1}}^e \frac{dx}{x\sqrt{2-\ln^2 x}} = \frac{\pi}{2}$.

5) Soit $\mathcal{A}$ l'aire de la partie du plan limitée par C_f , l'axe des abscisses et les droites d'équations

$x = e^{-1}$ et $x = e$.

a) Montrer que $\mathcal{A} = 2 + \int_{e^{-1}}^e \left(\frac{\ln^2 x}{x\sqrt{2-\ln^2 x}} \right) dx$.

b) Vérifier que pour tout $x \in [e^{-1}, e]$, $\frac{\ln^2 x}{x\sqrt{2-\ln^2 x}} = \frac{2}{x\sqrt{2-\ln^2 x}} - f(x)$.

c) En déduire la valeur de $\mathcal{A}$.

Annexe 1 (à rendre avec la copie)

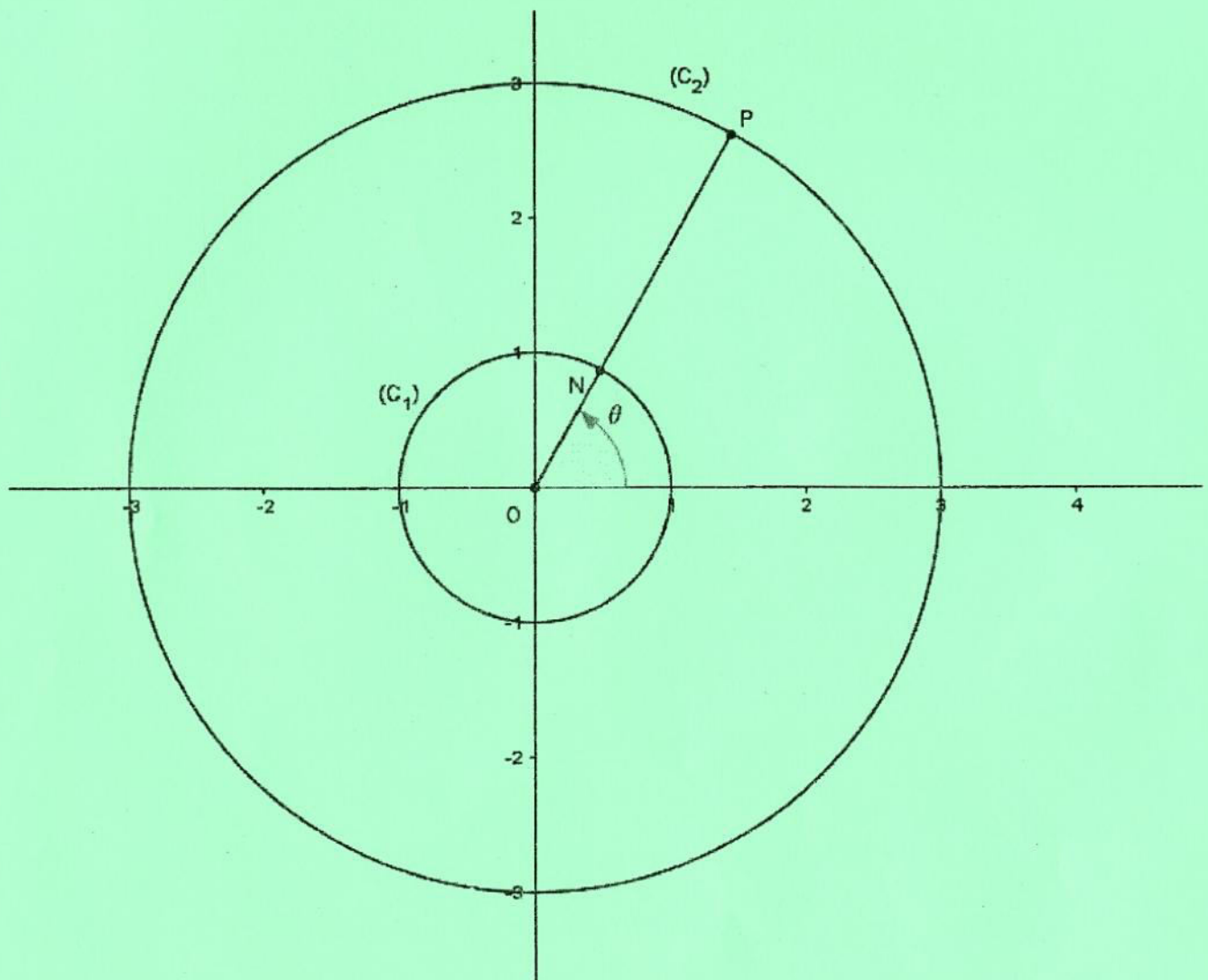


Figure 1

Annexe 2 (à rendre avec la copie)

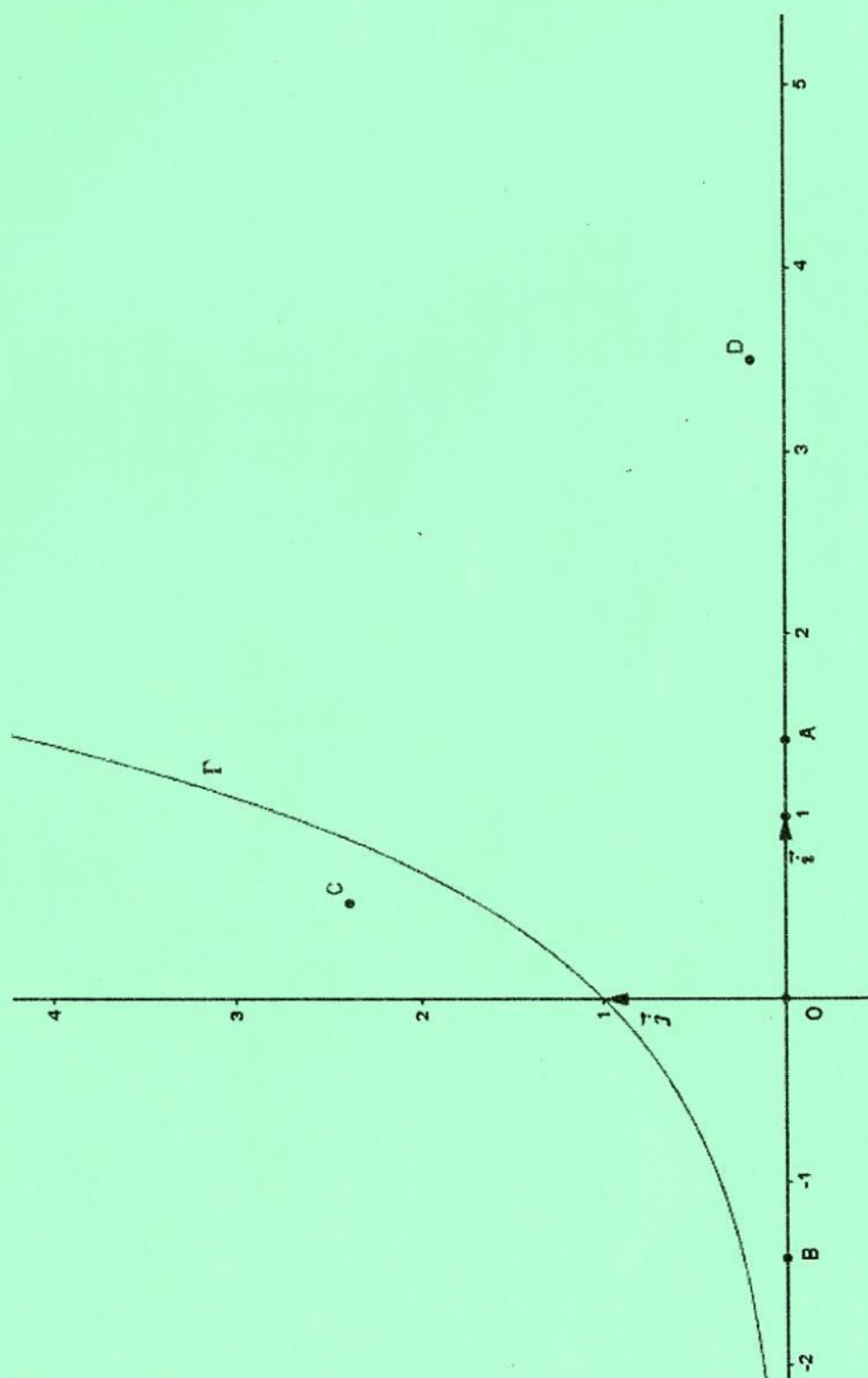


Figure 2

Corrigé de l'épreuve de mathématiques du baccalauréat

Section : Mathématiques

Session de contrôle 2016

Exercice 1

- 1) a) On sait que OCID est un losange donc $DI = DO$ et OIDA est un losange donc $IO = ID$, il en

résulte que $DI = DO = OI$ par suite le triangle DOI est équilatéral donc $\begin{cases} ID = IO \\ \left(\overrightarrow{ID}, \overrightarrow{IO} \right) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi] \end{cases}$ ce qui

prouve que $R(D) = O$.

Le triangle DOI est équilatéral et J est un centre de symétrie du losange OCID donc OCI est un

triangle équilatéral donc $\begin{cases} IO = IC \\ \left(\overrightarrow{IO}, \overrightarrow{IC} \right) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi] \end{cases}$ ce qui prouve que $R(O) = C$.

b) Le triangle DAO est équilatéral direct (Le symétrique de DOI par (DO)) de donc son image par R est un triangle équilatéral direct (Le symétrique de COI par (CO)) et puisque $R(D) = O$, $R(O) = C$ et le triangle OBC est équilatéral direct donc l'image du triangle DAO par R est le triangle OBC, on en déduit que $R(A) = B$.

- 2) a) $g(A) = S_{(OL)} \circ S_{(OI)} \circ S_{(AD)}(A) = S_{(OL)} \circ S_{(OI)}(A) = S_{(OL)}(B) = C$.

$$g(D) = S_{(OL)} \circ S_{(OI)} \circ S_{(AD)}(D) = S_{(OL)} \circ S_{(OI)}(D) = S_{(OL)}(C) = B.$$

b) $g = S_{(OL)} \circ S_{(OI)} \circ S_{(AD)} = S_{(OL)} \circ t_{2\overrightarrow{DJ}} = S_{(OL)} \circ t_{\overrightarrow{DC}}$ et puisque $\overrightarrow{DC}$ est directeur de (OL), il en résulte que g est une symétrie glissante de vecteur $\overrightarrow{DC}$ et d'axe (OL).

- 3) a) φ est la composée de deux similitudes directes (R et h) de rapports respectifs 1 et $\frac{1}{2}$ et d'une similitude indirecte (g^{-1}) de rapport 1 donc φ est une similitude indirecte de rapport $1 \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}$

donc elle admet un centre et puisque $\varphi(C) = R \circ h \circ g^{-1}(C) = R \circ h(A) = R(O) = C$, on en déduit que C est le centre de φ .

b) $\varphi(B) = R \circ h \circ g^{-1}(B) = R \circ h(D) = R(J) = K$.

c) $h \circ S_{(AC)}$ est la composée d'une similitude directe et d'une symétrie orthogonale (similitude indirecte) donc c'est une similitude indirecte

$$\text{de plus } \begin{cases} h \circ S_{(AC)}(C) = C = \varphi(C) \\ h \circ S_{(AC)}(B) = h(I) = K = \varphi(B), \text{ on en déduit que } \varphi = h \circ S_{(AC)}. \\ C \neq B \end{cases}$$

4) Soit D' le milieu de [OB]. ABCD est un rectangle donc son image par φ est un rectangle

$$\begin{cases} \varphi(A) = h \circ S_{(AC)}(A) = O \\ \varphi(B) = K \\ \varphi(C) = C \end{cases}$$

et OKCD' est un rectangle, il en résulte que l'image du rectangle ABCD

par φ est le rectangle OKCD'.

Exercice 2

1) a) $(3 \cos \theta)^2 + 9(\sin \theta)^2 = 9(\cos \theta)^2 + 9(\sin \theta)^2 = 9$ donc M est un point de (E).

b) $\begin{cases} x_M = x_P \\ y_M = y_N \end{cases}$.

c) $T : 3(\cos \theta)x + 9(\sin \theta)y = 9 \Leftrightarrow x \cos \theta + 3y \sin \theta = 3$.

2) a) $H(x, y) \in T \cap (O, \vec{i}) \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x \cos \theta + 3y \sin \theta = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = \frac{3}{\cos \theta} \end{cases}$, il en résulte que $H\left(\frac{3}{\cos \theta}, 0\right)$.

$K(x, y) \in T \cap (O, \vec{j}) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x \cos \theta + 3y \sin \theta = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{1}{\sin \theta} \end{cases}$, il en résulte que $K\left(0, \frac{1}{\sin \theta}\right)$.

b) $HK^2 = \left(\frac{3}{\cos \theta}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sin \theta}\right)^2 = \frac{9}{\cos^2 \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta}$.

3) a) La fonction f est dérivable sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et

$$f'(\theta) = \frac{18 \cos \theta \sin \theta}{\cos^4 \theta} - \frac{2 \cos \theta \sin \theta}{\sin^4 \theta} = \frac{18 \sin^4 \theta - 2 \cos^4 \theta}{\cos^3 \theta \sin^3 \theta} = 2(4 \sin^2 \theta - 1) \frac{3 \sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\cos^3 \theta \sin^3 \theta}.$$

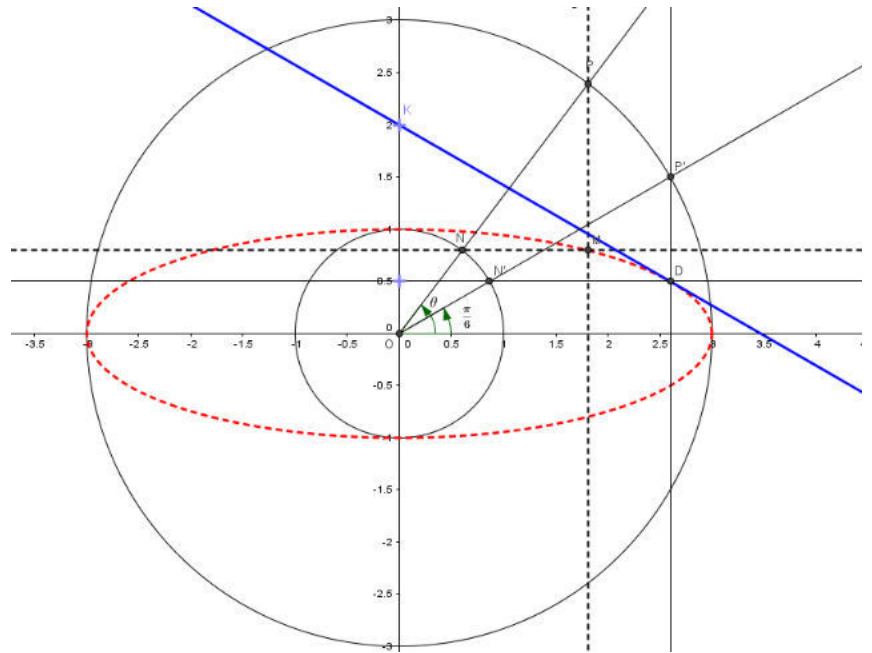
b) Le signe de $f'(\theta)$ est celui de $4 \sin^2 \theta - 1 = (2 \sin \theta - 1)(2 \sin \theta + 1)$.

$$\begin{cases} f'(\theta) = 0 \\ \theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \sin \theta - 1 = 0 \\ \theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\end{cases} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{6}.$$

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(\theta)$		$\begin{array}{c} - \\ \circ \\ + \end{array}$	
$f(\theta)$		$\begin{array}{c} +\infty \\ \nearrow \\ 16 \\ \nwarrow \\ +\infty \end{array}$	

D'après le tableau de variation HK
est minimale si et seulement si $\theta = \frac{\pi}{6}$.

c) Voir figure.



Exercice 3

1) Soit r le reste de $a \pmod{5}$.

On a a est premier avec 5, donc $r \in \{1, 2, 3, 4\}$ or $r \wedge 5 = 1$ et 5 est premier donc $r^4 \equiv 1 \pmod{5}$

Puisque $a^4 \equiv r^4 \pmod{5}$, il en résulte que $a^4 \equiv 1 \pmod{5}$.

2) a) $q \equiv p \pmod{4}$ et $p \leq q \Leftrightarrow q = 4n + p, n \in \mathbb{N}$.

$$a^q \equiv a^{4n+p} \pmod{5} \equiv a^{4n} \cdot a^p \pmod{5} \equiv a^p \pmod{5}.$$

b) Soit r le reste de a modulo 2, donc $r \in \{0, 1\}$

Si $r = 0$ alors $a^p \equiv a^q \equiv 0 \pmod{2}$ et si $r = 1$ alors $a^p \equiv a^q \equiv 1 \pmod{2}$

On en déduit que $a^p \equiv a^q \pmod{2}$

$$\text{c) On a } \begin{cases} a^p \equiv a^q \pmod{2} \\ a^p \equiv a^q \pmod{5} \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} a^p - a^q \equiv 0 \pmod{2} \\ a^p - a^q \equiv 0 \pmod{5} \end{cases}, \text{ on en déduit que } a^p - a^q \equiv 0 \pmod{2 \times 5} \text{ ou } 2 \wedge 5 = 1$$

encore $a^p \equiv a^q \pmod{10}$.

3) a) $25 \times 1 - 21 \times 1 = 4$.

$$\text{b) } 25x - 21y = 25 \times 1 - 21 \times 1 \text{ donc } 25(x-1) = 21(y-1) (*)$$

25 divise $21(y-1)$ donc 25 divise $(y-1)$ donc $y = 25k + 1, k \in \mathbb{Z}$.

$$25 \wedge 21 = 1$$

En remplaçant y dans $(*)$, on obtient $x = 21k + 1, k \in \mathbb{Z}$.

$$\text{Ainsi } S_{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}} = \{(21k+1, 25k+1), k \in \mathbb{Z}\}$$

$$\text{c) } A = \{(21k+1, 25k+1), k \in \mathbb{N}\}$$

d) $\alpha = 21k+1$ et $\beta = 25k+1, k \in \mathbb{N}$, donc $\beta - \alpha = 4k$ on déduit d'après 2) que $n^\alpha \equiv n^\beta \pmod{10}$.

Exercice 4

1) a) La fonction $v: x \mapsto \ln x$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ en particulier en $e^{\sqrt{2}}$, il en résulte que

$$\lim_{x \rightarrow e^{\sqrt{2}}} \left(\frac{\ln x - \sqrt{2}}{x - e^{\sqrt{2}}} \right) = \lim_{x \rightarrow e^{\sqrt{2}}} \left(\frac{v(x) - v(e^{\sqrt{2}})}{x - e^{\sqrt{2}}} \right) = v'(e^{\sqrt{2}}) = \frac{1}{e^{\sqrt{2}}} = e^{-\sqrt{2}}.$$

$$b) \lim_{x \rightarrow (e^{\sqrt{2}})^-} \frac{f(x)}{x - e^{\sqrt{2}}} = \lim_{x \rightarrow (e^{\sqrt{2}})^-} \frac{-(\ln x + \sqrt{2})}{x\sqrt{2 - \ln^2 x}} \cdot \left(\frac{\ln x - \sqrt{2}}{x - e^{\sqrt{2}}} \right), \text{ or } \lim_{x \rightarrow (e^{\sqrt{2}})^-} \frac{-(\ln x + \sqrt{2})}{x\sqrt{2 - \ln^2 x}} = -\infty \text{ et}$$

$$\lim_{x \rightarrow (e^{\sqrt{2}})^-} \left(\frac{\ln x - \sqrt{2}}{x - e^{\sqrt{2}}} \right) = e^{-\sqrt{2}}, \text{ il en résulte que}$$

$$\lim_{x \rightarrow (e^{\sqrt{2}})^-} \frac{f(x)}{x - e^{\sqrt{2}}} = \lim_{x \rightarrow (e^{\sqrt{2}})^-} \frac{-(\ln x + \sqrt{2})}{x\sqrt{2 - \ln^2 x}} \cdot \left(\frac{\ln x - \sqrt{2}}{x - e^{\sqrt{2}}} \right) = -\infty. \text{ La courbe } (C_f) \text{ admet au point}$$

d'abscisse $e^{\sqrt{2}}$ une demi-tangente verticale.

$$c) \lim_{x \rightarrow e^{\sqrt{2}}} \left(\frac{\ln x + \sqrt{2}}{x - e^{\sqrt{2}}} \right) = \lim_{x \rightarrow e^{\sqrt{2}}} \left(\frac{v(x) - v(e^{-\sqrt{2}})}{x - e^{\sqrt{2}}} \right) = v'(e^{-\sqrt{2}}) = \frac{1}{e^{-\sqrt{2}}} = e^{\sqrt{2}}.$$

$$\lim_{x \rightarrow (e^{\sqrt{2}})^+} \frac{f(x)}{x - e^{-\sqrt{2}}} = \lim_{x \rightarrow (e^{\sqrt{2}})^+} \frac{-(\ln x - \sqrt{2})}{x\sqrt{2 - \ln^2 x}} \cdot \left(\frac{\ln x + \sqrt{2}}{x - e^{-\sqrt{2}}} \right) = +\infty. \text{ On en déduit que } f \text{ n'est pas dérivable à droite en } e^{-\sqrt{2}}.$$

2) La fonction f est dérivable respectivement en α et β de plus f'' s'annule respectivement en α et β en changeant de signe donc les points C et D sont deux points d'inflexions de (C_f) .

3) a) Voir figure.

b) Voir figure.

4) a) La fonction g est dérivable sur $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ et $g'(x) = \cos x > 0$ donc g est continue et strictement

croissante sur $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ par suite elle réalise une bijection de $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ sur

$$g\left(\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]\right) = \left[g\left(-\frac{\pi}{4}\right), g\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] = \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right].$$

$$b) \begin{cases} g \text{ est strictement croissante sur } \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \\ g \text{ est dérivable sur } \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \\ g'(x) \neq 0 \text{ sur } \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \end{cases} \quad \text{donc } h \text{ est dérivable sur } g\left(\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]\right) = \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right].$$

$$h'(x) = \frac{1}{g'(h(x))} = \frac{1}{\cos y} \text{ avec } \begin{cases} h(x) = y \\ x \in \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right] \\ y \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} g(y) = x \\ x \in \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right] \\ y \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \sin y = x \\ x \in \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right] \\ y \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin^2 y = x^2 \\ x \in \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right] \\ y \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \\ \sin y \text{ et } x \text{ de même signe} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos y = \sqrt{1-x^2} \\ x \in \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right] \\ y \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \end{cases}.$$

On en déduit que $h'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

c) La fonction u est dérivable sur $[e^{-1}, e]$ et $u'(x) = h'\left(\frac{\ln x}{\sqrt{2}}\right) \frac{1}{\sqrt{2}x} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{\ln^2 x}{2}}} \frac{1}{\sqrt{2}x} = \frac{1}{x\sqrt{2-\ln^2 x}}$.

d) $\int_{e^{-1}}^e \frac{1}{x\sqrt{2-\ln^2 x}} dx = [u(x)]_{e^{-1}}^e = u(e) - u(e^{-1}) = h\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - h\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$.

5) a) $A = \int_{e^{-1}}^e f(x) dx = \int_{e^{-1}}^e \frac{\sqrt{2-\ln^2 x}}{x} dx$

On pose $\begin{cases} u(x) = \sqrt{2-\ln^2 x} \\ v'(x) = \frac{1}{x} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u(x) = \frac{-\ln x}{x\sqrt{2-\ln^2 x}} \\ v(x) = \ln x \end{cases}$

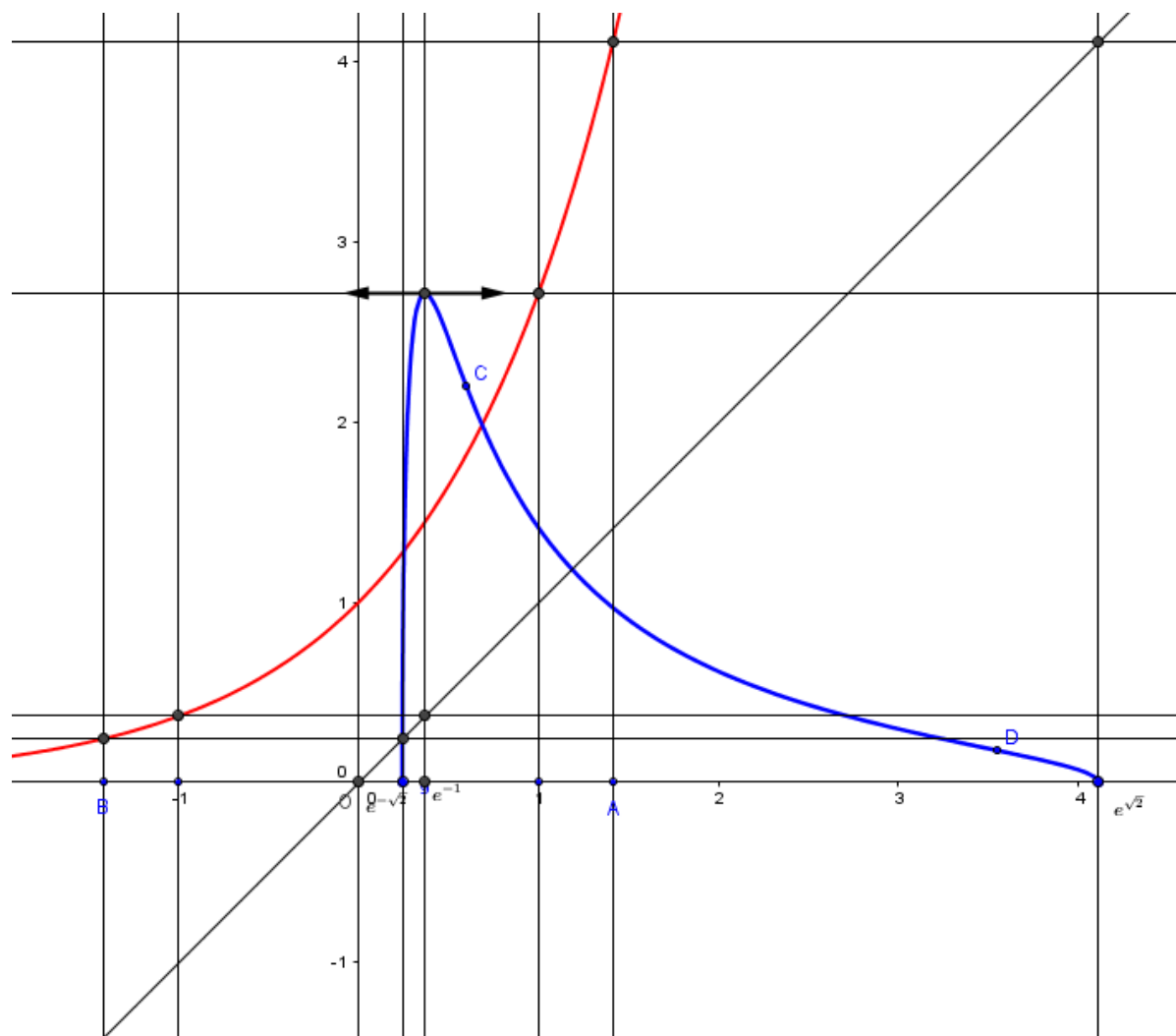
$$A = \left[\sqrt{2-\ln^2 x} \ln x \right]_{e^{-1}}^e + \int_{e^{-1}}^e \frac{\ln^2 x}{x\sqrt{2-\ln^2 x}} dx = 2 + \int_{e^{-1}}^e \frac{\ln^2 x}{x\sqrt{2-\ln^2 x}} dx.$$

b) Pour tout $x \in [e^{-1}, e]$, $f(x) = \frac{\sqrt{2-\ln^2 x}}{x} = \frac{2-\ln^2 x}{x\sqrt{2-\ln^2 x}} = \frac{2}{x\sqrt{2-\ln^2 x}} - \frac{\ln^2 x}{x\sqrt{2-\ln^2 x}}$, il en résulte

que $\frac{\ln^2 x}{x\sqrt{2-\ln^2 x}} = \frac{2}{x\sqrt{2-\ln^2 x}} - f(x)$.

c) $A = 2 + \int_{e^{-1}}^e \frac{\ln^2 x}{x\sqrt{2-\ln^2 x}} dx = 2 + \int_{e^{-1}}^e \frac{2}{x\sqrt{2-\ln^2 x}} dx - \int_{e^{-1}}^e f(x) dx = 2 + \pi - A$, il en résulte que

$$2A = \pi + 2 \text{ ou encore } A = \left(\frac{\pi}{2} + 1\right) \text{ u.a.}$$



REPUBLICQUE TUNISIENNE MINISTERE DE L'EDUCATION ◆◆◆◆ EXAMEN DU BACCALAUREAT SESSION 2015	Epreuve : MATHEMATIQUES
	Durée : 4 H
	Coefficient : 4
Section : Mathématiques	Session principale

Exercice 1 (5 points)

1) a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2 - 2z + 4 = 0$.

b) Déterminer une écriture exponentielle de chacune des solutions de (E).

2) Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère le cercle (Γ) de centre O et de rayon 2 et le point A d'affixe 2.

Placer les points B et C d'affixes respectives $2e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $2e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

3) Soit $\theta \in]-\pi, \pi]$ et M le point du cercle (Γ) d'affixe $2e^{i\theta}$.

On désigne par N le point de (Γ) tel que $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$. Justifier que N a pour affixe $2e^{i(\theta + \frac{\pi}{3})}$.

4) Soit r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

a) Vérifier que la rotation r a pour expression complexe : $z' = e^{i\frac{\pi}{3}}z + 2 - 2e^{i\frac{\pi}{3}}$.

b) Soit F et K les milieux respectifs des segments [BM] et [CN]. Montrer que $r(F) = K$.

c) En déduire la nature du triangle AFK.

5) a) Montrer que $AF^2 = 4 - 2\sqrt{3} \cos\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right)$.

b) En déduire l'affixe du point M pour laquelle AF est maximale et construire le triangle AFK correspondant.

Exercice 2 (4 points)

Dans le plan orienté, on considère un triangle ABC tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$ et $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$.

1) Soit f la similitude directe de centre A qui envoie B sur C. Déterminer l'angle et le rapport de f.

2) Soit g la similitude indirecte de centre A qui envoie C sur B .

a) Déterminer le rapport de g .

b) Déterminer l'axe Δ de g .

c) Soit D le point défini par $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

Montrer que $g(B) = D$ et en déduire que $[BD)$ est la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{ABC}$.

3) a) Montrer que $f \circ g$ est une symétrie axiale et préciser son axe.

b) On pose $D' = f(D)$. Montrer que D' est le symétrique de B par rapport à A .

4) La bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{CAD'}$ coupe la droite (CD') en un point J .

Soit I le centre du cercle inscrit dans le triangle ABC . Déterminer $f(I)$.

Exercice 3 (4 points)

1) On considère dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E): $47x + 53y = 1$.

a) Vérifier que $(-9, 8)$ est une solution de (E).

b) Résoudre l'équation (E).

c) Déterminer l'ensemble des inverses de 47 modulo 53.

d) En déduire que 44 est le plus petit inverse positif de 47 modulo 53.

2) a) Justifier que $45^{52} \equiv 1 \pmod{53}$.

b) Déterminer alors le reste de 45^{106} modulo 53.

3) Soit $N = 1 + 45 + 45^2 + \dots + 45^{105} = \sum_{k=0}^{105} 45^k$.

a) Montrer que $44N \equiv 10 \pmod{53}$.

b) En déduire le reste de N modulo 53.

Exercice 4 (7 points)

I- Soit f la fonction définie sur $[0, \pi]$ par $f(x) = e^{\sin x}$.

On désigne par (C_f) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a) Déterminer la dérivée f' et dresser le tableau de variation de f sur $[0, \pi]$.

b) Montrer que la droite $\Delta: x = \frac{\pi}{2}$ est un axe de symétrie de la courbe (C_f) .

c) Soit (T) la tangente à (C_f) au point d'abscisse 0.

Justifier que (T) a pour équation $y = x + 1$.

2) Soit la fonction g définie sur $[0,1]$ par $g(x) = e^x \sqrt{1-x^2} - 1$.

On donne ci-contre le tableau de variation de g .

x	0	$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$	1
$g'(x)$	+	0	-
g	0	$g\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$	-1

a) Justifier que l'équation $g(x) = 0$ admet dans l'intervalle $]0,1[$ une solution unique α .

b) En déduire le signe de $g(x)$ sur $[0,1]$.

3) On se propose de déterminer la position relative de (C_f) et de sa tangente (T) au point d'abscisse 0 sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Soit la fonction h définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par $h(x) = e^{\sin x} - (x+1)$.

a) Vérifier que pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $h'(x) = g(\sin x)$.

b) Montrer qu'il existe un unique réel β dans $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ tel que $\sin \beta = \alpha$.

c) Déterminer alors l'image par la fonction sinus de chacun des intervalles $[0, \beta]$ et $\left[\beta, \frac{\pi}{2}\right]$.

d) Dresser le tableau de variation de h .

e) En déduire que pour tout x de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $f(x) \geq x+1$. Conclure.

II

1) a) Montrer que pour tout réel $x \geq 0$, $\sin x \leq x$.

b) Déduire alors que pour tout réel $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $f(x) \leq e^x$.

c) Dans l'annexe ci-jointe, on a tracé la courbe de la fonction $x \mapsto e^x$.

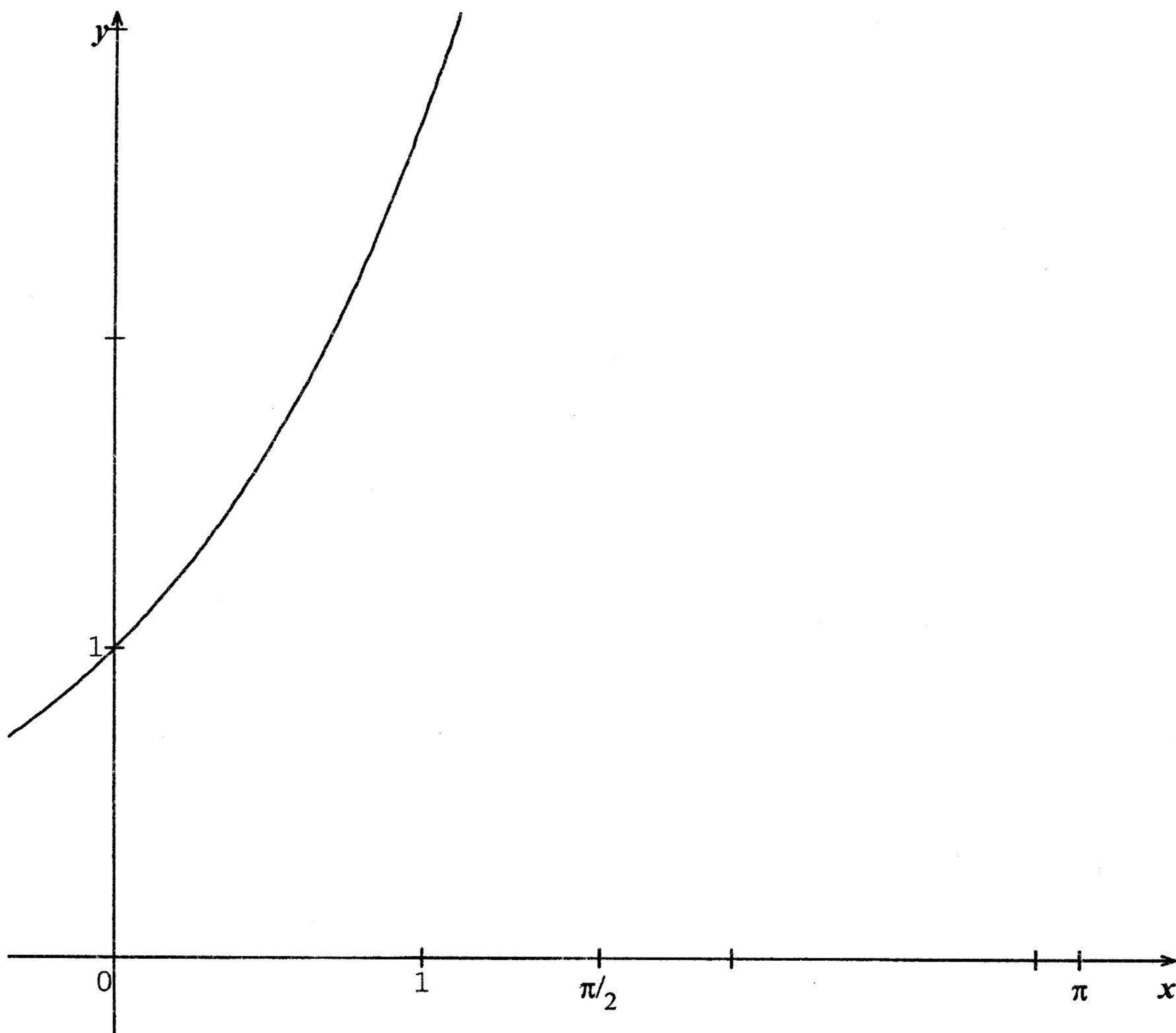
Tracer la droite (T) et la courbe (C_f) .

2) a) Montrer que $\int_0^1 f(x) dx \leq e-1$ et que $\int_1^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx \leq e\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$.

b) Soit A l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C_f) , l'axe $(O, \vec{i})$ et les droites

d'équations $x=0$ et $x=\pi$. Montrer que $\frac{\pi^2}{4} + \pi \leq A \leq e\pi - 2$.

Annexe (à rendre avec la copie)



MATHÉMATIQUES

Section : Mathématiques
Session principale : juin 2015

Exercice 1 (Thème : nombres complexes)

1) a) $\Delta = 4 - 16 = -12 = (2\sqrt{3}i)^2$; $z_1 = \frac{2 - 2\sqrt{3}i}{2} = 1 - i\sqrt{3}$ et $z_2 = \frac{2 + 2\sqrt{3}i}{2} = 1 + i\sqrt{3}$.

$$S_C = \{1 - i\sqrt{3}, 1 + i\sqrt{3}\}.$$

b) $1 - i\sqrt{3} = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$ et $1 + i\sqrt{3} = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$.

2) voir figure.

3) On sait que $N \in \Gamma$ donc $|z_N| = 2$.

De plus $\arg(z_N) \equiv (\vec{u}, \widehat{\overrightarrow{ON}})[2\pi] \equiv (\overrightarrow{OM}, \widehat{\overrightarrow{ON}}) + (\vec{u}, \widehat{\overrightarrow{OM}})[2\pi] \equiv \theta + \frac{\pi}{3}[2\pi]$.

Il en résulte que $z_N = 2e^{i(\theta + \frac{\pi}{3})}$.

4) a) L'expression complexe de r est $z' = e^{i\frac{\pi}{3}}(z - z_A) + z_A = e^{i\frac{\pi}{3}}(z - 2) + 2 = e^{i\frac{\pi}{3}}z - 2e^{i\frac{\pi}{3}} + 2$.

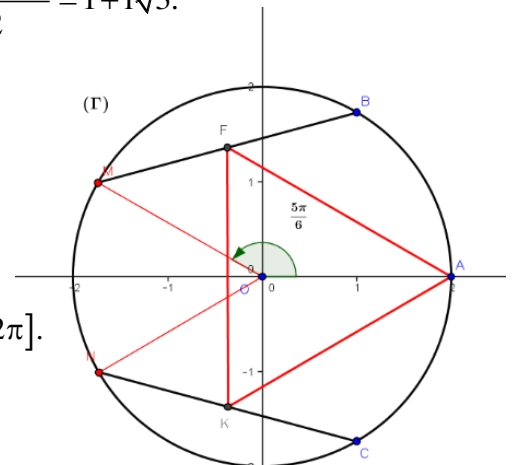
b) $z_F = \frac{z_B + z_M}{2} = e^{i\theta} + e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $z_K = \frac{z_C + z_N}{2} = e^{i(\theta + \frac{\pi}{3})} + e^{-i\frac{\pi}{3}}$. En remplaçant z par z_F dans l'expression complexe de r , on obtient

$$\begin{aligned} z' &= e^{i\frac{\pi}{3}} \left(e^{i\theta} + e^{i\frac{\pi}{3}} \right) - 2e^{i\frac{\pi}{3}} + 2 = e^{i(\theta + \frac{\pi}{3})} + e^{i\frac{2\pi}{3}} - 2e^{i\frac{\pi}{3}} + 2 \\ &= e^{i(\theta + \frac{\pi}{3})} - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - 2 \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) + 2 = e^{i(\theta + \frac{\pi}{3})} + \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i(\theta + \frac{\pi}{3})} + e^{-i\frac{\pi}{3}} = z_K \text{ donc } r(F) = K. \end{aligned}$$

c) Puisque $r(F) = K$ donc $\begin{cases} AF = AK \\ (\overrightarrow{AF}, \widehat{\overrightarrow{AK}}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi] \end{cases}$, il en résulte que le triangle AFK est équilatéral.

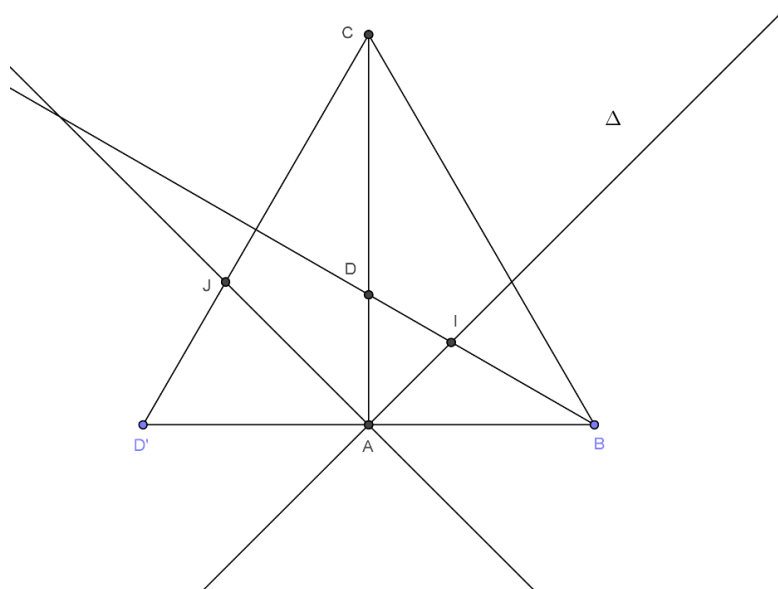
5) a) $AF^2 = \left| e^{i\theta} + e^{i\frac{\pi}{3}} - 2 \right|^2 = \left(e^{i\theta} + e^{i\frac{\pi}{3}} - 2 \right) \left(e^{-i\theta} + e^{-i\frac{\pi}{3}} - 2 \right) =$
 $6 + 2\cos\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) - 4\cos\frac{\pi}{3} - 4\cos\theta = 4 - (3\cos\theta - \sqrt{3}\sin\theta)$
 $= 4 - 2\sqrt{3}\cos\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right).$

b) AF^2 est maximale si et seulement si $\begin{cases} \cos\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) = -1 \\ \theta \in]-\pi, \pi] \end{cases}$ d'où $\theta = \frac{5\pi}{6}$.



$$a \cos x + b \sin x = r \cos(x - \varphi) ;$$

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ et } \begin{cases} \cos \varphi = \frac{a}{r} \\ \sin \varphi = \frac{b}{r} \end{cases}$$



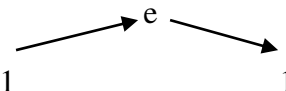
Exercice 3 (Thème : arithmétique)

- 1) a) $47 \times (-9) + 53 \times 8 = 1$ donc $(-9, 8)$ est solution de (E).
b) $47x + 53y = 47 \times (-9) + 53 \times 8 \Leftrightarrow 47(x + 9) = 53(8 - y)$ donc 47 divise $53(8 - y)$ et $47 \wedge 53 = 1$ donc 47 divise $(8 - y)$ d'où $y = 8 - 47k, k \in \mathbb{Z}$ par suite $x = 53k - 9, k \in \mathbb{Z}$.
Ainsi $S_{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}} = \{(53k - 9, 8 - 47k), k \in \mathbb{Z}\}$.
c) soit x un inverse de 47 modulo 53, alors $47x \equiv 1 \pmod{53} \Leftrightarrow$ il existe un entier y tel que $47x = 1 + 53y \Leftrightarrow 47x - 53y = 1 \Leftrightarrow (x, -y)$ solution de (E) donc $x = 53k - 9, k \in \mathbb{Z}$
d) $0 < x = 53k - 9 < 53 \Leftrightarrow \frac{9}{53} < k < \frac{62}{53}, k \in \mathbb{Z}$ donc $k = 1$ d'où $x = 44$.
- 2) a) D'après Fermat $45^{52} \equiv 1 \pmod{53}$
b) $45^{106} = (45^{52})^2 \times 45^2 \equiv 45^2 \pmod{53} \equiv 11 \pmod{53}$.
- 3) a) N est la somme de 106 termes d'une suite géométrique de raison 45
donc $N = \frac{1 - 45^{106}}{1 - 45} \Leftrightarrow 44N = 45^{106} - 1 \equiv 10 \pmod{53}$
b) $44N \equiv 10 \pmod{53}$ donc $N \equiv 470 \pmod{53} \equiv 46 \pmod{53}$.

Exercice 4 (Thèmes : variation d'une fonction , bijection , calcul intégral , notion d'aire)

I.

- 1) a) La fonction f est dérivable sur $[0, \pi]$ et $f'(x) = (\cos x)e^{\sin x}$.

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$f'(x)$	+		-
f	1		1

- b) Pour tout $x \in [0, \pi]$, $\pi - x \in [0, \pi]$ et $f(\pi - x) = e^{\sin(\pi - x)} = e^{\sin x} = f(x)$.
c) (T) : $y = f'(0)x + f(0) = x + 1$.
- 2) a) La fonction g est continue et strictement croissante sur $\left]0, \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right]$ donc
$$g\left(\left]0, \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right]\right) = \left]0, g\left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right)\right]$$
 par suite $g(x) > 0$ sur $\left]0, \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right]$.

La fonction g est continue et strictement décroissante sur $\left] \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, 1 \right[$ donc elle réalise une bijection de $\left] \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, 1 \right[$ sur $g\left(\left] \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, 1 \right[\right) = \left] -1, g\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) \right[$, $0 \in \left] -1, g\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) \right[$ donc il existe un unique $\alpha \in \left] \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, 1 \right[$ tel que $g(\alpha) = 0$. Ainsi l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in]0, 1[$.

b)

x	0	α	1
$g(x)$	+	$\bigcirc$	-

3) a) La fonction h est dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et $h'(x) = (\cos x)e^{\sin x} - 1 = g(\sin x)$.

b) La fonction $x \mapsto \sin x$ est une bijection de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ sur $[0, 1]$,
 or $\alpha \in [0, 1]$ donc il existe un unique $\beta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ tel que $\sin \beta = \alpha$.

la restriction de la fonction sinus à l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ est une bijection de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ sur $[0, 1]$

c) La fonction $x \mapsto \sin x$ est continue et strictement croissante sur chacun des intervalles $[0, \beta]$ et $[\beta, \alpha]$ donc $\sin([0, \beta]) = [\sin 0, \sin \beta] = [0, \alpha]$ et $\sin\left(\left[\beta, \frac{\pi}{2}\right]\right) = [\alpha, 1]$.

d)

x	0	β	$\frac{\pi}{2}$
$h'(x)$	+	$\bigcirc$	-
h	0	$h(\beta)$	$h\left(\frac{\pi}{2}\right)$

e) $h([0, \beta]) = [0, h(\beta)]$ et $h\left(\left[\beta, \frac{\pi}{2}\right]\right) = \left[h\left(\frac{\pi}{2}\right), h(\beta)\right]$ et $h\left(\frac{\pi}{2}\right) > 0$ donc $h(x) \geq 0$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par suite $f(x) \geq x + 1$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ donc (C_f) est en dessus de (T) .

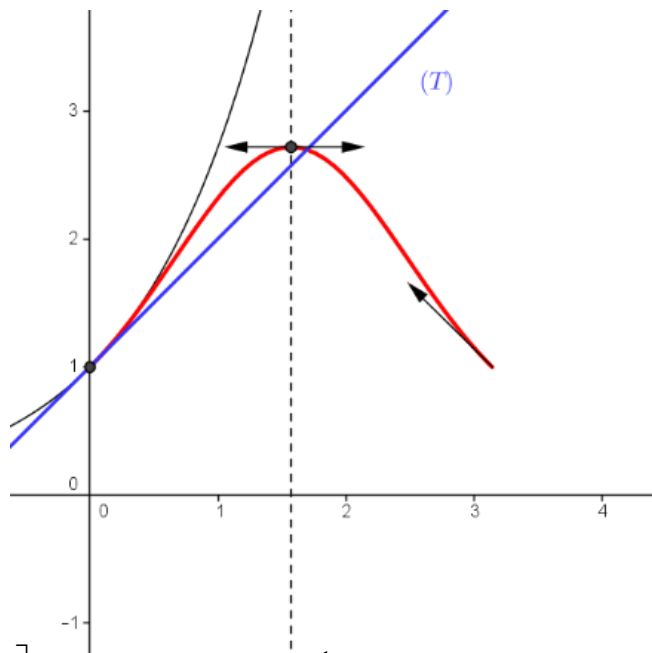
II.

1) a) pour tout $x \geq 0$, $\cos t \leq 1$, $t \in [0, x]$ et $t \mapsto \cos t$ est continue sur $[0, x]$ donc $\int_0^x \cos t dt \leq x$ donc $\sin x \leq x$.

b) La fonction $x \mapsto e^x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et $\sin x \leq x$ pour tout $x \geq 0$ donc

$$e^{\sin x} \leq e^x \Leftrightarrow f(x) \leq e^x \text{ pour tout } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

c)



2) a) on sait que $f(x) \leq e^x$ pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ donc $\int_0^1 f(x) dx \leq \left[e^x\right]_0^1 = e - 1$

on sait que $\sin x \leq 1$ donc $f(x) \leq e$ donc $\int_1^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx \leq e \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$.

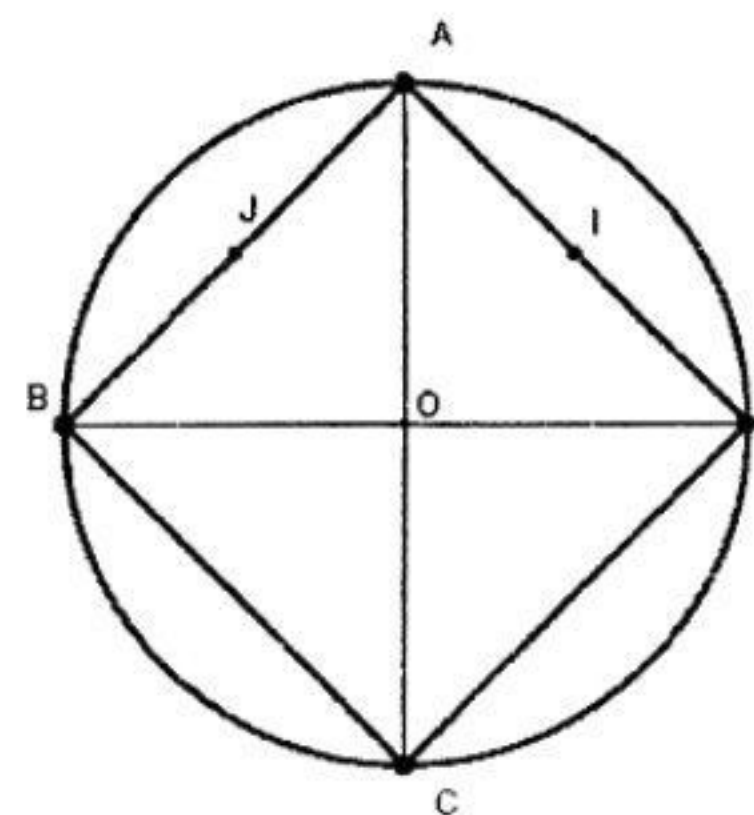
b) $A = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$

$$\left[\frac{x^2}{2} + x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx \leq e - 1 + e \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) \text{ donc } \frac{\pi^2}{4} + \pi \leq A \leq e\pi - 2$$

REPUBLICQUE TUNISIENNE MINISTERE DE L'EDUCATION ♦♦♦♦ EXAMEN DU BACCALAUREAT SESSION 2015	Epreuve : MATHEMATIQUES
	Durée : 4 H
	Coefficient : 4
Section : Mathématiques	Session de contrôle

Exercice 1 (4 points)

Le plan est orienté. Dans la figure ci-contre, ABCD est un carré inscrit dans le cercle (C) de centre O, $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$ et I et J sont les milieux respectifs des segments [AD] et [AB].

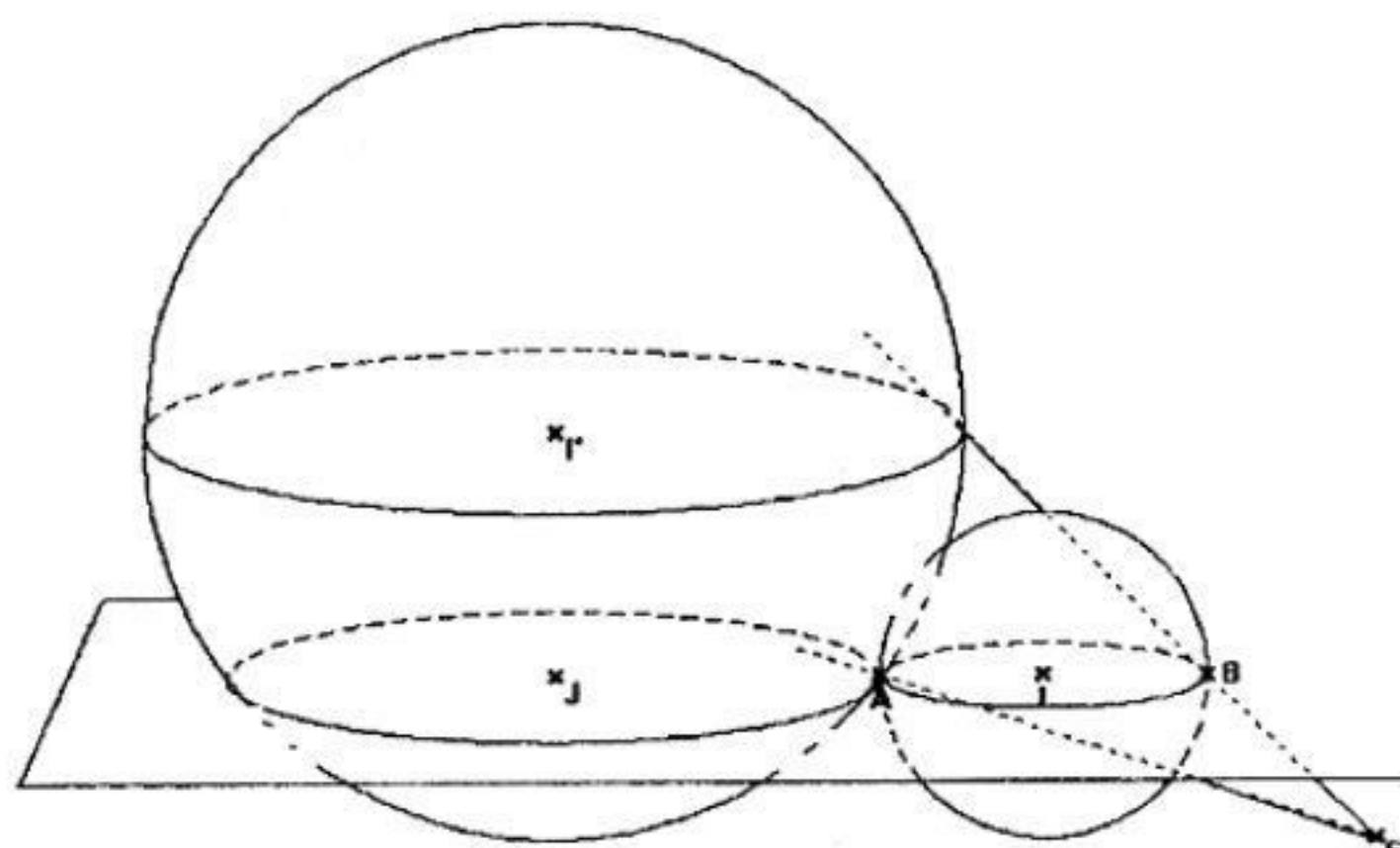


- 1) Soit f la similitude directe qui envoie A sur B et I sur O.
 - a) Justifier que f est d'angle $\frac{\pi}{4}$ et de rapport $\sqrt{2}$.
 - b) Déterminer le centre de f .
- 2) La droite (CJ) recoupe le cercle (C) en E et soit H le projeté orthogonal du point B sur (AE).
 - a) Justifier que E est le milieu du segment [AH] et en déduire que $\overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{EB} = -EA^2$.
 - b) Montrer d'autre part que $\overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{EB} = -\frac{\sqrt{2}}{2} EA \cdot EB$.
- 3) On considère la similitude indirecte g de centre E qui envoie B sur A.
 - a) Déterminer le rapport de g .
 - b) Soit $O' = g(O)$. Justifier que le triangle $O'EA$ est isocèle.
 - c) Montrer que $O'A = AI$.
- 4) Soit $S = gof$. Montrer que S est une symétrie orthogonale dont on précisera l'axe.

Exercice 2 (5 points)

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormé de l'espace. On considère les points $A(-2, 3, 2)$ et $B(2, 3, 2)$ et l'ensemble S des points $M(x, y, z)$ de l'espace tels que $x^2 + y^2 + z^2 - 6y - 4z + 9 = 0$.

- 1) a) Montrer que S est une sphère et préciser son rayon et les coordonnées de son centre I.
- b) Montrer que [AB] est un diamètre de S.



- 2) Soit P le plan d'équation $z = 2$ et soit $J(-6, 3, 2)$.
- Vérifier que I appartient au plan P et en déduire que la sphère S coupe P suivant le cercle Γ de diamètre $[AB]$.
 - Dans le plan P , on considère le cercle Γ' de centre J et de rayon 4.
Montrer que les cercles Γ et Γ' sont tangents extérieurement en A .
- 3) Soit E le point de coordonnées $(4, 3, 0)$. On considère l'homothétie h de centre E , de rapport $\frac{5}{2}$ et on désigne par S' la sphère image de S par h .
- Déterminer le rayon de S' et les coordonnées de son centre I' .
 - Justifier que le plan P coupe la sphère S' suivant le cercle Γ' .
 - La droite (EA) recoupe S' en A' . Soit B' le point diamétralement opposé à A' sur la sphère S' .
Montrer que les points E , B et B' sont alignés.

Exercice 3 (4 points)

On a recensé, dans un pays, les dépenses en dinars des ménages en produits informatiques et téléphoniques de l'année 2004 jusqu'à l'année 2013.

Le tableau ci-dessous donne ces dépenses Y (en 10^6 dinars) suivant le rang de l'année X .

Rang de l'année X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Dépenses Y ($10^6 D$)	0.38	0.46	0.52	0.78	0.86	0.92	0.96	1.02	1.08	1.20

Dans l'annexe ci-jointe (Figure 1), on a représenté dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ le nuage de points de la série (X, Y) .

- On se propose d'ajuster la série double (X, Y) par la droite de Mayer. (Les valeurs seront arrondies au centième près).
 - Déterminer les coordonnées du point moyen G de ce nuage.
 - Soit G_1 le point moyen des cinq premiers points du nuage. Calculer les coordonnées de G_1 .
 - Tracer la droite (GG_1) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
 - Déterminer une équation de la droite (GG_1) sous la forme $y = ax + b$.
 - En utilisant l'ajustement de cette série par la droite de Mayer, donner une prévision des dépenses des ménages pour l'année 2019.
- On pose $Z = e^Y$ et on obtient le tableau suivant :

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Z	1.46	1.58	1.68	2.18	2.36	2.51	2.61	2.77	2.95	3.32

- Déterminer le coefficient de corrélation r de la série (X, Z) .
- Ecrire une équation de la droite affine de Z en X par la méthode des moindres carrés. (les coefficients de la droite seront arrondis au centième).
- En utilisant cet ajustement, donner une prévision des dépenses de l'année 2019.

Exercice 4 (7 points)

I- 1) Soit la fonction u définie sur $]0, +\infty[$ par $u(t) = 3 \ln(1+t) - \frac{t}{1+t}$.

- a) Dresser le tableau de variation de la fonction u .
- b) En déduire le signe de u .

2) Soit la fonction f définie sur $[0, 1]$ par :
$$\begin{cases} f(x) = x^3 [\ln(1+x) - \ln x] & \text{si } x \in]0, 1] \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

a) Montrer que f est continue et dérivable à droite en 0 et calculer $f'_d(0)$.

b) Vérifier que pour tout $x \in]0, 1]$, $f'(x) = x^2 u\left(\frac{1}{x}\right)$.

c) Dresser le tableau de variation de la fonction f .

II- On considère les fonctions g et h définies sur $[0, 1]$ par

$$g(x) = x^3 \ln(x+1) \quad \text{et} \quad \begin{cases} h(x) = x^3 \ln x & \text{si } x \in]0, 1] \\ h(0) = 0 \end{cases}$$

On désigne respectivement par (C_f) , (C_g) et (C_h) les courbes des fonctions f , g et h dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) Montrer que la courbe (C_h) admet une tangente horizontale au point d'abscisse $e^{-\frac{1}{3}}$.

2) a) Vérifier que pour tout réel x de $[0, 1]$; $f(x) = g(x) - h(x)$.

b) Donner la position relative des courbes (C_f) et (C_g) .

c) Soit T et T' les tangentes respectives à (C_f) et (C_g) aux points d'abscisse $e^{-\frac{1}{3}}$.

Montrer que T et T' sont parallèles.

3) Dans l'annexe ci-jointe (Figure 2), on a tracé dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ les courbes (C_g) et (C_h) et leurs tangentes aux points d'abscisse $e^{-\frac{1}{3}}$.

a) Construire le point de (C_f) d'abscisse $e^{-\frac{1}{3}}$ et la tangente (T) .

b) Tracer la courbe (C_f) .

4) a) Justifier que h admet une unique primitive H sur l'intervalle $[0, 1]$ qui s'annule en 1.

b) Soit $\alpha \in]0, 1]$ et $A_\alpha = \int_\alpha^1 x^3 \ln x dx$. Exprimer A_α en fonction de H .

c) Calculer A_α à l'aide d'une intégration par parties.

d) En déduire $H(0)$.

e) Déterminer alors l'aire de la partie du plan limitée par les deux courbes (C_f) et (C_g) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

Section : Mathématiques
Session de contrôle : juin 2015

Exercice 1 (Thèmes : similitude directe ; similitude indirecte ; antidéplacement)

1) a) Une mesure de l'angle de f est $(\overline{AI}, \widehat{\overline{BO}}) \equiv (\overline{AD}, \widehat{\overline{BD}})[2\pi] \equiv (\overline{DA}, \widehat{\overline{DB}})[2\pi] \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$.

$$\text{Le rapport de f est } \frac{OB}{AI} = \frac{\frac{1}{2}DB}{\frac{1}{2}AD} = \frac{DB}{AD} = \frac{1}{\cos \frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}.$$

b) $\frac{DB}{AD} = \sqrt{2}$ et $(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$, il en résulte que D est le centre de f.

2) a) $[AC]$ est un diamètre de (ζ) et $E \in (\zeta) \setminus \{A, C\}$ donc $(CE) \perp (AE)$ et $(BH) \perp (AE)$ donc $(BH) \parallel (CE)$,
or (CE) passe par J le milieu de $[AB]$ et coupe $[AH]$ en E , il en résulte que E est le milieu de $[AH]$.

$$\overrightarrow{EA}.\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{EA}.\overrightarrow{EH} = -EA \times EH = -EA^2.$$

$$\text{b) } \overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{EB} = EA \cdot EB \cdot \cos(\angle AEB) = EA \cdot EB \cdot \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} EA \cdot EB.$$

$$\text{car}(\overrightarrow{\text{EB}}, \hat{\overrightarrow{\text{EA}}}) \equiv \pi + (\overrightarrow{\text{CB}}, \hat{\overrightarrow{\text{CA}}}) \equiv \frac{3\pi}{4} [2\pi].$$

3) a) Le rapport de g est $\frac{EA}{EB} = \frac{EH}{\sqrt{2}EH} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

b) Le triangle OEB est isocèle donc son image par g est un triangle isocèle, on en déduit que le triangle O'EA est isocèle.

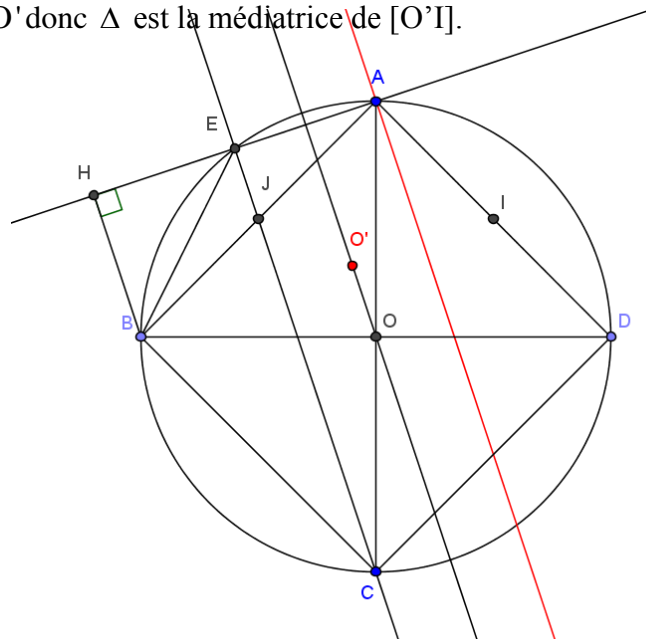
c) On sait que $f(A) = B$ et $f(I) = O$ donc $AI = \frac{1}{\sqrt{2}}OB$ de plus

$g(B) = A$ et $g(O) = O'$ donc $AO' = \frac{1}{\sqrt{2}}OB$, il en résulte que $O'A = AI$.

4) S est la composée d'une similitude directe de rapport $\sqrt{2}$ est d'une similitude indirecte de rapport $\frac{1}{\sqrt{2}}$ donc

S est une similitude indirecte de rapport 1 donc S est un antidéplacement.

$S(A) = g(f(A)) = g(B) = A$, il en résulte que S est une symétrie orthogonale d'axe Δ qui passe par O de plus $S(I) = g(f(I)) = g(O) = O'$ donc Δ est la médiatrice de $[O'I]$.



Exercice 2 (Thèmes : sphère ; homothétie dans l'espace)

- 1) a) $M(x, y, z) \in S \Leftrightarrow x^2 + (y-3)^2 + (z-2)^2 = 4$, on en déduit que S est la sphère de centre $I(0, 3, 2)$ et de rayon 2.
 b) Il suffit de vérifier que $A \in S$, $B \in S$ et I est le milieu de $[AB]$.
- 2) a) La cote du point I est 2 donc $I \in P$ par suite S coupe P suivant le cercle Γ de centre I et de rayon 2, or A et B appartiennent à P et I est le milieu de $[AB]$, donc $[AB]$ est un diamètre de Γ .
 b) $IA = 2$, $JA = 4$ et $IJ = 6$ donc $IA + JA = IJ$ par suite Γ et Γ' sont tangents extérieurement en A .
- 3) a) Le rayon de S' est égal à $\frac{5}{2} \times 2 = 5$. On pose $I'(x, y, z)$,

$$h(I) = I' \Leftrightarrow \overrightarrow{EI'} = \frac{5}{2} \overrightarrow{EI} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 4 = -10 \\ y - 3 = 0 \\ z = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -6 \\ y = 3 \\ z = 5 \end{cases}, \text{ il en résulte que } I'(-6, 3, 5).$$

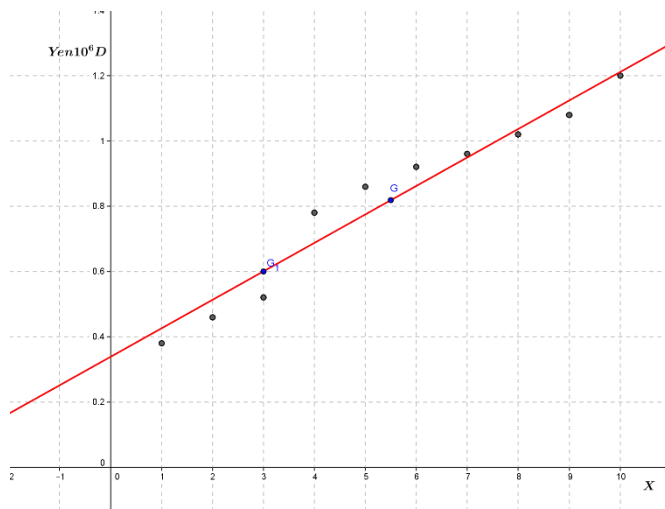
 b) $d(I', P) = 3 < 5$ donc S' coupe P suivant un cercle de rayon $\sqrt{25 - 9} = 4$ et de centre le projeté orthogonal de I' sur P , or J est un point de P et $\overrightarrow{I'J} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ est normal à P donc J est le projeté orthogonal de I' sur P , il en résulte que P coupe S' suivant le cercle Γ' .
 c) $A \in S \cap (EA)$ donc $h(A) \in S' \cap (EA) = \{A, A'\}$ or $h(A) \neq A$ donc $h(A) = A'$.
 B est le point diamétralement opposé à A sur S donc $h(B)$ est le point diamétralement opposé à A' sur S' , on en déduit que $h(B) = B'$ par suite E, B et B' sont alignés.

Exercice 3 (Thème : statistique à deux variables)

- 1) a) $G(\overline{X}, \overline{Y})$ donc $G(5.5, 0.818)$.

b) $G_1(3, 0.6)$.

c)



d) $a = \frac{0.6 - 0.818}{3 - 5.5} = 0.09$ donc $(GG_1): y = 0.0872x + b$ or $G_1 \in (GG_1)$

donc $0.6 = 0.09 \times 3 + b \Leftrightarrow b = 0.33$, il en résulte que $(GG_1): y = 0.09x + 0.33$.

e) Pour $x = 16$, on obtient $y = 1.77$.

2) a) $r = \frac{\text{cov}(X, Z)}{\sigma_X \sigma_Z} = 0.987$.

b) $Z = bX + a$ avec $b = \frac{\text{cov}(X, Z)}{\sigma_X^2} = 0.2$ et $a = \bar{Z} - b\bar{X} = 1.23$. Ainsi $Z = 0.2X + 1.23$

c) $Z = 0.2X + 1.23 \Leftrightarrow e^Y = 0.2X + 1.23 \Leftrightarrow Y = \ln(0.2X + 1.23)$. Pour $x = 16$, on obtient $y = 1.488399584$.

Exercice 4 (Thèmes : variation d'une fonction ; notion de primitive ; notion d'aire)

I. 1) a) Pour tout $t > 0$, $u'(t) = \frac{3}{1+t} - \frac{1}{(1+t)^2} = \frac{2+3t}{(1+t)^2} > 0$.

x	0	$+\infty$
$u'(t)$		+
u	0	$\nearrow +\infty$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} 3 \ln(1+t) - \frac{1}{\frac{1}{t} + 1} = +\infty.$$

b) $u(]0, +\infty[) =]0, +\infty[$ donc $u(t) > 0$ pour tout $t > 0$.

2) a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = x^3 \ln(1+x) - x^3 \ln x = 0 = f(0)$ donc f est continue à droite en 0.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = x^2 \ln(1+x) - x^2 \ln x = 0 = f'_d(0) \text{ donc } f \text{ est dérivable à droite en 0.}$$

b) Pour tout $x \in]0, 1]$, $f'(x) = 3x^2 [\ln(1+x) - \ln x] + x^3 \left[\frac{1}{1+x} - \frac{1}{x} \right]$

$$= x^2 \left[3 \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) - \frac{\frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}} \right] = x^2 u \left(\frac{1}{x} \right).$$

c) On a $u(x) > 0$ pour tout $x > 0$ donc $u\left(\frac{1}{x}\right) > 0$ pour tout $x \in]0, 1]$ d'où $f'(x) > 0$ pour tout $x \in]0, 1]$

x	0	1
$f'(x)$	0	+
f	0	$\nearrow \ln 2$

II. 1) Pour tout $x \in]0, 1]$, $h'(x) = 3x^2 \ln x + x^2 = x^2 (3 \ln x + 1)$.

Pour tout $x \in]0, 1]$, $h'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow x = e^{-\frac{1}{3}}$. On en déduit que (C_h) admet une tangente

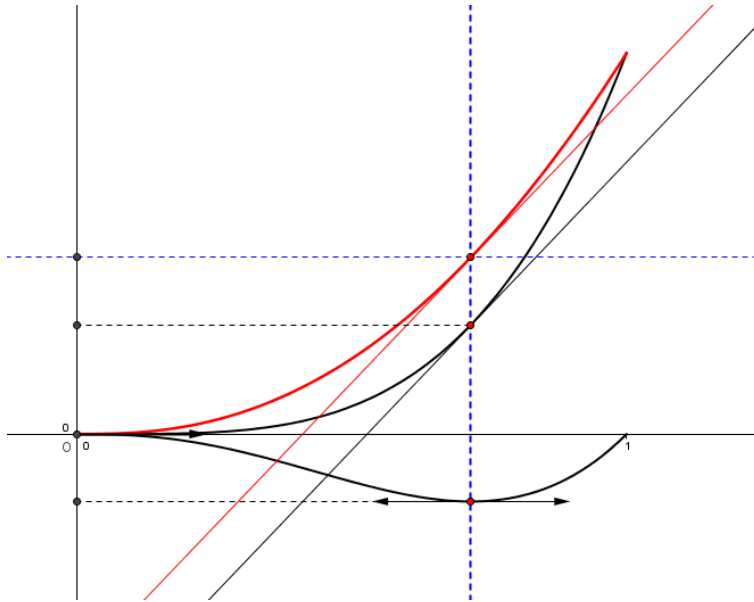
horizontale au point d'abscisse $e^{-\frac{1}{3}}$.

2) a) Pour tout $x \in]0,1]$, $f(x) = x^3 \ln(1+x) - x^3 \ln x = g(x) - h(x)$ et $f(0) = g(0) - h(0)$ donc pour tout $x \in [0,1]$, $f(x) = g(x) - h(x)$.

b) Pour tout $x \in [0,1]$, $f(x) - g(x) = -h(x) \geq 0$ donc (C_f) est au-dessus de (C_g) et les points $(0,0)$ et $(1, \ln 2)$ sont des points d'intersection.

c) $f'\left(e^{-\frac{1}{3}}\right) - g'\left(e^{-\frac{1}{3}}\right) = -h'\left(e^{-\frac{1}{3}}\right) = 0 \Leftrightarrow f'\left(e^{-\frac{1}{3}}\right) = g'\left(e^{-\frac{1}{3}}\right)$ donc $T \perp T'$.

3)



4) a) La fonction h est continue sur $[0,1]$ donc elle admet une unique primitive H qui s'annule en 1.

b) $A(\alpha) = H(1) - H(\alpha) = -H(\alpha)$.

c) On pose $\begin{cases} u(x) = \ln x \\ v'(x) = x^3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x} \\ v(x) = \frac{x^4}{4} \end{cases}$

$$A(\alpha) = \left[\frac{x^4}{4} \ln x \right]_{\alpha}^1 - \frac{1}{4} \int_{\alpha}^1 x^3 dx = -\frac{\alpha^4}{4} \ln \alpha - \frac{1}{16} [x^4]_{\alpha}^1 = -\frac{\alpha^4}{4} \ln \alpha - \frac{1}{16} + \frac{1}{16} \alpha^4.$$

d) $H(0) = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} -A(\alpha) = \frac{1}{16}$.

e) $A = \int_0^1 (f(x) - g(x)) dx = -\int_0^1 h(x) dx = H(0) = \frac{1}{16}$.

Le sujet comporte 4 pages. La page annexe 4/4 est à rendre avec la copie.

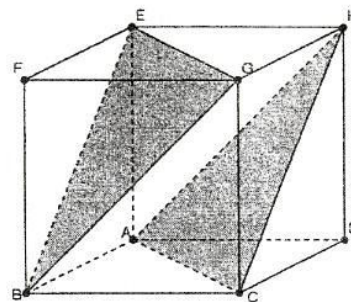
Exercice 1 (4 points)

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $(A, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soit ABCDEFGH le cube tel que

$$\overline{AB} = 6\vec{i}, \overline{AD} = 6\vec{j} \text{ et } \overline{AE} = 6\vec{k}.$$

On désigne par P le plan (ACH) et par Q le plan (EGB).



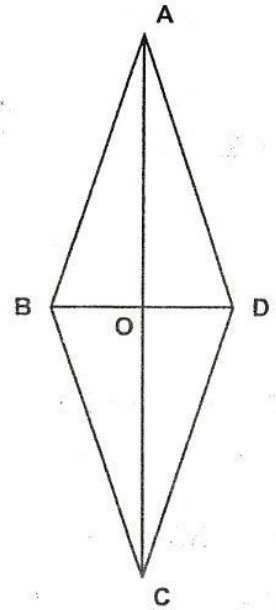
- 1) a) Déterminer les composantes du vecteur $\overline{AC} \wedge \overline{AH}$.
b) En déduire une équation du plan P.
c) Montrer que les plans P et Q sont parallèles et donner une équation du plan Q.
- 2) Soit S la sphère d'équation $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 2z = 0$
a) Déterminer le rayon de S et les coordonnées de son centre I.
b) Soit J le projeté orthogonal de A sur le plan Q. Montrer que [AJ] est un diamètre de S.
c) Montrer que la sphère S est tangente à chacun des deux plans P et Q.
- 3) Soit t la translation de vecteur $\vec{U} = 2\vec{i} + 4\vec{j} + 2\vec{k}$.
a) Soit A' et J' les images respectives de A et J par t. Déterminer les coordonnées de A' et J'.
b) Déterminer S' l'image de la sphère S par t.
c) Montrer que S' est tangente aux deux plans P et Q et déterminer leurs points de contact.

Exercice 2 (5 points)

Le plan est orienté dans le sens direct.

Dans la figure ci-contre, ABCD est un losange

de centre O tel que $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$ et $AC = 3 BD$.



- 1) Soit f la similitude directe qui envoie A en B et C en D.
 - a) Déterminer le rapport et l'angle de f .
 - b) Montrer que O est le centre de f .
- 2) a) Soit D' l'image de D par f . Montrer que D' est l'orthocentre du triangle ABD et que $OA = 9OD'$.

b) Soit B' l'image de B par f . Montrer que $BB'DD'$ est un losange.
- 3) Soit $g = f \circ S_{(AC)}$.
 - a) Déterminer la nature de g .
 - b) Déterminer les images des points O, A, B, C et D par g .
 - c) Déterminer l'axe Δ de g .
 - d) La droite Δ coupe les droites (AB), (BD'), (DB') et (CD) respectivement en M, N, P et Q.
Montrer que $MQ = 3 NP$.

Exercice 3 (4 points)

- 1) Soit a un entier tel que $a \equiv 1 \pmod{10}$.
 - a) Montrer que $a^9 + a^8 + \dots + a + 1 \equiv 0 \pmod{10}$.
 - b) En déduire que $a^{10} \equiv 1 \pmod{10^2}$.
(On pourra utiliser l'égalité $a^{10} - 1 = (a - 1)(a^9 + a^8 + \dots + a + 1)$).
- 2) Soit b un entier.
 - a) Déterminer les restes possibles de b^4 dans la division euclidienne par 10.
 - b) En déduire que $b^4 \equiv 1 \pmod{10}$ si et seulement si b est premier avec 10.
- 3) Soit b un entier premier avec 10.
 - a) Montrer que $b^{40} \equiv 1 \pmod{10^2}$.
 - b) Déterminer les deux derniers chiffres de 67^{42} .

Exercice 4 (7points)

Soit f la fonction définie sur $\left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$ par $f(x) = \ln(1 + \tan x)$ et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a) Montrer que $\lim_{x \rightarrow \left(-\frac{\pi}{4}\right)^+} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} f(x) = +\infty$.

b) Calculer $f'(x)$ pour x appartenant à $\left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$.

c) Dresser le tableau de variation de f .

2) a) Vérifier que les points O , $A\left(\frac{\pi}{4}, \ln 2\right)$ et $I\left(\frac{\pi}{8}, \frac{\ln 2}{2}\right)$ sont des points de (C) .

(On donne $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{2} - 1$).

b) Montrer que $f\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \ln 2 - f(x)$ pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$.

(On rappelle que $\tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{1 - \tan x}{1 + \tan x}$.)

c) Justifier alors que le point I est un centre de symétrie de la courbe (C) .

Dans l'annexe ci-jointe, on a placé les points I et A dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

3) Tracer la courbe (C) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ en précisant sa tangente au point O .

4) On désigne par S_1 la partie du plan limitée par la courbe (C) , la droite (OA) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \frac{\pi}{8}$ et on désigne par S_2 la partie du plan limitée par la courbe (C) ,

la droite (OA) et les droites d'équations $x = \frac{\pi}{8}$ et $x = \frac{\pi}{4}$.

a) Justifier que les surfaces S_1 et S_2 ont la même aire.

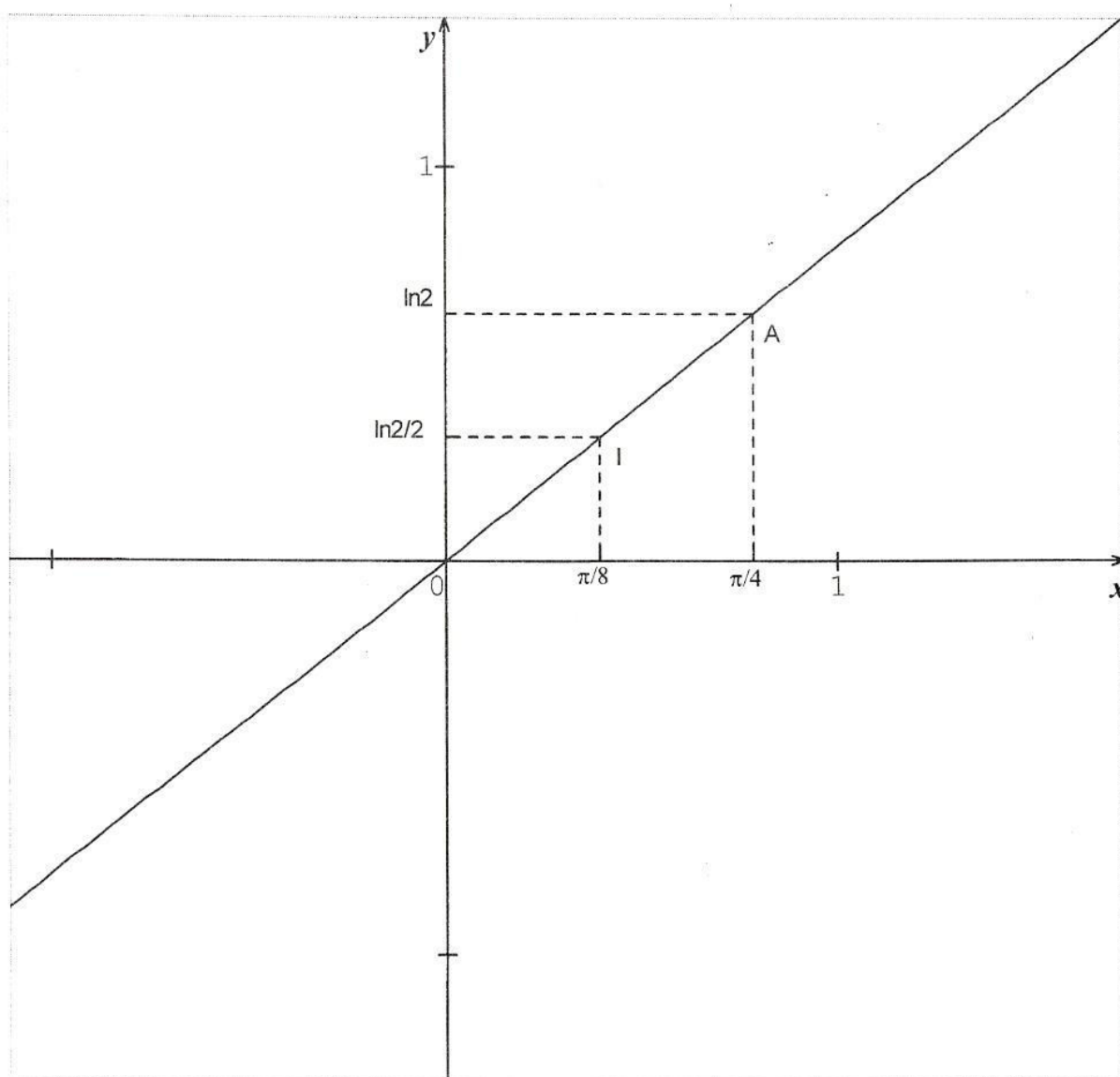
b) Calculer alors $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \tan x) dx$.

5) a) Montrer que la fonction f réalise une bijection de l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$ sur un intervalle J que l'on précisera. On note f^{-1} la réciproque de f .

b) Justifier que f^{-1} est dérivable sur J et donner l'expression de $(f^{-1})'(x)$ pour x appartenant à J .

c) Donner la valeur de $\int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{1 + (e^x - 1)^2} dx$.

Annexe (à rendre avec la copie)



Exercice 1

- 1) a) $A(0,0,0)$, $C(6,6,0)$ et $H(0,6,6)$

$$\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}, \overrightarrow{AH} \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} \text{ donc } \overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AH} \begin{pmatrix} 36 \\ -36 \\ 36 \end{pmatrix}.$$

- b) Le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est normal à (P) donc $(P): x - y + z + d = 0$ et puisque A est un point de (P) , il

en résulte que $(P): x - y + z = 0$.

- c) $\begin{cases} (EG) \parallel (AC) \\ (EB) \parallel (CH) \end{cases}$ donc les plans (P) et (Q) sont parallèles donc $(Q): x - y + z + d = 0$,

or $B(6,0,0) \in (Q)$, il en résulte que $d = -6$. D'où $(Q): x - y + z - 6 = 0$.

- 2) a) $M(x, y, z) \in S \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 3$. On en déduit que la sphère S a pour rayon $R = \sqrt{3}$ et pour centre $I(1, -1, 1)$.

- b) Soit (Δ) la perpendiculaire à (Q) et passant par A , $(\Delta): \begin{cases} x = \alpha \\ y = -\alpha, \alpha \in \mathbb{R}. \\ z = \alpha \end{cases}$

$$J(x, y, z) \in \Delta \cap Q \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha \\ y = -\alpha \\ z = \alpha \\ x - y + z - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 2 \\ x = 2 \\ y = -2 \\ z = 2 \end{cases}, \text{ il en résulte que } J(2, -2, 2).$$

$$\begin{cases} A \in S \\ J \in S \\ I = A * J \end{cases}, \text{ on en déduit que } [AJ] \text{ est un diamètre de } S.$$

- c) $d(I, Q) = IJ = \sqrt{3} = R$ et $d(I, P) = IA = \sqrt{3} = R$ donc la sphère S est tangente à chacun des deux plans P et Q respectivement en A et J .

- 3) a) $A' = t(A) \Leftrightarrow \overrightarrow{AA'} = \vec{u}$ donc $A'(2, 4, 2)$.

$$\text{On pose } J'(x, y, z). J' = t(J) \Leftrightarrow \overrightarrow{JJ'} = \vec{u} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = 2 \\ y + 2 = 4 \\ z - 2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \\ z = 4 \end{cases} \text{ donc } J'(4, 2, 4).$$

b) Soit I' l'image de I par t .

$$\text{On pose } I'(x, y, z). I' = t(I) \Leftrightarrow \overrightarrow{II'} = \vec{u} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = 2 \\ y + 1 = 4 \\ z - 1 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 3 \\ z = 3 \end{cases} \text{ donc } I'(3, 3, 3).$$

Ainsi l'image de S par t est la sphère S' de centre $I'(3, 3, 3)$ et de rayon $R = \sqrt{3}$.

c) $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$ donc $\vec{u}$ est un vecteur de P et de Q , il en résulte que $t(P) = P$ et $t(Q) = Q$.

La sphère S est tangente à chacun des deux plans P et Q respectivement en A et J donc $S' = t(S)$ est tangente à chacun des deux plans $t(P) = P$ et $t(Q) = Q$ respectivement en A' et J' .

Exercice 2

1) a) Une mesure de l'angle de f est $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}) \equiv (\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD})[2\pi] \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$. Le rapport de f est $\frac{BD}{AC} = \frac{1}{3}$.

$$\text{b) } \begin{cases} (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \\ \frac{OB}{OA} = \frac{\frac{1}{2}BD}{\frac{1}{2}AC} = \frac{1}{3} \end{cases} \text{ donc } O \text{ est le centre de } f.$$

2) a) On sait que $[OA]$ est la hauteur issue de A dans le triangle ABD .

$f(C) = D$ et $f(D) = D'$ donc $(DD') \perp (CD)$ et $(CD) \parallel (AB)$ par suite $(DD') \perp (AB)$, il en résulte que (DD') est la droite qui porte la hauteur issue de D dans le triangle ABD .

D'autre part $f(D) = D'$ donc $(\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OD'}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ d'où $D' \in (OA)$. On en déduit que D' est l'orthocentre du triangle ABD .

On sait que $f(D) = D'$ donc $OD = 3OD'$ et puisque $OA = 3OD$ donc $OA = 9OD'$.

b) On sait que $f(A) = B$, $f(B) = B'$, $f(C) = D$ et $f(D) = D'$, puisque $ABCD$ est un losange donc $BB'DD'$ est un losange.

3) a) g est la composée d'une similitude directe de rapport $\frac{1}{3}$ et d'un antidéplacement (similitude indirecte de rapport 1) donc g est une similitude indirecte de rapport $\frac{1}{3}$.

$$\text{b) } g(O) = f \circ S_{(AC)}(O) = f(O) = O.$$

$$g(A) = f \circ S_{(AC)}(A) = f(A) = B.$$

$$g(B) = f \circ S_{(AC)}(B) = f(D) = D'.$$

$$g(C) = f \circ S_{(AC)}(C) = f(C) = D.$$

$$g(D) = f \circ S_{(AC)}(D) = f(B) = B'.$$

c) Puisque le rapport de g est $\frac{1}{3}$ et $g(O) = O$ donc O est le centre de g et comme $g(A) = B$ donc Δ est la droite qui porte la bissectrice intérieure de AOB .

d) $M \in \Delta \cap (AB)$ donc $g(M) \in g(\Delta) \cap g((AB))$ donc $g(M) \in \Delta \cap (BD') = \{N\}$ d'où $g(M) = N$.

De même, on montre que $g(Q) = P$ par suite $MQ = 3NP$.

Exercice 3

1) a) Puisque $a \equiv 1 \pmod{10}$ donc $a^n \equiv 1 \pmod{10}, n \in \mathbb{N}^*$.

Il en résulte que $1 + a + \dots + a^9 \equiv 10 \pmod{10} \equiv 0 \pmod{10}$.

b) On sait que $a \equiv 1 \pmod{10}$ donc $a - 1 \equiv 0 \pmod{10}$ donc il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a - 1 = 10k$ et

$1 + a + \dots + a^9 \equiv 0 \pmod{10}$ donc il existe $k' \in \mathbb{Z}$ tel que $1 + a + \dots + a^9 = 10k'$, il en résulte que $a^{10} - 1 = 10^2 k k'$ ou encore $a^{10} - 1 \equiv 0 \pmod{10^2}$ d'où $a^{10} \equiv 1 \pmod{10^2}$.

2) a)

Reste de $b \pmod{10}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Reste de $b^4 \pmod{10}$	0	1	6	1	6	5	6	1	6	1

b) Soit r le reste de $b \pmod{10}$.

Si $r \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$, alors 2 divise b et 10 donc $b \wedge 10 \neq 1$.

Si $r = 5$, alors 5 divise b et 10 donc $b \wedge 10 \neq 1$.

Si $r \in \{1, 3, 7, 9\}$ alors b n'est divisible ni par 2 ni par 5 donc $b \wedge 10 = 1$.

Ainsi $b \wedge 10 = 1 \Leftrightarrow r \in \{1, 3, 7, 9\}$ et d'après a) $r \in \{1, 3, 7, 9\} \Leftrightarrow b^4 \equiv 1 \pmod{10}$, on en déduit que

$$b^4 \equiv 1 \pmod{10} \Leftrightarrow b \wedge 10 = 1.$$

3) a) Si b est premier avec 10 alors d'après 2)b) $b^4 \equiv 1 \pmod{10}$ et d'après 1) $(b^4)^{10} \equiv 1 \pmod{10^2}$ d'où $b^{40} \equiv 1 \pmod{10^2}$.

b) $67 \wedge 10 = 1$ donc $67^{40} \equiv 1 \pmod{10^2}$ et $67^2 \equiv 89 \pmod{10^2}$ donc $67^{42} \equiv 89 \pmod{10^2}$.

Exercice 4

$$1) \ a) \begin{cases} \lim_{x \rightarrow \left(-\frac{\pi}{4}\right)^+} 1 + \tan x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \end{cases} \quad \text{donc} \quad \lim_{x \rightarrow \left(-\frac{\pi}{4}\right)^+} f(x) = -\infty.$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} 1 + \tan x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \end{cases} \quad \text{donc} \quad \lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} f(x) = +\infty.$$

b) La fonction f est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$ et pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$, $f'(x) = \frac{1 + \tan^2 x}{1 + \tan x}$.

c) Pour tout $x \in \left] -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right[$, $f'(x) = \frac{1 + \tan^2 x}{1 + \tan x} > 0$

x	$-\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
f'(x)	+	
f	$-\infty$  $+\infty$	

2) a) $f(0) = \ln 1 = 0$ donc $O \in (C)$.

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \ln 2 \text{ donc } A \in (\mathbb{C}).$$

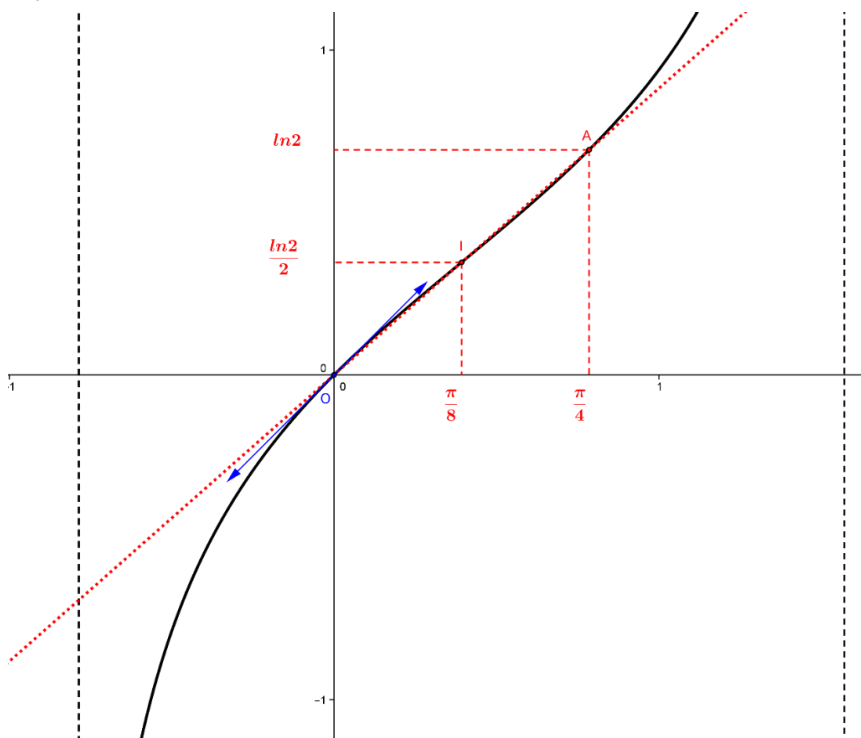
$$f\left(\frac{\pi}{8}\right) = \ln \sqrt{2} = \frac{\ln 2}{2} \text{ donc } I \in (C).$$

b)

$$f\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\ln\left(1+\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right)=\ln\left(1+\frac{1-\tan x}{1+\tan x}\right)=\ln\left(\frac{2}{1+\tan x}\right)=\ln 2-\ln(1+\tan x)=\ln 2-f(x).$$

c) Pour tout $x \in \left] -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right[$, $\frac{\pi}{4} - x \in \left] -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right[$ et $f\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \ln 2 - f(x)$ donc I est un centre de symétrie de (C).

3) $T_0 : y = x$.



4) a) Les surfaces S_1 et S_2 sont symétriques par rapport à I donc elles ont la même aire.

b) On désigne par $B\left(\frac{\pi}{8}, 0\right)$ et $C\left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$.

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \tan x) dx$ est l'aire de la partie du plan limitée par (C), l'axe des abscisses et les droites

$x = 0$ et $x = \frac{\pi}{4}$ donc

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \tan x) dx = A_{\text{triangle OBI}} - S_1 + A_{\text{trapèze BCAI}} + S_2 = A_{\text{triangle OBI}} + A_{\text{trapèze BCAI}} = A_{\text{triangle OAC}} = \frac{\pi}{8} \ln 2.$$

5) a) La fonction f est continue et strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$ donc elle réalise une bijection de

$$\left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[\text{ sur } f\left(\left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[\right) = \mathbb{R}.$$

b) La fonction f est strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$

La fonction f est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$ et $f'(x) = \frac{1 + \tan^2 x}{1 + \tan x} \neq 0$ pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$ donc

f^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1 + \tan y}{1 + \tan^2 y}$ avec

$f^{-1}(x) = y, y \in \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$ et $x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow f(y) = x \Leftrightarrow \ln(1 + \tan y) = x \Leftrightarrow \tan y = e^x - 1$. on en déduit

que pour tout $x \in \mathbb{R}, (f^{-1})'(x) = \frac{e^x}{1 + (e^x - 1)^2}$.

$$c) \int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{1 + (e^x - 1)^2} dx = \int_0^{\ln 2} (f^{-1})'(x) dx = [f^{-1}(x)]_0^{\ln 2} = f^{-1}(\ln 2) - f^{-1}(0) = \frac{\pi}{4}.$$

REPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION ◇◇◇ EXAMEN DU BACCALAUREAT SESSION DE JUIN 2014	Epreuve : MATHEMATIQUES
	Durée : 4 H
	Coefficient : 4
Section : Mathématiques	Session de contrôle

Le sujet comporte 4 pages. La page annexe 4/4 est à rendre avec la copie.

Exercice 1 (5points)

Le plan est orienté dans le sens direct.

Dans l'annexe ci-jointe (**Figure 1**) , IAB est un triangle isocèle en A , O est le milieu de [BI] , $OA = 2OI$ et $\widehat{(OI, OA)} = \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

Soit h l'homothétie de centre I et de rapport 2 et s la similitude directe de centre O, de rapport 2 et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

- 1) Déterminer h(O) et s(I).
- 2) Pour tout point M du plan, on note P son image par h et Q son image par s.

Soit f l'application qui à un point M du plan associe le point M' barycentre des points pondérés (P, 3) et (Q, 1).

a) Soit $O' = f(O)$. Montrer que $\overrightarrow{OO'} = \frac{3}{4}\overrightarrow{OB}$ et construire le point O'.

b) Soit $I' = f(I)$. Montrer que $\overrightarrow{II'} = \frac{1}{4}\overrightarrow{IA}$ et construire le point I'.

3) Dans cette question, on munit le plan du repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$, où J est le milieu de [OA] et on note z l'afixe d'un point M du plan.

a) Exprimer en fonction de z l'afixe z_P du point P.

b) Exprimer en fonction de z l'afixe z_Q du point Q.

c) Soit z' l'afixe du point $M' = f(M)$. Montrer que $z' = \frac{3+i}{2}z - \frac{3}{4}$.

d) Déterminer l'image par f du cercle de diamètre [OI].

Exercice 2 (5points)

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- 1) a) Soit (E) l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

Déterminer les coordonnées des foyers de l'ellipse (E) et donner son excentricité.

- b) Soit (P) la parabole d'équation $y^2 = 2x + 4$.

Déterminer les coordonnées du foyer F de la parabole (P) et donner une équation de sa directrice.

- 2) Dans l'annexe ci-jointe (**Figure 2**), on a tracé dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ l'ellipse (E) et la parabole (P) .

Soit (Γ) la courbe d'équation $y^2 = -2|x| + 4$.

- a) Vérifier que $(O, \vec{j})$ est un axe de symétrie de (Γ) .

- b) Tracer (Γ) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- 3) a) Soit C le cercle d'équation $x^2 + y^2 = 4$.

Vérifier que pour tout réel t de $[0, 2]$, le point $M(t, \sqrt{4-t^2})$ appartient à C .

- b) On pose $I_1 = \int_0^2 \sqrt{4-t^2} dt$. Montrer que $I_1 = \pi$.

- 4) Calculer $I_2 = \int_0^2 \sqrt{-2t+4} dt$.

- 5) Soit $\mathcal{A}$ l'aire de la surface limitée par la courbe (Γ) et l'ellipse (E) .

Exprimer $\mathcal{A}$ en fonction de I_1 et I_2 puis calculer $\mathcal{A}$.

Exercice 3 (4points)

- 1) Soit dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation $(E) : 1111x - 10^4y = 1$.

- a) Vérifier que $(-9, -1)$ est une solution de (E) .

- b) Résoudre l'équation (E) .

- 2) Soit n un entier.

- a) Montrer que s'il existe deux entiers p et q tels que $n=1111p$ et $n=1+q10^4$

alors (p, q) est une solution de (E) .

b) Déterminer alors l'ensemble des entiers n tels que
$$\begin{cases} n \equiv 0 \pmod{1111} \\ n \equiv 1 \pmod{10^4} \end{cases}.$$

c) En déduire le plus petit entier naturel multiple de 1111 et dont le reste dans la division euclidienne par 10^4 est égal à 1.

Exercice 4 (6points)

1) Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.

Déterminer $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f .

2) Soit g la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par
$$\begin{cases} g(x) = e^{f(x)} & \text{si } x > 0 \\ g(0) = 0 \end{cases}$$

a) Montrer que g est continue à droite en 0.

b) Montrer que g est dérivable à droite en 0.

c) Dresser le tableau de variation de g .

3) Dans l'annexe ci-jointe (**Figure 3**), on a représenté dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ la courbe de la fonction f et la courbe de la fonction exponentielle.

a) Construire le point A de coordonnées (e, e) .

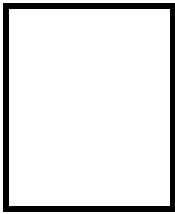
b) Déterminer et tracer la tangente à la courbe C_g de g au point d'abscisse 1.

c) Tracer la courbe C_g dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

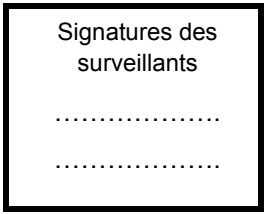
4) On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par
$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = \sqrt[n]{n} & \text{si } n \geq 2 \end{cases}$$

a) Donner la limite de (u_n) .

b) Déterminer l'entier naturel n pour lequel $\sqrt[n]{n}$ est maximal.



Section : N° d'inscription : Série :
Nom et prénom :
Date et lieu de naissance :



Signatures des
surveillants

.....
.....



Epreuve : Mathématiques (Section mathématiques)

Annexe (à rendre avec la copie)

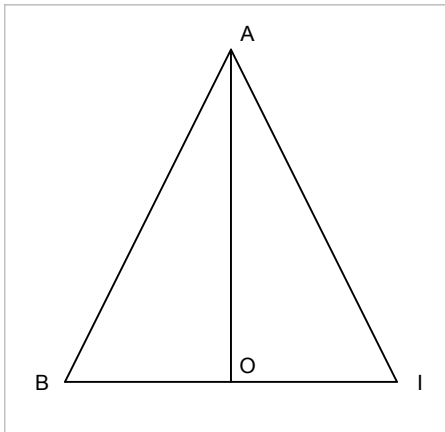


Figure 1

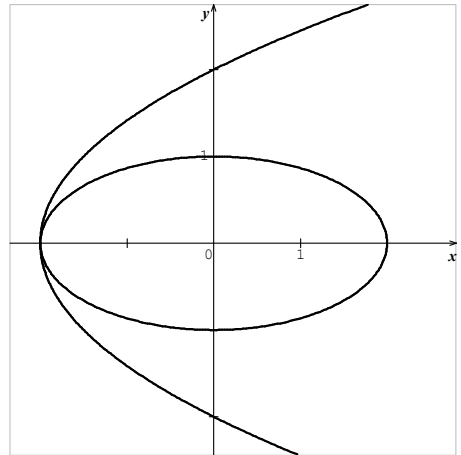


Figure 2

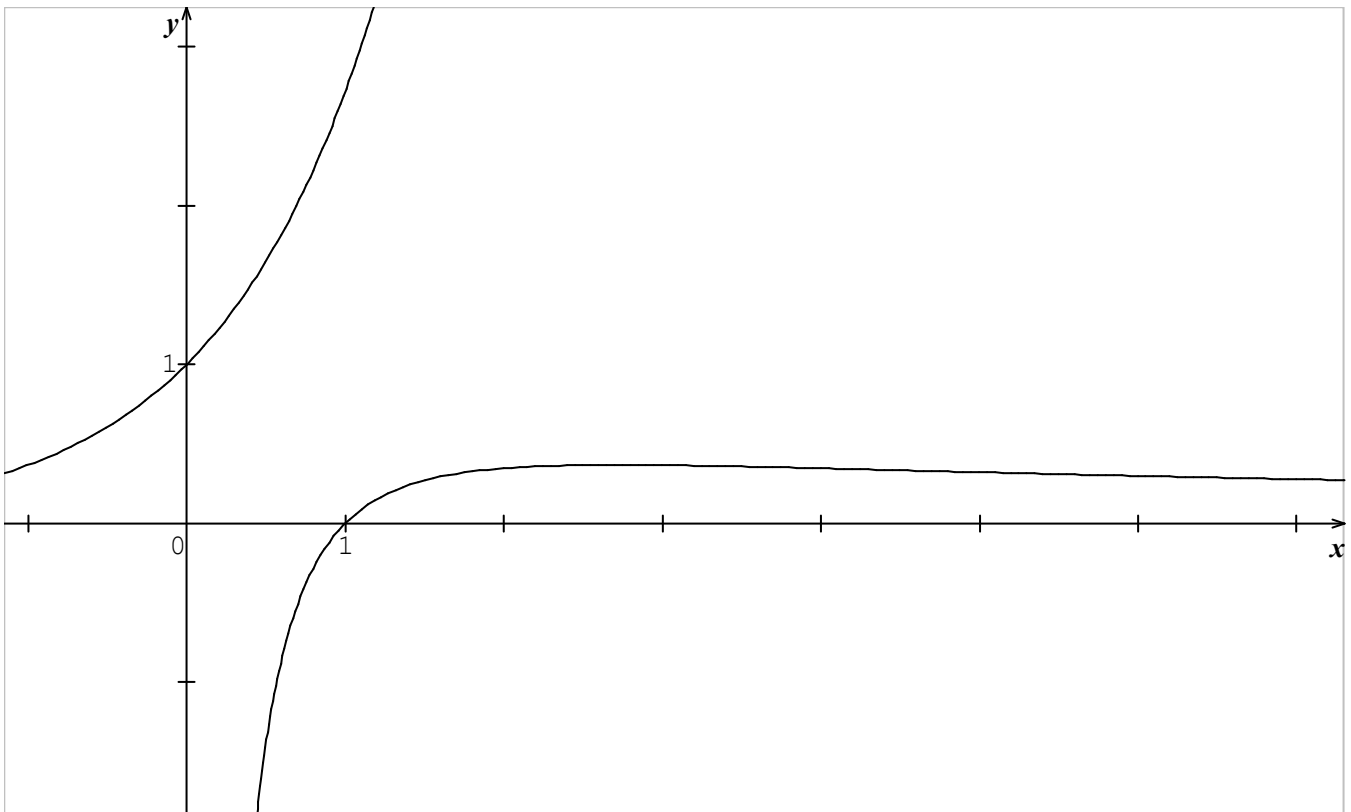


Figure 3

Examen du baccalauréat - Session de contrôle juin 2014

Section Mathématiques

Épreuve de Mathématiques

Corrigé

Exercice 1

1) Le point O est le milieu de [BI] donc $\overrightarrow{IB} = 2\overrightarrow{IO}$, il en résulte que $h(O) = B$.

$$\begin{cases} \frac{OA}{OI} = 2 \\ \left(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA} \right) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases}, \text{ il en résulte que } S(I) = A.$$

2) a) On sait que $h(O) = B$ et $S(O) = O$ par suite le point O' est le barycentre des points pondérés (B,3) et (O,1), on en déduit que $\overrightarrow{OO'} = \frac{3}{4}\overrightarrow{OB}$.

b) On sait que $h(I) = I$ et $S(I) = A$ par suite le point I' est le barycentre des points pondérés (I,3) et (A,1), on en déduit que $\overrightarrow{II'} = \frac{1}{4}\overrightarrow{IA}$.

3) a) $h(M) = P \Leftrightarrow \overrightarrow{IP} = 2\overrightarrow{IM} \Leftrightarrow z_p - 1 = 2(z - 1) \Leftrightarrow z_p = 2z - 1$.

b) S est la similitude directe de centre O, de rapport 2 et d'angle $\frac{\pi}{2}$ qui envoie M en Q donc

$$z_Q = 2e^{i\frac{\pi}{2}}z = 2iz.$$

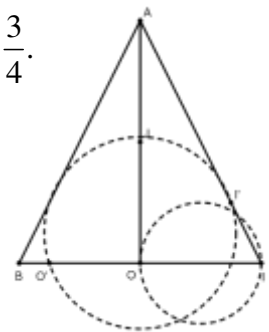
c) $f(M) = M'$ donc le point M' est le barycentre des points pondérés (P,3) et (Q,1) on en déduit que

$$\overrightarrow{PM'} = \frac{1}{4}\overrightarrow{PQ} \Leftrightarrow z' - z_p = \frac{1}{4}(z_Q - z_p) \Leftrightarrow z' = \frac{1}{4}(2iz - 2z + 1) + 2z - 1 = \frac{3+i}{2}z - \frac{3}{4}.$$

d) L'expression complexe de f est de la forme $z' = az + b$ avec $a = \frac{3+i}{4} \neq 0$

donc f est une similitude directe, comme $f(O) = O'$ et $f(I) = I'$,

on en déduit que l'image du cercle de diamètre [OI] par f est le cercle de diamètre [O'I'].



Exercice 2

1) a) Une équation de (E) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ donc $a^2 = 4$ et $b^2 = 1$, on en déduit que

$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{3}$ par suite les coordonnées des foyers de (E) sont $(\sqrt{3}, 0)$ et $(-\sqrt{3}, 0)$ et son excentricité

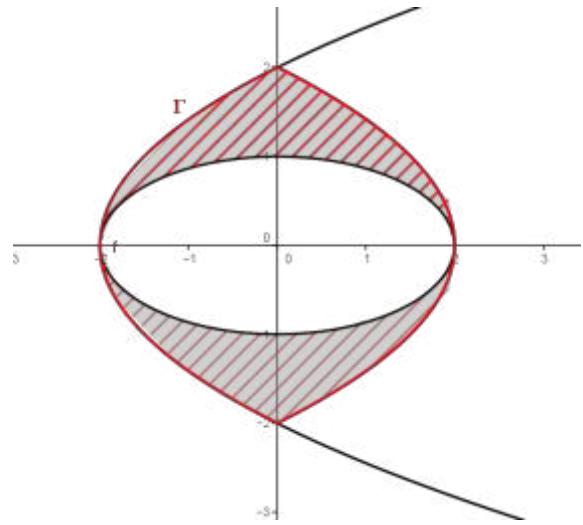
$$\text{est } e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

b) $M(x, y) \in (P) \Leftrightarrow y^2 = 2x + 4 \Leftrightarrow y^2 = 2(x + 2)$. Soit $\Omega(-2, 0)$ et on pose $\begin{cases} X = x + 2 \\ Y = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = X - 2 \\ y = Y \end{cases}$.

Dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$, $M(X, Y) \in (P) \Leftrightarrow Y^2 = 2X$, il en résulte que dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$, F a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ et la directrice de (P) a pour équation $X = -\frac{1}{2}$. On en déduit que dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, F $\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$ et la directrice a pour équation $x = -\frac{5}{2}$.

2) a) $M(x, y) \in (\Gamma) \Leftrightarrow y^2 = -2|x| + 4 \Leftrightarrow y^2 = -2|-x| + 4 \Leftrightarrow M(-x, y) \in (\Gamma)$. Il en résulte que $(O, \vec{j})$ est un axe de symétrie de (Γ) .

b) $\begin{cases} M(x, y) \in \Gamma \\ x \in [-2, 0] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 2x + 4 \\ x \in [-2, 0] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} M \in (P) \\ x \in [-2, 0] \end{cases} \Leftrightarrow M \in (P_1)$ où (P_1) est la partie de (P) située dans le demi-plan de frontière $(O, \vec{j})$ contenant le point de coordonnées $(-2, 0)$, il en résulte que $\Gamma = (P_1) \cup (P_2)$ où (P_2) est le symétrique de (P_1) par rapport à $(O, \vec{j})$.



3) a) Pour tout $t \in [0, 2]$, $t^2 + (\sqrt{4-t^2})^2 = t^2 + 4 - t^2 = 4$. Il en résulte que $M(t, \sqrt{4-t^2}) \in C$.

b) $I_1 = \int_0^2 \sqrt{4-t^2} dt$ est l'aire de la partie du plan limitée par (C), les axes du repère et les droites

d'équations respectives $x = 0$ et $x = 2$, on en déduit que $I_1 = \frac{\text{Aire du disque de frontière (C)}}{4} = \frac{\pi \times 2^2}{4} = \pi$.

$$4) I_2 = \int_0^2 \sqrt{-2t+4} dt = -\frac{1}{2} \int_0^2 -2\sqrt{-2t+4} dt = -\frac{1}{3} \left[(-2t+4)\sqrt{-2t+4} \right]_0^2 = \frac{8}{3}.$$

5) Par raison de symétrie, $\frac{1}{4} \mathcal{A} = I_2 - \frac{1}{2} I_1$ donc $\mathcal{A} = 4I_2 - 2I_1 = \left(\frac{32}{3} - 2\pi\right) \text{ua}$

Exercice 3

1) a) $-9 \times 1111 - 10^4 \times (-1) = -9999 + 10000 = 1$ donc $(-9, -1)$ est solution de (E).

b) Le couple $(-9, -1)$ est solution de (E) donc

$$1111x - 10^4 y = 1111 \times (-9) - 10^4 \times (-1) \text{ donc } 1111(x+9) = 10^4(y+1) \quad (*)$$

donc 1111 divise $10^4(y+1)$ et $1111 \wedge 10^4 = 1$ d'où 1111 divise $(y+1)$ par suite il existe un entier k tel que $y+1 = 1111k$ ou encore $y = 1111k - 1$, $k \in \mathbb{Z}$.

en remplaçant y par $1111k - 1$ dans (*), on obtient $x = 10^4 k - 9$.

Ainsi si le couple (x, y) est solution de (E) alors $x = 10^4 k - 9$ et $y = 1111k - 1$, $k \in \mathbb{Z}$.

Réciproquement : Si $x = 10^4 k - 9$ et $y = 1111k - 1$, $k \in \mathbb{Z}$, alors $1111(10^4 k - 9) - 10^4(1111k - 1) = 1$

On en déduit que $S_{\square \times \square} = \{(10^4 k - 9, 1111k - 1), k \in \square\}$.

2) a) S'il existe deux entiers p et q tels que $n = 1111p$ et $n = 10^4 q + 1$, alors

$$1111p = 10^4 q + 1 \Leftrightarrow 1111p - 10^4 q = 1, \text{ il en résulte que } (p, q) \text{ est solution de (E).}$$

$$b) \begin{cases} n \equiv 0 \pmod{1111} \\ n \equiv 1 \pmod{10^4} \end{cases} \Leftrightarrow \text{il existe deux entiers p et q tels que } n = 1111p \text{ et } n = 10^4 q + 1, \text{ alors d'après a)}$$

(p, q) est solution de (E), il en résulte que $n = 1111(10^4 k - 9) = 1111 \times 10^4 k - 9999, k \in \square$.

$$\text{Réciproquement : Si } n = 1111 \times 10^4 k - 9999, k \in \square, \text{ alors } \begin{cases} n \equiv 0 \pmod{1111} \\ n \equiv 1 \pmod{10^4} \end{cases}.$$

$$\text{Ainsi } S_{\square} = \{1111 \times 10^4 k - 9999, k \in \square\}.$$

$$c) \begin{cases} 1111 \times 10^4 k - 9999 \geq 0 \\ k \in \square \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k \geq \frac{9999}{1111 \times 10^4} = 0.0009 \\ k \in \square \end{cases}, \text{ soit } k = 1 \text{ donc } n = 11100001.$$

Exercice 4

1) La fonction f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$. Le signe de $f'(x)$ est celui de $1 - \ln x$

x	0	e	$+\infty$
$f'(x)$		+	-
f		$\frac{1}{e}$	0

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x} = -\infty.$$

2) a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{f(x)} = 0 = g(0)$ car $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$, il en résulte que g est continue à droite en 0.

$$b) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{f(x)}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) e^{f(x)} \frac{1}{\ln x} = 0 = g'_d(0)$$

c) La fonction g est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $g'(x) = f'(x) e^{f(x)}$. Le signe de $g'(x)$ est celui de $f'(x)$.

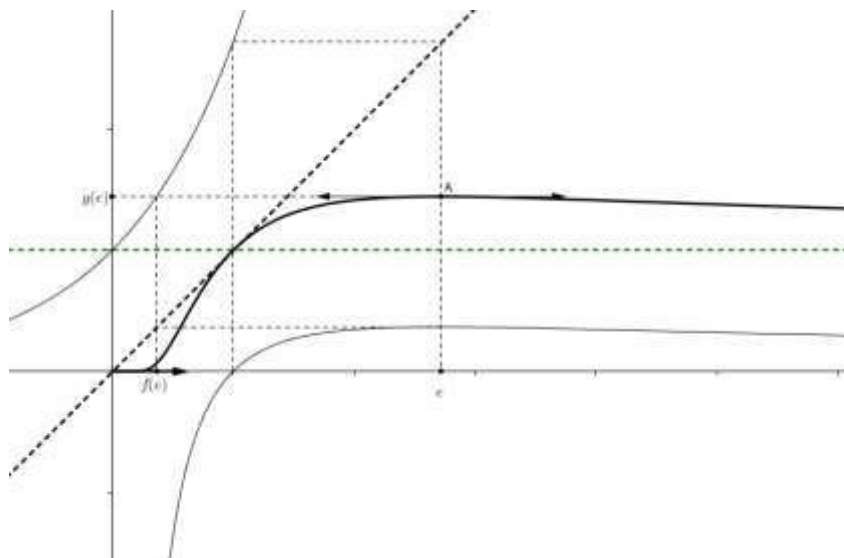
x	0	e	$+\infty$
$g'(x)$		+	-
g	0	$\frac{1}{e^e}$	1

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{f(x)} = 1 \text{ car } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

3) a) Voir figure.

$$b) T: y = g'(1)(x - 1) + g(1) = x$$

c)



4) a) $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} g(n) = 1.$

b) $u_1 = 1, u_2 = 1.41, u_3 = 1.44$ et pour tout $n \geq 3, u_n \geq u_{n+1}$ car g est décroissante sur $[e, +\infty[$, il en résulte que $u_n = g(n) = \sqrt[n]{n}$ est maximal si et seulement si $n = 3$.

REPUBLICQUE TUNISIENNE MINISTERE DE L'EDUCATION ♦♦♦ EXAMEN DU BACCALAUREAT SESSION DE JUIN 2013	Epreuve : MATHEMATIQUES
	Durée : 4 H
	Coefficient : 4
Section: MATHEMATIQUES	SESSION PRINCIPALE

Le sujet comporte 5 pages numérotées de 1/5 à 5/5.

Les pages 4/5 et 5/5 sont à rendre avec la copie.

Exercice 1 : (3 points)

Pour chacune des affirmations (A_1) , (A_2) , (A_3) et (A_4) ci-dessous, répondre par " Vrai " ou " Faux " en justifiant la réponse.

1) (A_1) : Soit n un entier. " Si $33n \equiv 0 \pmod{2013}$ alors $n \equiv 0 \pmod{61}$ ".

(A_2) : " L'équation $33x + 11y = 2013$ admet des solutions dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ".

2) Soit F la fonction définie par $F(x) = \int_1^{x} \frac{e^t}{1+t^2} dt$.

(A_3) : " F est définie et dérivable sur $]0, +\infty[$ ".

(A_4) : " Pour tout x de l'ensemble de dérivabilité de F , $F'(x) = \frac{x}{1 + (\ln x)^2}$ ".

Exercice 2 : (4 points)

Le plan est orienté.

Dans l'annexe ci-jointe (**Figure 1**), OAB est un triangle rectangle en B de sens direct tel que

$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \frac{\pi}{3} [2\pi].$$

A) Soit f la similitude directe de centre O qui envoie B en A .

1) Donner une mesure de l'angle de f et montrer que le rapport de f est égal à 2.

2) Soit C l'image de A par f .

a) Montrer que le triangle OCA est rectangle en A de sens direct et que $AC = 2AB$.

b) Placer le point C .

B) Soit g la similitude indirecte qui envoie B en A et A en C . On note Ω le centre de g .

1) a) Montrer que Ω vérifie la relation $\overrightarrow{\Omega C} = 4\overrightarrow{\Omega B}$.

b) Placer le point Ω .

2) Soit G le barycentre des points pondérés (A, 1) et (B, 2) et H son image par g.

a) Vérifier que $\overrightarrow{BG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$ et en déduire que $\overrightarrow{AH} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

b) Montrer que $\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{OB}$; puis montrer que G est le milieu du segment $[OH]$.

c) Montrer que la droite (GH) est l'axe de g.

Exercice 3 : (4 points)

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

On considère les points $I(1,1,0)$, $J(0,1,1)$ et $K(1,0,-1)$.

1) a) Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{IJ} \wedge \overrightarrow{IK}$.

b) En déduire que les points I, J et K déterminent un plan P dont une équation est $x - y + z = 0$.

2) Soit le point $S(1,-1,1)$. Montrer que le volume du tétraèdre SIJK est égal à $\frac{1}{2}$.

3) Soit la droite Δ passant par I et parallèle à la droite (JK) et soit M un point quelconque de Δ .

a) Montrer que $\overrightarrow{MJ} \wedge \overrightarrow{MK} = \overrightarrow{IJ} \wedge \overrightarrow{IK}$.

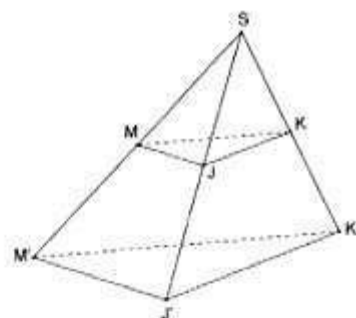
b) Déterminer alors le volume du tétraèdre SMJK.

4) Soit h l'homothétie de centre S et de rapport 2.

a) Déterminer une équation du plan P' image du plan P par h.

b) Le plan P' coupe les demi-droites [SM), [SJ) et [SK) respectivement en M', J' et K'.

Montrer que le volume du solide MJKM'J'K' est égal à $\frac{7}{2}$.



Exercice 4 : (3 points)

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points E et F d'affixes respectives 1 et i.

On désigne par C_1 et C_2 les cercles de centres respectifs E et F et de même rayon 1.

Soit θ un réel de l'intervalle $[0, 2\pi[$, M le point d'affixe $1 + e^{i\theta}$ et N le point d'affixe $i(1 + e^{i\theta})$.

1) a) Calculer $\text{Aff}(\overrightarrow{EM})$ et $\text{Aff}(\overrightarrow{FN})$.

b) Montrer que, lorsque θ varie dans $[0, 2\pi[$, M varie sur C_1 et N varie sur C_2 .

c) Montrer que les droites (EM) et (FN) sont perpendiculaires.

2) Soit P le point d'affixe z_p telle que $z_p = (1 - i)\sin\theta \cdot e^{i\theta}$.

a) Montrer que $\frac{\text{Aff}(\overrightarrow{EP})}{\text{Aff}(\overrightarrow{EM})} = \sin\theta - \cos\theta$ et calculer $\frac{\text{Aff}(\overrightarrow{FP})}{\text{Aff}(\overrightarrow{FN})}$.

b) Montrer que P est le point d'intersection des droites (EM) et (FN).

Exercice 5 : (6 points)

I. Soit la fonction φ définie sur $\mathbb{R}^*$ par $\varphi(x) = \frac{e^x}{e^x - 1}$ et soit C_φ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x)$. Interpréter graphiquement les résultats trouvés.

b) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 0^-} \varphi(x)$. Interpréter graphiquement les résultats trouvés.

c) Montrer que φ est strictement décroissante sur chacun des intervalles $] -\infty, 0[$ et $] 0, +\infty[$.

2) Montrer que l'équation $\varphi(x) = x$ admet une solution unique α dans l'intervalle $] -\infty, 0[$ et une solution unique β dans l'intervalle $] 0, +\infty[$.

II. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x - x$ et la fonction g définie sur $] 0, +\infty[$ par $g(x) = 1 - x + \ln x$.

On se propose dans cette partie de déterminer les tangentes communes aux deux courbes C_f et C_g .

Dans l'annexe ci-jointe (**Figure 2**), on a tracé dans le même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ les courbes C_φ , C_f et C_g , des fonctions φ , f et g et la droite d'équation $y = x$.

1) Soit a un réel et b un réel strictement positif.

On désigne par Δ_a la tangente à la courbe C_f au point A d'abscisse a et par D_b la tangente à la courbe C_g au point B d'abscisse b .

a) Donner une équation de Δ_a et une équation de D_b .

b) Montrer que : (Δ_a et D_b sont parallèles) si et seulement si ($b = e^{-a}$).

Dans la suite on suppose que Δ_a et D_b sont parallèles, c'est-à-dire $b = e^{-a}$.

2) a) Montrer que : (Δ_a et D_b sont confondues) si et seulement si ($a \neq 0$ et $a = \frac{e^a}{e^a - 1}$).

b) En déduire que Δ_a est tangente à la courbe C_f et à la courbe C_g respectivement aux points $A(\alpha, f(\alpha))$ et $B(e^{-\alpha}, g(e^{-\alpha}))$. (α étant la valeur définie dans la question I. 2))

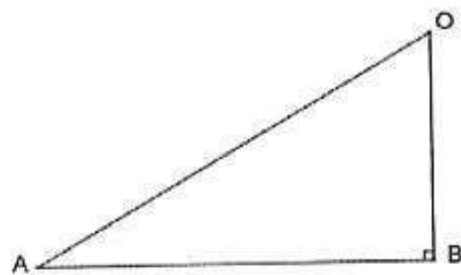
c) Montrer que C_f et C_g admettent une deuxième tangente commune que l'on précisera.

3) a) Construire dans l'annexe ci-jointe (**Figure 2**), le point $A(\alpha, f(\alpha))$.

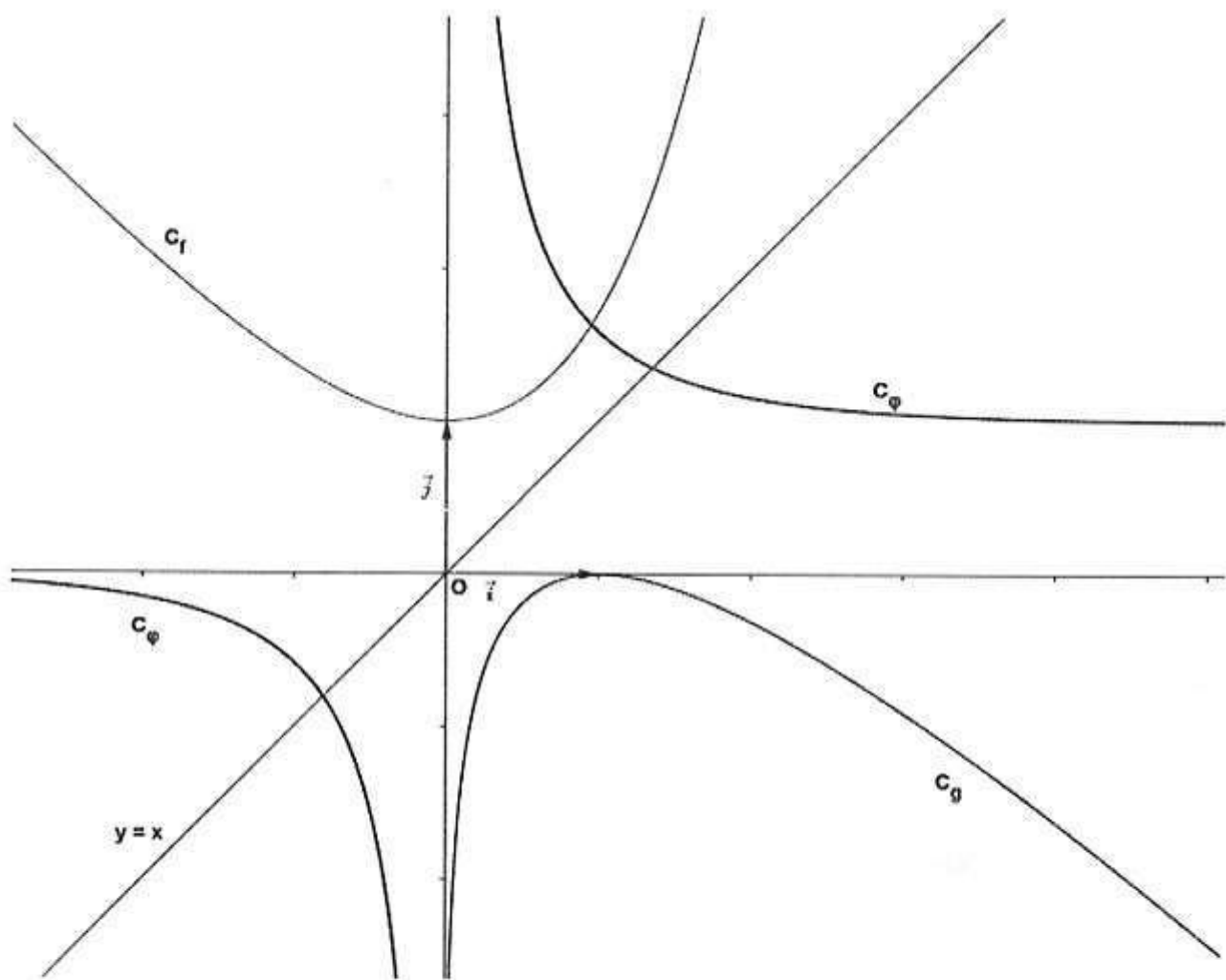
b) Vérifier que $e^{-\alpha} = f(-\alpha) - \alpha$ puis construire $B(e^{-\alpha}, g(e^{-\alpha}))$.

c) Tracer Δ_a .

ANNEXE



(Figure 1)



(Figure 2)

Corrigé**Exercice 1**

1. (A₁) **Vrai**: en effet si $33n \equiv 0 \pmod{2013}$ alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $33n = 2013k = 61 \times 33k$ alors $n = 61k$ ou encore $n \equiv 0 \pmod{61}$.

(A₂) **Vrai**: en effet $33 \wedge 11 = 11$ et 11 divise 2013. Ainsi l'équation admet des solutions dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

2. (A₃) **Vrai**: en effet :
$$\begin{cases} u: x \mapsto \ln x \text{ est définie et dérivable sur }]0, +\infty[\\ x \mapsto \frac{e^x}{1+x^2} \text{ est continue sur } \mathbb{R} \text{ donc elle est continue sur } u(]0, +\infty[) \\ 1 \in \mathbb{R} \end{cases}$$
 donc la fonction F est dérivable sur $]0, +\infty[$.

(A₃) **Faux**: car pour tout $x \in]0, +\infty[$, $F'(x) = \frac{e^{\ln x}}{1+(\ln x)^2} \times \frac{1}{x} = \frac{x}{1+(\ln x)^2} \times \frac{1}{x} = \frac{1}{1+(\ln x)^2}$.

Exercice 2

A. 1) Une mesure de l'angle de f est $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}) = -\frac{\pi}{3} [2\pi]$. Le rapport de f est $\frac{OA}{OB} = \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)} = 2$.

2) a) Le triangle OAB est rectangle en B et de sens direct donc son image par f est un triangle rectangle en f(B) et de sens direct. Or f(O) = O, f(B) = A et f(A) = C, il en résulte que le triangle OCA est

rectangle en A de sens direct et $\frac{AC}{AB} = 2$ donc $AC = 2AB$.

b) Voir figure.

B. 1) a) On sait que g(A) = C et g(B) = A donc le rapport de g est $\frac{AC}{AB} = 2$ donc $g \circ g = h_{(\Omega, 4)}$ or $g \circ g(B) = C$, il en résulte que $h_{(\Omega, 4)}(B) = C \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega C} = 4\overrightarrow{\Omega B}$.

b) Puisque $\overrightarrow{\Omega C} = 4\overrightarrow{\Omega B}$ donc Ω est le barycentre des points pondérés (C, 1) et (B, -4) d'où $\overrightarrow{C\Omega} = \frac{4}{3}\overrightarrow{CB}$.

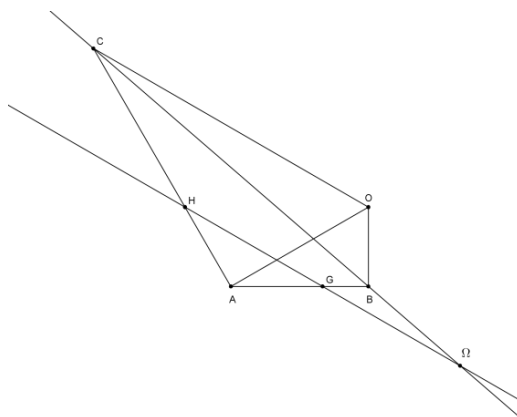
2) a) G est le barycentre des points pondérés (A, 1) et (B, 2) d'où $\overrightarrow{BG} = \frac{1}{1+2}\overrightarrow{BA} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$ et puisque g(G) =

H, g(A) = C et g(B) = A, on en déduit que $\overrightarrow{AH} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

b) D'après a) $\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{AH} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{B\Omega} + \overrightarrow{\Omega C}) = \frac{1}{3}(\overrightarrow{B\Omega} + 4\overrightarrow{\Omega B}) = \overrightarrow{\Omega B}$.

On a $\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{\Omega B}$ donc $\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GH} = \overrightarrow{\Omega B}$ donc $-\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GH} = \overrightarrow{\Omega B}$ donc $\overrightarrow{GH} = \overrightarrow{\Omega B} + \overrightarrow{BG} = \overrightarrow{\Omega G}$, il en résulte que G est le milieu de $[\Omega H]$.

c) G est le milieu de $[\Omega H]$ donc $\overrightarrow{\Omega H} = 2\overrightarrow{\Omega G}$ et g est une similitude indirecte de centre Ω , de rapport 2 et g(G) = H d'où l'axe de g est (GH).



Exercice 3

1. a) $\vec{IJ} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{IK} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ donc $\vec{IJ} \wedge \vec{IK} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

b) Le vecteur $\vec{IJ} \wedge \vec{IK} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ donc les points I, J et K ne sont pas alignés donc ils déterminent un plan

P. $\vec{IJ} \wedge \vec{IK} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est normal à P donc $P: x - y + z + d = 0$ et $I \in P$ donc $d = 0$, on en déduit que

$$P: x - y + z = 0.$$

2. $v = \frac{1}{6} |(\vec{IJ} \wedge \vec{IK}) \cdot \vec{IS}|$, $\vec{IS} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc $(\vec{IJ} \wedge \vec{IK}) \cdot \vec{IS} = 3$ Il en résulte que $v = \frac{1}{2}$.

3. a) $\vec{MJ} \wedge \vec{MK} = (\vec{MI} + \vec{IJ}) \wedge (\vec{MI} + \vec{IK}) = \vec{MI} \wedge \vec{MI} + \vec{IJ} \wedge \vec{IK} + \vec{MI} \wedge (\vec{IK} - \vec{IJ}) = \vec{IJ} \wedge \vec{IK} + \vec{MI} \wedge \vec{JK} = \vec{IJ} \wedge \vec{IK}$.

b) $(\vec{MJ} \wedge \vec{MK}) \cdot \vec{MS} = (\vec{MJ} \wedge \vec{MK}) \cdot (\vec{MI} + \vec{IS}) = (\vec{MJ} \wedge \vec{MK}) \cdot \vec{MI} + (\vec{MJ} \wedge \vec{MK}) \cdot \vec{IS} = (\vec{MJ} \wedge \vec{MK}) \cdot \vec{IS}$

$$= (\vec{IJ} \wedge \vec{IK}) \cdot \vec{IS}. \text{ On en déduit que SMJK et SIJK ont le même volume d'où le volume de SMJK est } \frac{1}{2}.$$

4. a) $h(P) = P'$ donc P et P' sont parallèles donc $P': x - y + z + d = 0$. Soit $I'(x, y, z) = h(I)$ donc

$$\vec{SI'} = 2\vec{SI} \text{ donc } \begin{pmatrix} x-1 \\ y+1 \\ z-1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ on en déduit que } I'(1, 3, -1), \text{ or } I' \in P' \text{ donc } d = 3. \text{ Ainsi } P': x - y + z + 3 = 0.$$

b) On sait que $M \in (SM) \cap P$ donc $h(M) \in h((SM)) \cap h(P)$ donc $h(M) \in (SM) \cap P' = \{M'\}$, d'où

$h(M) = M'$ on montre de même que $h(J) = J'$ et $h(K) = K'$ et puisque $h(S) = S$, il en résulte que

$$h(SMJK) = SM'J'K' \text{ donc le volume de } SM'J'K' \text{ est } 2^3 \times \frac{1}{2} = 4.$$

$$\text{Le volume du solide MJKM'J'K'} = V_{SM'J'K'} - V_{SMJK} = 4 - \frac{1}{2} = \frac{7}{2}.$$

Exercice 4

1. a) $\text{Aff}(\vec{EM}) = 1 + e^{i\theta} - 1 = e^{i\theta}$ et $\text{Aff}(\vec{FN}) = i + ie^{i\theta} - i = ie^{i\theta}$.

b) $EM = |e^{i\theta}| = 1$ donc M varie sur C_1 et $FN = |ie^{i\theta}| = 1$ donc N varie sur C_2 .

c) $\frac{\text{Aff}(\vec{FN})}{\text{Aff}(\vec{EM})} = \frac{ie^{i\theta}}{e^{i\theta}} = i$ imaginaire donc $\vec{FN} \perp \vec{EM}$ d'où les droites (FN) et (EM) sont perpendiculaires.

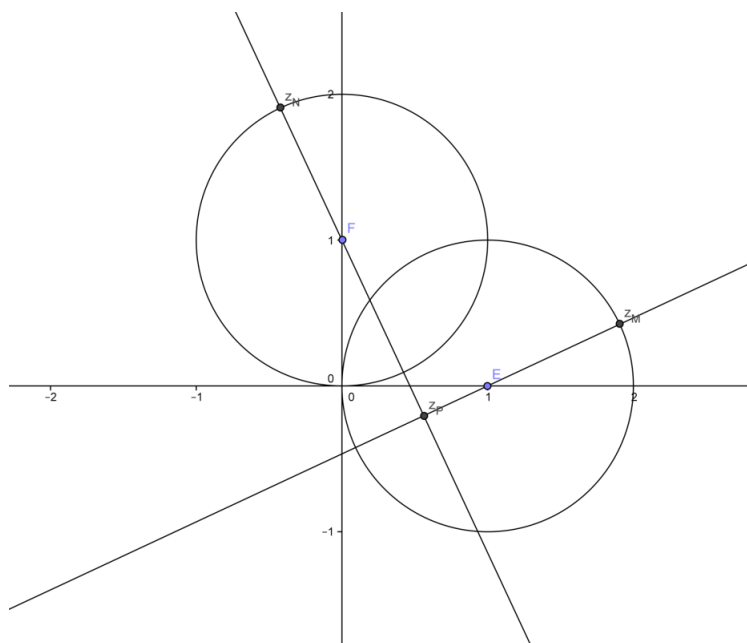
2. a) $\frac{\text{Aff}(\vec{EP})}{\text{Aff}(\vec{EM})} = \frac{(1-i)\sin\theta e^{i\theta} - 1}{e^{i\theta}} = (1-i)\sin\theta - e^{-i\theta} = \sin\theta - i\sin\theta - \cos\theta + i\sin\theta = \sin\theta - \cos\theta.$

$$\frac{\text{Aff}(\overrightarrow{FP})}{\text{Aff}(\overrightarrow{FN})} = \frac{(1-i)\sin\theta e^{i\theta} - i}{i + ie^{i\theta} - i} = (-1-i)\sin\theta - e^{-i\theta} = -\sin\theta - i\sin\theta - \cos\theta + i\sin\theta = -\sin\theta - \cos\theta.$$

b) $\frac{\text{Aff}(\overrightarrow{EP})}{\text{Aff}(\overrightarrow{EM})} = \sin\theta - \cos\theta$ est réel donc (EP) et (EM) sont parallèles donc E, P et M sont alignés

$\frac{\text{Aff}(\overrightarrow{FP})}{\text{Aff}(\overrightarrow{FN})} = -\sin\theta - \cos\theta$ est réel donc (FP) et (FN) sont parallèles donc F, P et N sont alignés

Ainsi P est le point d'intersection de (FN) et (EM).



Exercice 5

1. 1.a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x - 1} = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{e^x}\right)} = 1$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{e^x - 1} = 0$. Les droites $y = 0$ et $y = 1$ sont

des asymptotes de C_φ respectivement en $-\infty$ et $+\infty$

b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x}{e^x - 1} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0^-} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x}{e^x - 1} = -\infty$. La droite $x = 0$ est une asymptote de C_φ

c) Pour tout réel x non nul, $\varphi'(x) = \frac{e^x(e^x - 1) - e^{2x}}{(e^x - 1)^2} = \frac{-e^x}{(e^x - 1)^2} < 0$

2. Pour tout réel x non nul, $\varphi(x) = x \Leftrightarrow \varphi(x) - x = 0$, on pose $h(x) = \varphi(x) - x$

La fonction h est dérivable sur chacun des intervalles $] -\infty, 0[$ et $] 0, +\infty[$ et $h'(x) = \varphi'(x) - 1 < 0$ pour tout réel x non nul.

La fonction h est continue et strictement décroissante sur $] -\infty, 0[$ (resp $] 0, +\infty[$) donc elle réalise une bijection de

$] -\infty, 0[$ (resp $] 0, +\infty[$) sur $h(] -\infty, 0[) = \mathbb{R}$ (resp $h(] 0, +\infty[) = \mathbb{R}$), $0 \in \mathbb{R}$ donc il existe un unique réel $\alpha \in] -\infty, 0[$

(resp $\beta \in] 0, +\infty[$) tel que $h(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \varphi(\alpha) = \alpha$ (resp $h(\beta) = 0 \Leftrightarrow \varphi(\beta) = \beta$). On en déduit que l'équation

$\varphi(x) = x$ admet exactement deux solutions $\alpha \in]-\infty, 0[$ et $\beta \in]0, +\infty[$

II. 1) a) $\Delta_a : y = f'(a)(x-a) + f(a)$ donc $\Delta_a : y = (e^a - 1)(x-a) + e^a - a$ d'où $\Delta_a : y = (e^a - 1)x + (1-a)e^a$.

$D_b : y = g'(b)(x-b) + g(b)$ donc $D_b : y = \left(-1 + \frac{1}{b}\right)(x-b) + 1 - b + \ln b$ d'où $D_b : y = \left(-1 + \frac{1}{b}\right)x + \ln b$.

b) (Δ_a et D_b sont parallèles) si et seulement si ($f'(a) = g'(b)$) si et seulement si $(-1 + \frac{1}{b} = e^a - 1)$

si et seulement si $(\frac{1}{b} = e^a)$ si et seulement si $(b = e^{-a})$.

2) a) Δ_a et D_b étant parallèles donc

(Δ_a et D_b sont confondues) si et seulement si $\begin{cases} (1-a)e^a = \ln b \\ b = e^{-a} \end{cases}$ si et seulement si $((1-a)e^a = -a)$ si et

seulement si

$(a(e^a - 1) = e^a)$ si et seulement si $(a \neq 0 \text{ et } a = \frac{e^a}{e^a - 1})$.

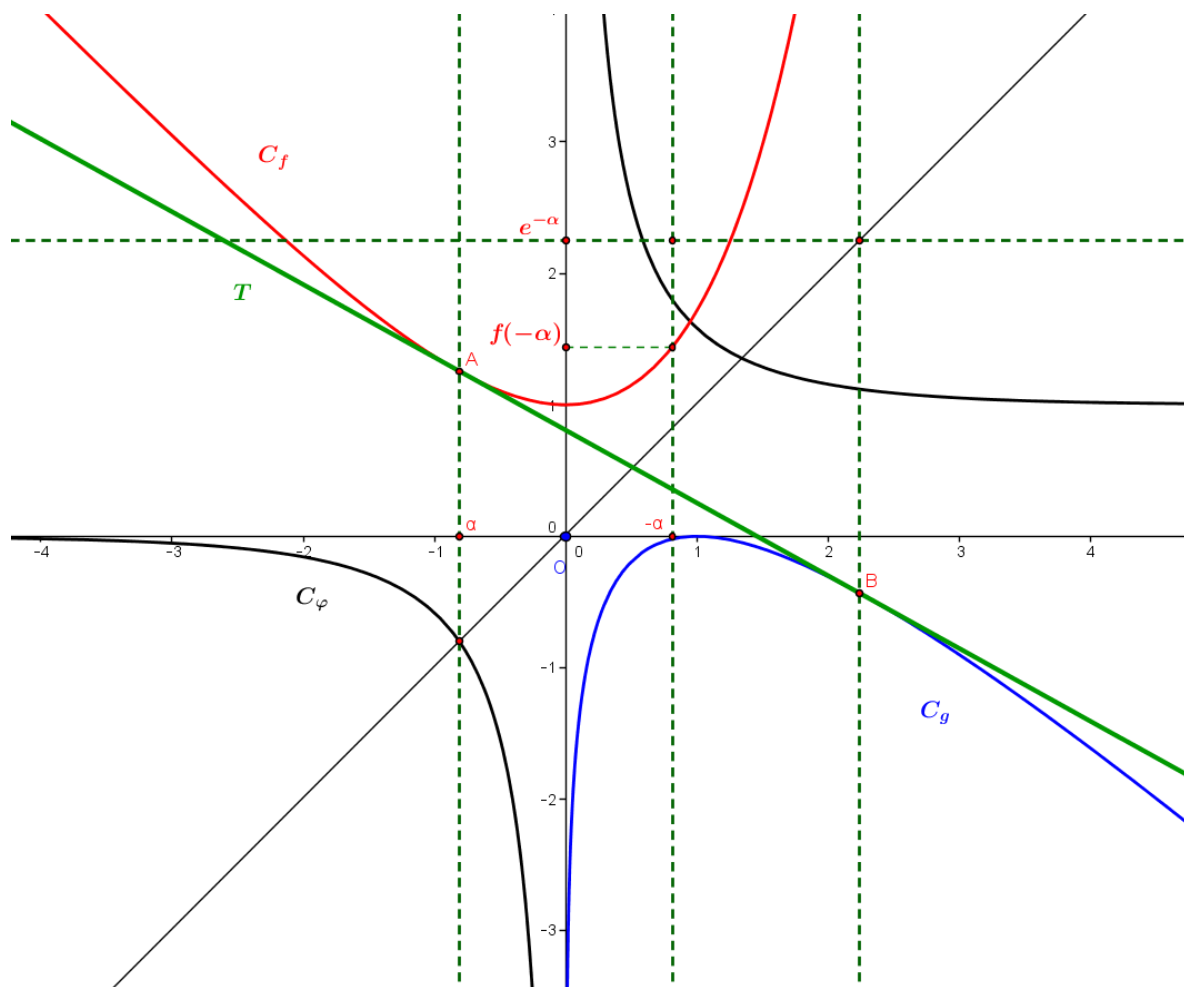
b) d'après 2) a) Δ_a et D_b sont confondues alors $\varphi(a) = a$ or $\varphi(\alpha) = \alpha$ ($\alpha \neq 0$) donc Δ_α est une tangente commune à C_f et C_g en $A(\alpha, f(\alpha))$ et en $B(b, g(b))$ or $b = e^{-\alpha}$ d'après (II ; 1) a) donc $B(e^{-\alpha}, g(e^{-\alpha}))$.

c) On a aussi $\varphi(\beta) = \beta$ signifie $\beta = \frac{e^\beta}{e^\beta - 1}$, Δ_β est une tangente commune à C_f et à C_g respectivement en $A'(\beta, f(\beta))$ et $B'(e^{-\beta}, g(e^{-\beta}))$.

3) a) Voir figure.

b) $f(-\alpha) - \alpha = e^{-\alpha} - (-\alpha) - \alpha = e^{-\alpha}$

c) Voir figure.



REPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION EXAMEN DU BACCALAUREAT SESSION DE JUIN 2013	Epreuve : MATHEMATIQUES
	Durée : 4 h
	Coefficient : 4
Section : MATHEMATIQUES	SESSION DE CONTRÔLE

Le sujet comporte 4 pages numérotées de 1/4 à 4/4.

La page 4/4 est à rendre avec la copie.

Exercice 1 : (3 points)

On considère dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, l'équation (E) : $2x + 5y = 6$.

- 1) a) Vérifier que (3, 0) est une solution de (E).
 b) Résoudre l'équation (E).
- 2) Soit (x, y) une solution de (E).
 a) Quelles sont les valeurs possibles de $x \wedge y$?
 b) Déterminer les couples (x, y), solutions de (E), tels que $x \wedge y = 3$.

Exercice 2 : (5 points)

Dans l'annexe ci-jointe (**Figure 1**), $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormé et (C) est le cercle de centre O passant par les points A(2, 0) et A'(-2, 0).

- 1) Soit P(x, y) un point du plan n'appartenant pas à $(O, \vec{i})$, H son projeté orthogonal sur l'axe $(O, \vec{i})$ et M(X, Y) le milieu du segment [PH].
 a) Exprimer X et Y à l'aide de x et y.
 b) Montrer que lorsque P varie sur le cercle (C), M varie sur l'ellipse (E) d'équation $\frac{X^2}{4} + Y^2 = 1$.
 c) Tracer l'ellipse (E) dans le même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- 2) Soit $P_0(1, \sqrt{3})$ et $M_0(1, \frac{\sqrt{3}}{2})$.

La tangente (T) au cercle (C) en P_0 coupe l'axe des abscisses au point I.

- a) Montrer que I a pour coordonnées (4, 0).
- b) Montrer que la tangente à l'ellipse (E) en M_0 passe par I.

Exercice 3 : (6 points)

Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = x - \ln(1 + x^2)$.

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

I. 1) Montrer que pour tout x appartenant à $[0, +\infty[$ $f'(x) = \frac{(x-1)^2}{1+x^2}$.

2) a) Montrer que pour $x > 0$, $f(x) = x - 2\ln x - \ln(1 + \frac{1}{x^2})$.

b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$.

c) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x]$, puis interpréter graphiquement le résultat trouvé.

3) Dresser le tableau de variation de f .

4) a) Donner une équation de la tangente Δ à la courbe (C) au point O .

b) Donner la position relative de la droite Δ et la courbe (C) .

c) Tracer dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ la droite Δ et la courbe (C) .

II. Soit G la fonction définie sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ par $G(x) = \int_0^{\tan x} \frac{dt}{1+t^2}$ dt.

1) a) Montrer que G est dérivable sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ et déterminer sa fonction dérivée.

b) En déduire que pour tout x appartenant à $[0, \frac{\pi}{2}[$ $G(x) = x$.

c) Calculer alors $\int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt$.

2) On désigne par $\mathcal{A}$ l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C) , la droite Δ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

a) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$\int_0^1 \ln(1+x^2) dx = \ln 2 - 2 + 2 \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}.$$

b) En déduire la valeur de $\mathcal{A}$.

Exercice 4 : (6 points)

Le plan est orienté.

Dans l'annexe ci-jointe (**Figure 2**), ABCD est un rectangle tel que $AB = 1$ et $AD = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et FCDE et BFGH sont deux carrés.

1) On pose $q = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

a) Montrer que $q^2 = 1 - q$.

b) Vérifier que $FG = q$ et que $EG = q^2$.

2) Soit S_1 la similitude directe de centre F, d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de rapport q .

a) Montrer que $S_1(C) = G$.

b) Déterminer l'image du carré FCDE par S_1 .

3) Soit S_2 la similitude directe de centre G qui transforme H en E.

Montrer que S_2 est de rapport q et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

4) On pose $h = S_2 \circ S_1$.

a) Montrer que $h(D) = E$.

b) Montrer que h est une homothétie de rapport q^2 .

c) Montrer que $\overline{AE} = q^2 \overline{AD}$ et en déduire le centre de h .

d) Montrer que les points A, G et C sont alignés.

e) Soit $I = h(E)$ et $J = h(F)$.

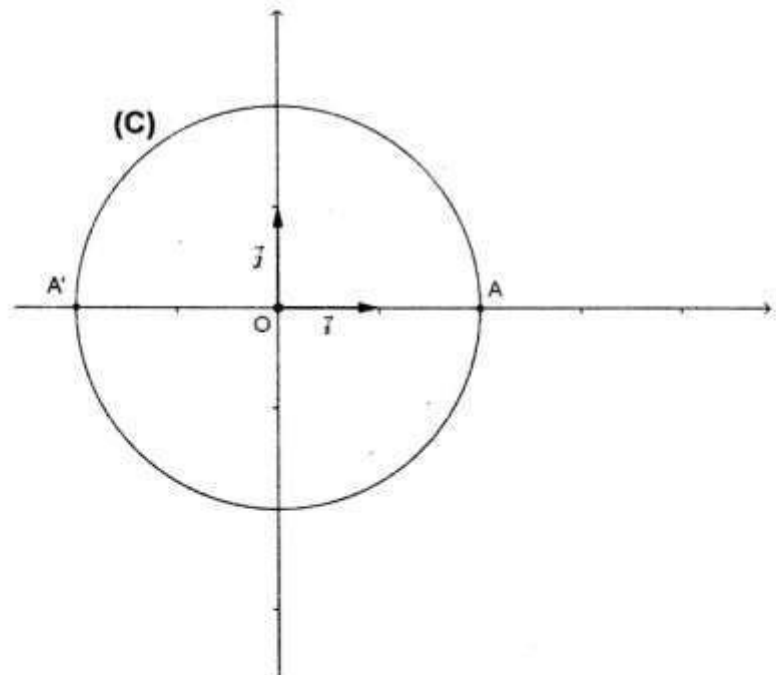
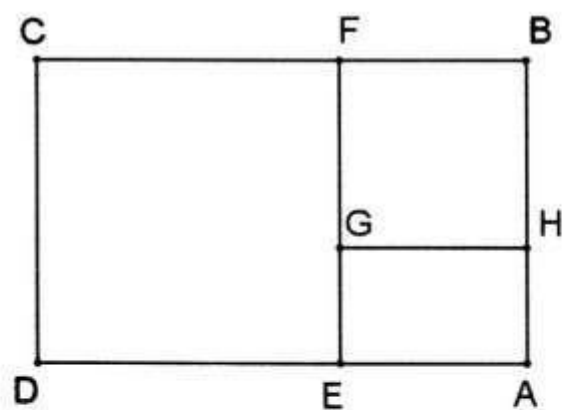
Construire les points J et I et déterminer alors l'image du carré BFGH par S_2 .

5) On considère la suite (a_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $a_n = q^{2n}$.

a) Vérifier que a_0 , a_1 et a_2 sont les aires respectives des carrés FCDE, BFGH et GEIJ.

b) On pose pour tout entier naturel n , $\mathcal{A}_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n$.

Exprimer $\mathcal{A}_n$ en fonction de n et vérifier que la limite de $\mathcal{A}_n$ est égale à l'aire du rectangle ABCD.

ANNEXE**(Figure1)****(Figure 2)**

Exercice 1**Corrigé**

1. a) $2 \times 3 + 5 \times 0 = 6$ donc le couple $(3, 0)$ est une solution de (E) .

b) Le couple $(3, 0)$ est une solution de (E) donc $2x + 5y = 2 \times 3 + 5 \times 0 \Leftrightarrow 2(x - 3) = -5y$ (*)

donc $\begin{cases} 2|5y \\ 2 \wedge 5 = 1 \end{cases}$ d'où d'après Gauss $2|y$ par suite il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $y = 2k$.

En remplaçant y par sa valeur trouvée dans (*) on obtient $x = -5k + 3, k \in \mathbb{Z}$.

Réciproquement : Pour tout $k \in \mathbb{Z}, 2(-5k + 3) + 5(2k) = 6$.

Ainsi $S_{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}} = \{(-5k + 3, 2k), k \in \mathbb{Z}\}$

2. a) Soit (x, y) une solution de $(E), \begin{cases} x \wedge y | x \\ x \wedge y | y \end{cases}$ donc $x \wedge y | 2x + 5y = 6$, il en résulte que

$$x \wedge y \in D_6^+ = \{1, 2, 3, 6\}.$$

b) Soit (x, y) une solution de $(E), x \wedge y \equiv 3 \Leftrightarrow \begin{cases} -5k + 3 \equiv 0 \pmod{3} \\ 2k \equiv 0 \pmod{3} \\ k \equiv 0 \pmod{2} \end{cases}$ donc

$$\begin{cases} -5k + 3 \equiv 0 \pmod{3} \\ 4k \equiv 0 \pmod{3} \\ k \equiv 0 \pmod{2} \end{cases} \text{ d'où } \begin{cases} k \equiv 0 \pmod{3} \\ k \equiv 0 \pmod{2} \\ 2 \wedge 3 = 1 \end{cases} \text{ donc } k = 6n, n \in \mathbb{Z}, \text{ il en résulte que}$$

$$\begin{cases} x = -30n + 3 \\ y = 12n \end{cases}, n \in \mathbb{Z}.$$

Réciproquement : Si $\begin{cases} x = -30n + 3 \\ y = 12n \end{cases}, n \in \mathbb{Z}, 2x + 5y = 2(-30n + 3) + 5(12n) = 6$ donc (x, y) est

une solution de (E) de plus $\begin{cases} x = -30n + 3 \equiv 0 \pmod{3} \\ y = 12n \equiv 0 \pmod{3} \end{cases}$ et x est impair donc elle n'est pas divisible

par 6, d'où $x \wedge y \equiv 3$. Ainsi $x \wedge y \equiv 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -30n + 3 \\ y = 12n \end{cases}, n \in \mathbb{Z}.$

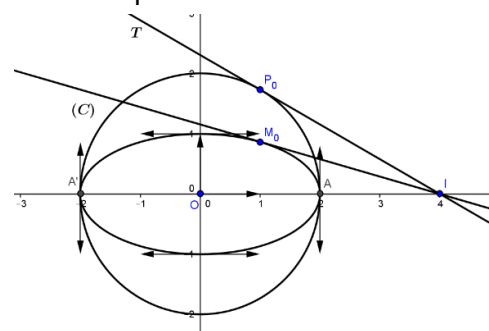
Exercice 2

1. a) $\begin{cases} X = x \\ Y = \frac{y}{2} \end{cases}.$

b) $P(x, y) \in C$ donc $x^2 + y^2 = 4$ donc $X^2 + 4Y^2 = 4$ donc $\frac{X^2}{4} + Y^2 = 1$. Ainsi $M(X, Y)$

varie sur l'ellipse d'équation $\frac{X^2}{4} + Y^2 = 1$.

c)



2. a) $\overrightarrow{IP_0} \begin{pmatrix} -3 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{OP_0} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OP_0} \cdot \overrightarrow{IP_0} = 3 - 3 = 0$ donc la droite (IP_0) est tangente à C en P_0 .

On en déduit que (T) coupe l'axe des abscisses en I.

- b) Soit (T') la tangente à (E) en M_0 , alors $(T') : \frac{X}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2}Y = 1$.

pour $Y = 0$ on obtient $X = 4$ ce qui prouve que $I \in (T')$.

Exercice 3

- I. 1) La fonction f est dérivable sur $[0, +\infty[$ et pour tout $x \in [0, +\infty[$,

$$f'(x) = 1 - \frac{2x}{1+x^2} = \frac{1+x^2-2x}{1+x^2} = \frac{(x-1)^2}{1+x^2}.$$

- 2) a) Pour tout $x > 0$,

$$f(x) = x - \ln(1+x^2) = x - \ln\left(x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right) = x - \ln(x^2) - \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) = x - 2\ln x - \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$$

.

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - 2\frac{\ln x}{x}\right) - \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - 2\frac{\ln x}{x}\right) - \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}{x} = 1.$$

$$c) \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} -2\ln x - \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = -\infty. \text{ } C \text{ admet une branche parabolique}$$

de direction celle de la droite $y = x$ au voisinage de $+\infty$.

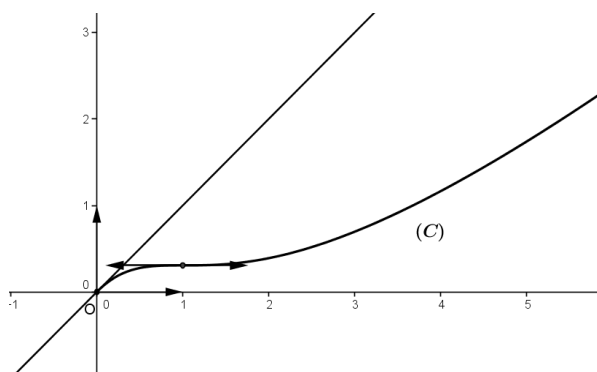
3)

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	○	+
f	0	→ $+\infty$	

$$4) a) \Delta : y = f'_d(0)x + f(0) = x.$$

- b) Pour tout $x \in [0, +\infty[$, $f(x) - x = -\ln(1+x^2) \leq 0$ car $1+x^2 \geq 1$ donc la courbe C est au-dessous de Δ .

c)



II. 1) a) La fonction $u : x \mapsto \tan x$ est dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ et la fonction $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$

donc $u\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right[\right) \subset \mathbb{R}$ et $0 \in \mathbb{R}$. On en déduit que G est dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.

$$\text{Pour tout } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[, G'(x) = \frac{1}{1+\tan^2 x} (1+\tan^2 x) = 1.$$

b) On sait que pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[, G'(x) = 1$ donc $G(x) = x + c$, $c \in \mathbb{R}$. Or $G(0) = 0$, il en

résulte que $c = 0$ Ainsi pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[, G(x) = x$.

$$\text{c) } \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = G\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

$$2) \text{ a) } \begin{cases} u(x) = \ln(1+x^2) \\ v'(x) = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u'(x) = \frac{2x}{1+x^2} \\ v(x) = x \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \ln(1+x^2) dx &= \left[\ln(1+x^2) \right]_0^1 - 2 \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} dx = \ln 2 - 2 \int_0^1 \frac{x^2+1-1}{1+x^2} dx \\ &= \ln 2 - 2 \left[\int_0^1 1 - \frac{1}{1+x^2} dx \right] = \ln 2 - 2 \left[1 - \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx \right] = \ln 2 - 2 + 2 \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \mathcal{A} &= \int_0^1 |f(x) - x| dx = \int_0^1 [x - f(x)] dx = \int_0^1 \ln(1+x^2) dx = \ln 2 - 2 + 2 \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \\ &= \ln 2 - 2 + 2 \times \frac{\pi}{4} = \left(\ln 2 - 2 + \frac{\pi}{2} \right) u.a \end{aligned}$$

Exercice 4

$$1) \text{ a) } q^2 = \frac{6-2\sqrt{5}}{4} = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} = 1 - \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = 1 - q.$$

$$\text{b) } FG = FB = AE = AD - DE = AD - DC = \frac{1+\sqrt{5}}{2} - 1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = q.$$

$$EG = EF - FG = 1 - q = q^2.$$

$$2) \text{ a) } \begin{cases} \left(\overrightarrow{FC}, \overrightarrow{FG} \right) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \\ \frac{FG}{FC} = \frac{q}{1} = q \end{cases} \text{ donc } S_1(C) = G.$$

b) FCDE est un carré direct donc son image par S_1 est un carré direct, or $S_1(F) = F$,
 $S_1(C) = G$ et

BFGH est un carré direct donc l'image du carré FCDE par S_1 est le carré BFGH.

$$3) \begin{cases} \theta \equiv \left(\overrightarrow{GH}, \overrightarrow{GE} \right) [2\pi] \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi] \\ k = \frac{GE}{GH} = \frac{q^2}{q} = q \end{cases}$$

4) a) $\begin{cases} \left(\overrightarrow{FE}, \overrightarrow{FB} \right) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \\ \frac{FB}{FE} = \frac{q}{1} = q \end{cases}$ donc $S_1(E) = B$ et puisque $S_1(C) = G$, $S_1(F) = F$ et l'image du carré

FCDE par S_1 est le carré BFGH, il en résulte que $S_1(D) = H$.

$$h(D) = S_2(S_1(D)) = S_2(H) = E.$$

b) h est la composée de deux similitudes directes de même rapport q et d'angles respectives $\frac{\pi}{2}$

et $-\frac{\pi}{2}$ donc h est une similitude directe de rapport $q^2 \neq 1$ et d'angle nul, il en résulte que h est une homothétie de rapport q^2 .

c) Les vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont colinéaires et de même sens donc $\overrightarrow{AE} = \alpha \overrightarrow{AD}$, $\alpha > 0$

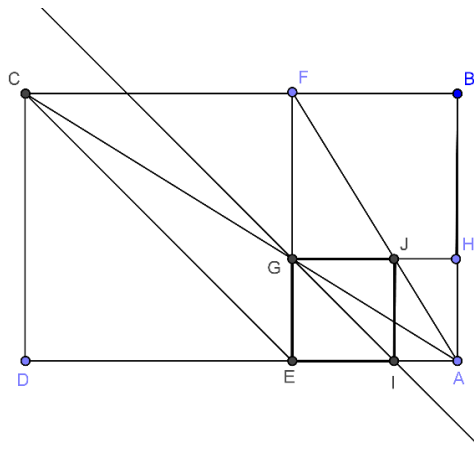
Donc $\alpha = \frac{AE}{AD} = \frac{q}{\frac{1}{q}} = q^2$. On en déduit que $\overrightarrow{AE} = q^2 \overrightarrow{AD}$ et h est l'homothétie de rapport q^2

qui envoie E en D donc A est le centre de h .

d) $h(C) = S_2(S_1(C)) = S_2(G) = G$, il en résulte que A, G et C sont alignés.

e) $h(E) = S_2(S_1(E)) = S_2(B) = I$ donc $S_2(B) = I$

$h(F) = S_2(S_1(F)) = S_2(F) = J$ donc $S_2(F) = J$ et puisque $S_2(G) = G$ et $S_2(H) = E$ il en résulte que l'image du carré BFGH par S_2 est le carré IJGE.



5) a) $a_0 = q^0 = 1 = FC^2 = A_{FCDE}$, $a_1 = q^2 = FG^2 = A_{BFGH}$ et $a_2 = q^4 = EG^2 = A_{GELJ}$

$$\text{b) } A_n = \sum_{k=0}^n a_k = \sum_{k=0}^n (q^2)^k = \frac{1 - (q^2)^{n+1}}{1 - q^2} = \frac{1 - q^{2n+2}}{1 - q^2}.$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - q^{2n+2}}{1 - q^2} = \frac{1}{1 - q^2} = \frac{1}{q} \quad (0 < q < 1).$$

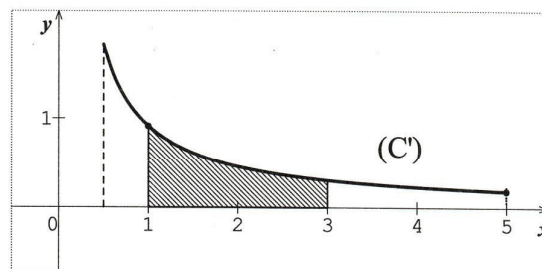
$$A_{ABCD} = CD \times AD = AD = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{1}{q}.$$

Le sujet comporte 4 pages. La page 4/4 est à rendre avec la copie.

Exercice 1 (3 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormé.

Soit f une fonction définie et dérivable sur $[\frac{1}{2}, 5]$ telle que sa courbe représentative (C) passe par les points $A(1,0)$ et $B(3, 1)$. Dans la figure ci-contre, on a représenté la courbe (C') de la dérivée f' de la fonction f .



Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

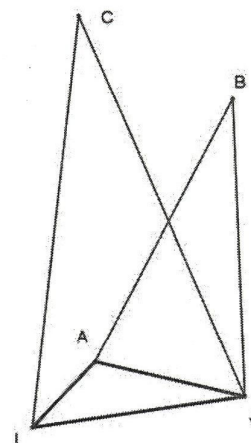
- 1) (C) admet une tangente de coefficient directeur -1.
- 2) L'aire de la partie hachurée est égale à 1.
- 3) (C) admet une tangente de coefficient directeur $\frac{1}{2}$.
- 4) Pour tous a et b de $[1,3]$, $|f(b) - f(a)| \leq |b - a|$.

Exercice 2 (5 points)

Dans le plan orienté, AIJ est un triangle quelconque, BAJ et CIJ sont deux triangles isocèles respectivement en B et C tels que

$$(\widehat{BA, BJ}) \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi] \text{ et } (\widehat{CI, CJ}) \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi].$$

On désigne par t la translation de vecteur $\overrightarrow{IA}$ et par r_B et r_C les rotations de même angle $\frac{\pi}{6}$ et de centres respectifs B et C .



- 1) a) Déterminer $r_C(I)$.
 b) Montrer que $r_B \circ t(I) = J$.
 c) En déduire que $r_B \circ t = r_C$.

- 2) Soit $K = t(C)$.

Montrer que $BC = BK$ et $(\widehat{BC, BK}) \equiv -\frac{\pi}{6} [2\pi]$.

- 3) Soit D le point du plan tel que le triangle DIA est isocèle en D et $(\widehat{DI, DA}) \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi]$.

- a) Soit O le milieu de $[AC]$.

Montrer que l'image du triangle DIA par la symétrie centrale de centre O est le triangle BKC .

- b) Montrer que $ABCD$ est un parallélogramme.

Exercice 3 (3 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On désigne par A le point de coordonnées $(3, 2)$.

Soit N un point de l'axe $(O, \vec{u})$ et P le point de l'axe $(O, \vec{v})$ tel que ANP est un triangle rectangle en A.

- 1) a) Soit les points $E(3, 0)$ et $F(0, 2)$.

Montrer qu'il existe une unique similitude directe S de centre A qui transforme E en F.
Donner son rapport et son angle.

- b) Déterminer l'image de l'axe $(O, \vec{u})$ par S.

- c) En déduire que $S(N) = P$.

- d) Soit M un point d'affixe z et M' le point d'affixe z' tel que $M' = S(M)$.

Montrer que $z' = -\frac{3}{2}i z + \frac{13}{2}i$.

- 2) a) On note x l'abscisse du point N et y l'ordonnée du point P.

Montrer que $3x + 2y = 13$.

- b) Déterminer les points N et P dont les coordonnées sont des entiers.

Exercice 4 (3 points)

Un laboratoire de sciences physiques dispose d'un ensemble d'oscilloscopes de même modèle. La durée de vie, en nombre d'années, d'un oscilloscope est une variable aléatoire notée X qui suit la loi exponentielle de paramètre 0,125.

Dans tout l'exercice on donnera les résultats à 10^{-3} près par défaut.

- 1) a) Montrer que $p(X > 10) = 0,286$.

- b) Calculer la probabilité qu'un oscilloscope ait une durée de vie inférieure à 6 mois.

- 2) Le responsable du laboratoire veut commander n oscilloscopes ($n \geq 2$).

On suppose que la durée de vie d'un oscilloscope est indépendante de celle des autres.

On note p_1 la probabilité qu'au moins un oscilloscope ait une durée de vie supérieure à 10 ans.

- a) Exprimer p_1 en fonction de n .

- b) Combien d'oscilloscopes, au minimum, devrait commander le responsable pour que p_1 soit supérieure à 0.999 ?

Exercice 5 (6 points)

I] On considère la fonction f_2 définie sur $]0, +\infty[$ par $f_2(x) = x^2 - \ln x$ et on désigne par (Γ) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_2(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_2(x)$.

b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_2(x)}{x}$ et interpréter graphiquement le résultat.

c) Dresser le tableau de variation de f_2 .

2) Dans l'annexe ci-jointe on a tracé, dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, la courbe (L) de la fonction $\ln$ et la courbe (C) d'équation $y = x^2$.

a) Soit $x > 0$. On considère les points M et M_2 de même abscisse x et appartenant respectivement à (L) et (C). Vérifier que $MM_2 = f_2(x)$.

b) Construire alors dans l'annexe les points de la courbe (Γ) d'abscisses respectives

$$2, \frac{1}{e} \text{ et } \sqrt{\frac{1}{2}}.$$

c) Tracer la courbe (Γ) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ de l'annexe.

II] 1) Soit k un entier supérieur ou égal à 2.

On considère la fonction f_k définie sur $]0, +\infty[$ par $f_k(x) = x^k - \ln x$.

a) Déterminer f'_k la fonction dérivée de f_k .

b) Montrer que f_k admet un minimum en $\sqrt[k]{\frac{1}{k}}$ égal à $\frac{1 + \ln k}{k}$.

c) Pour tout réel $x > 0$, on considère les points $M_k(x, x^k)$ et $M(x, \ln x)$.

Déterminer la valeur minimale de la distance MM_k .

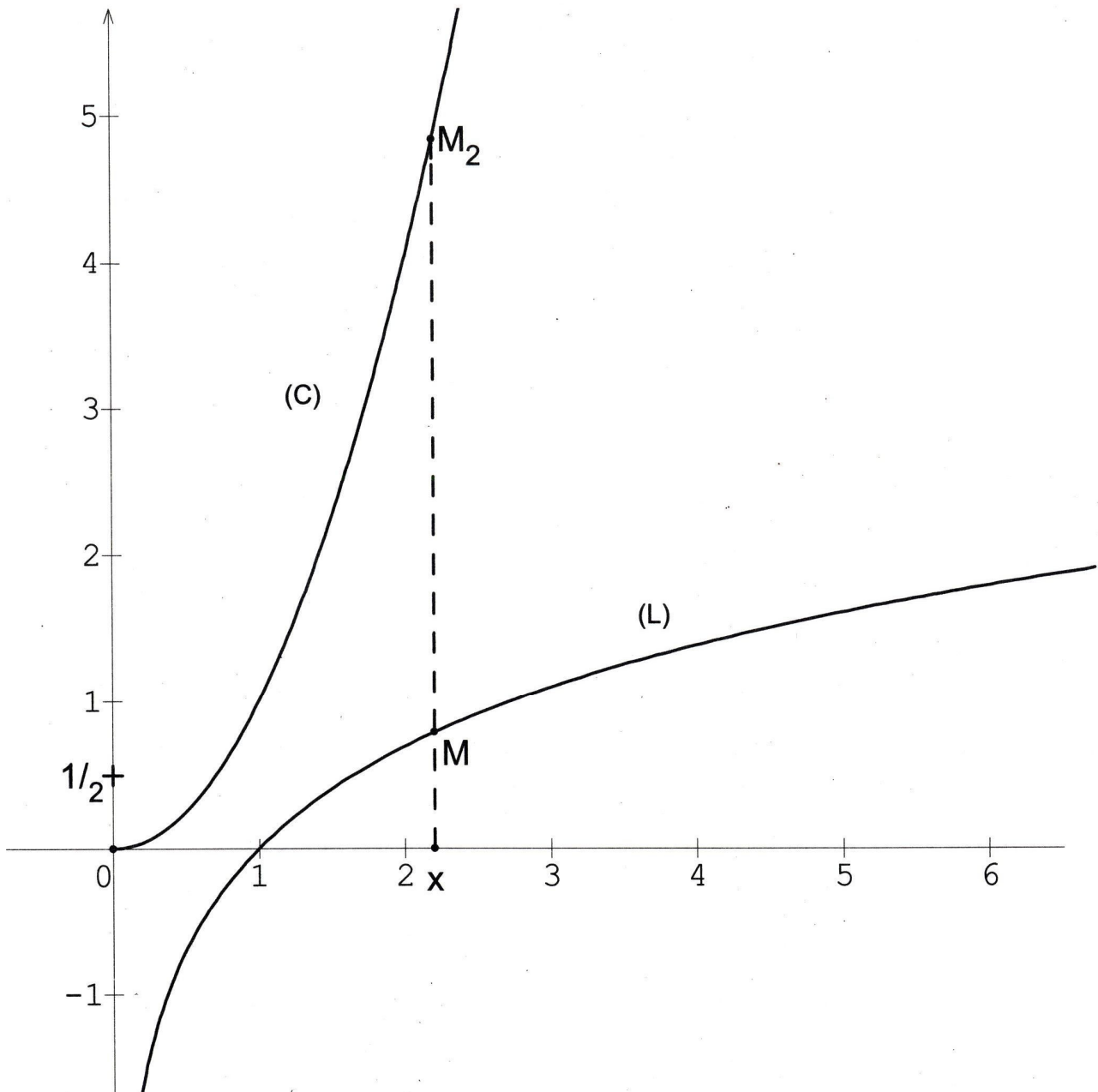
2) Pour tout entier $k \geq 2$, on pose $u_k = \sqrt[k]{\frac{1}{k}}$.

a) Vérifier que $\ln u_k = -\frac{\ln k}{k}$ et en déduire la limite de (u_k) .

b) Soit $A(1, 0)$ et A_k le point de coordonnées $(u_k, f_k(u_k))$.

Calculer la limite de la distance AA_k lorsque k tend vers $+\infty$.

Annexe (à rendre avec la copie)



MATHS

Section : Mathématiques

1^{ère} Session

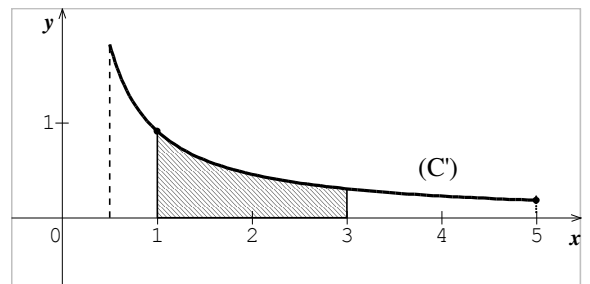
Exercice 1

Le plan est muni d'un repère orthonormé.

Soit f une fonction définie et dérivable sur $\left[\frac{1}{2}, 5\right]$ telle que sa courbe représentative (C) passe par les points $A(1,0)$ et $B(3, 1)$. Dans la figure ci-contre, on a représenté la courbe (C') de la dérivée f' de la fonction f .

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

- 1) (C) admet une tangente de coefficient directeur -1 .
- 2) L'aire de la partie hachurée est égale à 1 .
- 3) (C) admet une tangente de coefficient directeur $\frac{1}{2}$.
- 4) Pour tous a et b de $[1,3]$, $|f(b) - f(a)| \leq |b - a|$.



Contenu

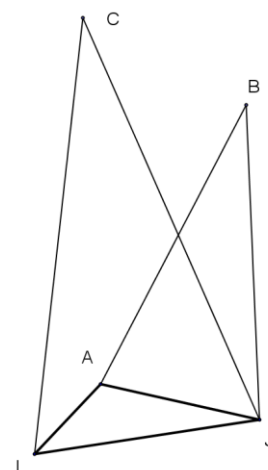
- Tangente à une courbe
- Notion d'aires
- Inégalités des accroissements finis

Solutions

1. Faux., car Pour $x \in \left[\frac{1}{2}, 5\right]$, $f'(x) > 0$. Par suite $f'(x) \neq -1$ pour tout $x \in \left[\frac{1}{2}, 5\right]$.
2. Vrai. En effet : La fonction f' est continue et positive sur $[1,3]$ donc l'aire de la partie hachurée est égale à :
$$\int_1^3 f'(x) dx = f(3) - f(1) = 1 - 0 = 1.$$
3. Vrai. En effet : La fonction f' est continue sur $\left[\frac{1}{2}, 5\right]$ et $\frac{1}{2} \in \left[\frac{1}{2}, 5\right]$ donc il existe $c \in \left[\frac{1}{2}, 5\right]$ tel que $f'(c) = \frac{1}{2}$.
4. Vrai. En effet : La fonction f est dérivable sur $[1,3]$ et pour $x \in [1,3]$, $|f'(x)| \leq 1$.
D'après l'inégalité des accroissements finis, pour tous a et b de $[1,3]$, $|f(b) - f(a)| \leq |b - a|$.

Exercice 2

Dans le plan orienté, AIJ est un triangle quelconque, BAJ et CIJ sont deux triangles isocèles respectivement en B et C tels que $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BJ}) \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi]$ et $(\overrightarrow{CI}, \overrightarrow{CJ}) \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi]$.



On désigne par t la translation de vecteur $\overrightarrow{IA}$ et par r_B et r_C les rotations de même angle $\frac{\pi}{6}$ et de centres respectifs B et C .

- 1) a) Déterminer $r_C(I)$.
b) Montrer que $r_B \circ t(I) = J$.
c) En déduire que $r_B \circ t = r_C$.

- 2) Soit $K = t(C)$.

Montrer que $BC = BK$ et $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BK}) \equiv -\frac{\pi}{6} [2\pi]$.

- 3) Soit D le point du plan tel que le triangle DIA est isocèle en D et $(\overrightarrow{DI}, \overrightarrow{DA}) \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi]$.

- a) Soit O le milieu de $[AC]$.
Montrer que l'image du triangle DIA par la symétrie centrale de centre O est le triangle BKC .
- b) Montrer que $ABCD$ est un parallélogramme.

Contenu

- Composée rotation et translation
- Configuration de base (triangle isocèle, parallélogramme)

Aptitudes visées :

- Reconnaître la composée d'une rotation et d'une translation
- Exploiter une isométrie pour déterminer la nature d'un quadrilatère.

Solutions

1. a) Le triangle CIJ est isocèle en C et $\overrightarrow{CI}, \overrightarrow{CJ} \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi]$, par suite $CI = CJ$ et $\overrightarrow{CI}, \overrightarrow{CJ} \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi]$.

On en déduit que $r_C(I) = J$.

- b) Le triangle BAJ est isocèle en B et $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BJ} \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi]$, par suite $BA = BJ$ et $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BJ} \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi]$.

On en déduit que $r_B(A) = J$. $\begin{cases} t(I) = A \\ r_B(A) = J \end{cases}$ donc $r_B \circ t(I) = J$.

- c) $r_B \circ t$ est la composée d'une rotation d'angle $\frac{\pi}{6}$ et d'une translation donc c'est une rotation d'angle $\frac{\pi}{6}$.

Or $r_B \circ t \mid = J$, $CI = CJ$ et $\widehat{CI, CJ} \equiv \frac{\pi}{6} \quad 2\pi$. Il en résulte que C est le centre de $r_B \circ t$.

On en déduit que $r_B \circ t = r_C$.

2. Puisque $K = t \mid C$ donc $r_B \circ t \mid C = r_B \mid K$, or $r_B \circ t \mid C = r_C \mid C = C$. Il en résulte que $r_B \mid K = C$ ou encore $BC = BK$ et $\widehat{BC, BK} \equiv -\frac{\pi}{6} \quad 2\pi$.

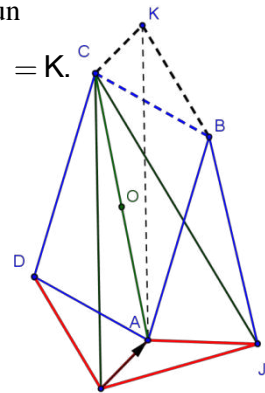
3. a) On sait que $K = t \mid C$ donc $\overline{CK} = \overline{IA}$ et les points I, A et C ne sont pas alignés donc IAKC est un parallélogramme. Comme O est le milieu de $[IC]$ donc O est le milieu de $[IK]$. Il en résulte que $S_O \mid = K$.
d'autre part Le point O est le milieu de $[AC]$ donc $S_O \mid A = C$.

Le triangle DIA est isocèle de base $[IA]$ tel que $\widehat{DI, DA} \equiv \frac{\pi}{6} \quad [2\pi]$.

$S_O \mid = K, S_O \mid A = C, \widehat{BK, BC} \equiv \frac{\pi}{6} \quad [2\pi]$ et le triangle BKC est isocèle de base $[KC]$.

On en déduit que l'image du triangle IAD par S_O est le triangle BKC.

- b) L'image du triangle IAD par S_O est le triangle BKC, $S_O \mid = K$ et $S_O \mid A = C$ donc $S_O \mid D = B$ ou encore O est le milieu de $[BD]$ de plus O est le milieu de $[AC]$ et les points A, B et C ne sont pas alignés. On en déduit que ABCD est un parallélogramme.



Exercice 3

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On désigne par A le point de coordonnées (3, 2).

Soit N un point de l'axe $(O, \vec{u})$ et P le point de l'axe $(O, \vec{v})$ tel que ANP est un triangle rectangle en A.

- 1) a) Soit les points E(3, 0) et F(0, 2).

Montrer qu'il existe une unique similitude directe S de centre A qui transforme E en F.

Donner son rapport et son angle.

- b) Déterminer l'image de l'axe $(O, \vec{u})$ par S.

- c) En déduire que $S(N) = P$.

- d) Soit M un point d'affixe z et M' le point d'affixe z' tel que $M' = S(M)$.

Montrer que $z' = -\frac{3}{2}i z + \frac{13}{2}i$.

- 2) a) On note x l'abscisse du point N et y l'ordonnée du point P.

Montrer que $3x + 2y = 13$.

- b) Déterminer les points N et P dont les coordonnées sont des entiers.

Contenu

- Similitude directe (image d'une configuration de base par une similitude directe, expression complexe d'une similitude directe)
- Arithmétique

Aptitudes visées :

- Reconnaître une similitude directe.
- Reconnaître l'image d'une droite par une similitude directe.
- Identifier l'image d'un point par une similitude directe.
- Résoudre un problème d'arithmétique.

Solutions

1. a) $A \neq E$ et $A \neq F$ donc il existe une unique similitude directe S de centre A qui envoie E en F , son rapport est $k = \frac{AF}{AE} = \frac{3}{2}$ et son angle a pour mesure $\left(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AF}\right) \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi]$.

b) $SE = F$ et $E \in O, \vec{u}$ donc $S(O, \vec{u})$ est la droite passant par F et perpendiculaire à $O, \vec{u}$.

Il en résulte que $S(O, \vec{u}) = O, \vec{v}$.

c) $SA \perp AN$ est la droite passant par A et perpendiculaire à AN , il en résulte que $SA \perp AN = AP$.

$N \in AN \cap O, \vec{u}$ donc $SN \in SA \perp AN \cap S(O, \vec{u}) = AP \cap O, \vec{v} = P$. D'où $SN = P$.

d) S est la similitude directe de centre A d'affixe $z_A = 3 + 2i$, de rapport $\frac{3}{2}$ et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

Soit M un point d'affixe z et M' le point d'affixe z' , image de M par S . L'expression complexe de S est de la

forme $z' = az + b$, $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$ avec $a = \frac{3}{2}e^{i(-\frac{\pi}{2})} = -\frac{3}{2}i$ et $\frac{b}{1 + \frac{3}{2}i} = 3 + 2i$ donc $b = \frac{13}{2}i$.

On en déduit que $z' = -\frac{3}{2}iz + \frac{13}{2}i$.

2. a) L'affixe de N est $z_N = x$ et l'affixe de P est $z_P = iy$.

$$SN = P \Leftrightarrow iy = -\frac{3}{2}ix + \frac{13}{2}i = \left(-\frac{3}{2}x + \frac{13}{2}\right)i \Leftrightarrow y = -\frac{3}{2}x + \frac{13}{2} \Leftrightarrow 3x + 2y = 13.$$

b) $N(x, 0)$ et $P(0, y)$. x et y sont des entiers si et seulement si (x, y) est solution de l'équation

$$3x + 2y = 13 \text{ dans } \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}.$$

Réolvons alors dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation $E : 3x + 2y = 13$.

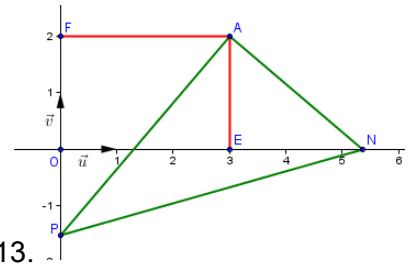
$(1, 5)$ est solution de E donc $3x + 2y = 13 \Leftrightarrow 3x + 2y = 3 \times 1 + 2 \times 5 \Leftrightarrow 3x - 1 = 2(-y + 5) \quad (*)$.

3 divise $2(-y + 5)$ et $3 \wedge 2 = 1$ donc d'après Gauss 3 divise $-y + 5$ par suite $-y + 5 = 3k$ avec $k \in \mathbb{Z}$

ou encore $y = -3k + 5$. En remplaçant y par sa valeur dans $(*)$, on obtient $x = 2k + 1$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Réciproquement $3(2k + 1) + 2(-3k + 5) = 3 + 10 = 13$.

On en déduit que $N(2k + 1, 0)$, $P(0, -3k + 5)$ avec $k \in \mathbb{Z}$.



Exercice 4

Un laboratoire de sciences physiques dispose d'un ensemble d'oscilloscopes de même modèle. La durée de vie, en nombre d'années, d'un oscilloscope est une variable aléatoire notée X qui suit la loi exponentielle de paramètre 0,125.

Dans tout l'exercice on donnera les résultats à 10^{-3} près par défaut.

1) a) Montrer que $p(X > 10) = 0,286$.

b) Calculer la probabilité qu'un oscilloscope ait une durée de vie inférieure à 6 mois.

2) Le responsable du laboratoire veut commander n oscilloscopes ($n \geq 2$).

On suppose que la durée de vie d'un oscilloscope est indépendante de celle des autres.

On note p_1 la probabilité qu'au moins un oscilloscope ait une durée de vie supérieure à 10 ans.

a) Exprimer p_1 en fonction de n .

b) Combien d'oscilloscopes, au minimum, devrait commander le responsable pour que p_1 soit supérieure à 0.999 ?

Contenu

- Loi de probabilité continue (loi exponentielle)
- Loi binomiale

Aptitudes visées :

- Calculer la probabilité d'un événement pour une loi exponentielle.
- Reconnaître une loi binomiale
- Calculer la probabilité d'un événement pour une loi binomiale.

Solutions

1. a) $p(X > 10) = e^{-0,125 \times 10} = e^{-1,25} = 0,286$.

b) L'évènement « l'oscilloscope a une durée de vie inférieure à 6 mois » se traduit par $0 \leq X \leq 0,5$.

$$p(0 \leq X \leq 0,5) = 1 - e^{-\frac{0,125}{2}} = 1 - e^{-0,0625} = 0,06.$$

2. On considère la variable aléatoire Y qui prend pour valeurs, le nombre d'oscilloscopes qui ont une durée de vie supérieure à 10 ans. Y suit une loi binomiale de paramètres $n, p(X > 10) = 0.286$.

La loi de Y est donnée par $P(Y = k) = C_n^k 0,286^k 0,714^{n-k}, k \in \{0, 1, \dots, n\}$.

a) $p_1 = p(Y \geq 1) = 1 - p(Y = 0) = 1 - 0,714^n$.

$$b) p_1 \geq 0,999 \Leftrightarrow 1 - 0,714^n \geq 0,999 \Leftrightarrow 0,714^n \leq 0,001 \Leftrightarrow n \ln 0,714 \leq \ln 0,001$$

$$\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln 0,001}{\ln 0,714} = 20,505. \text{ Soit } n = 21.$$

Exercice 5

I] On considère la fonction f_2 définie sur $]0, +\infty[$ par $f_2(x) = x^2 - \ln x$ et on désigne par (Γ) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_2(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_2(x)$.

b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_2(x)}{x}$ et interpréter graphiquement le résultat.

c) Dresser le tableau de variation de f_2 .

2) On a tracé ci-dessous, dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, la courbe (L) de la fonction $\ln$ et la courbe (C) d'équation $y = x^2$.

a) Soit $x > 0$. On considère les points M et M_2 de même abscisse x et appartenant respectivement à (L) et (C). Vérifier que $MM_2 = f_2(x)$.

b) Construire alors les points de la courbe (Γ) d'abscisses respectives $2, \frac{1}{e}$ et $\sqrt{\frac{1}{2}}$.

c) Tracer la courbe (Γ) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

II] 1) Soit k un entier supérieur ou égal à 2.

On considère la fonction f_k définie sur $]0, +\infty[$ par $f_k(x) = x^k - \ln x$.

a) Déterminer f'_k la fonction dérivée de f_k .

b) Montrer que f_k admet un minimum en $\sqrt[k]{\frac{1}{k}}$ égal à $\frac{1 + \ln k}{k}$.

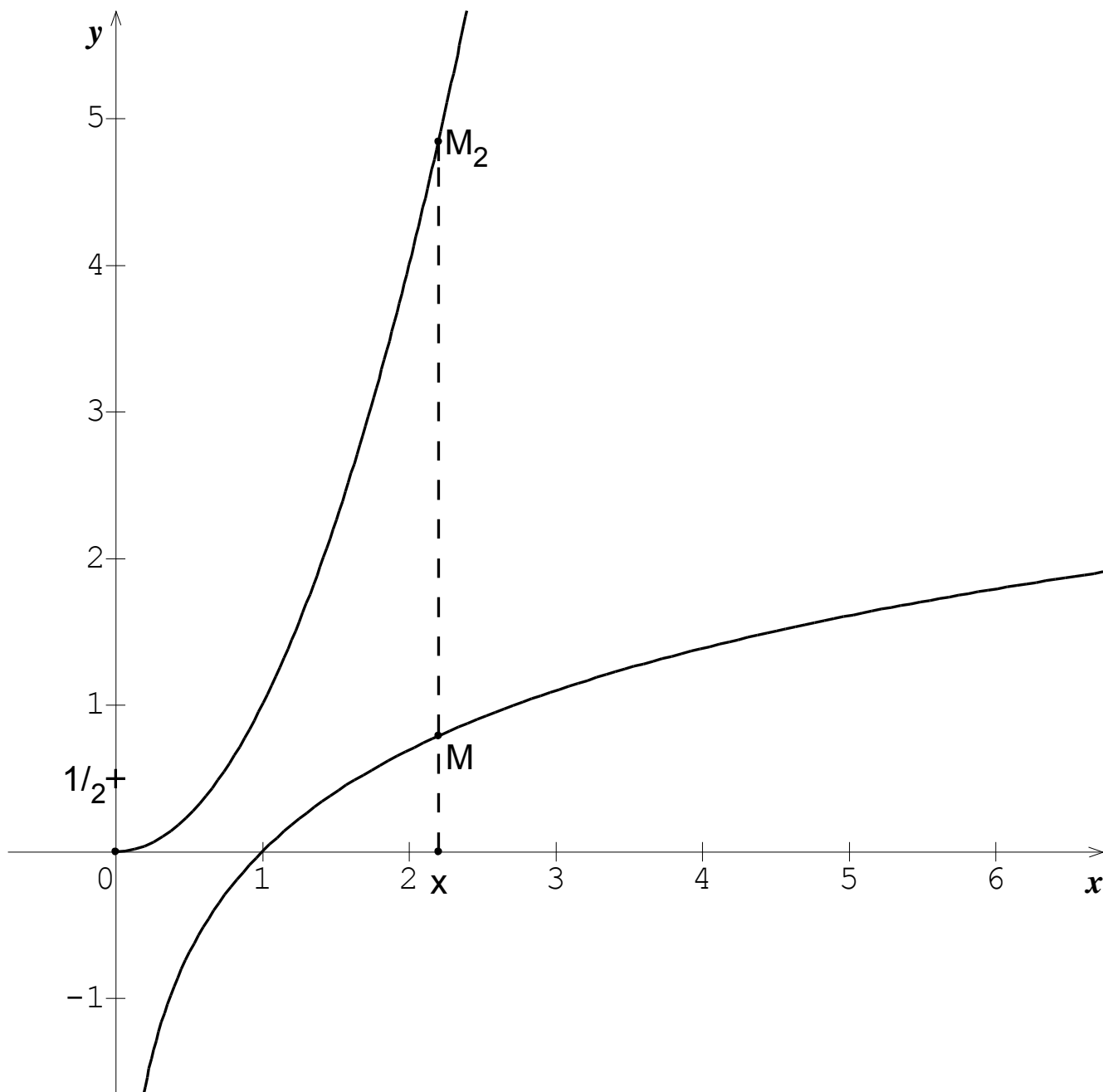
c) Pour tout réel $x > 0$, on considère les points $M_k(x, x^k)$ et $M(x, \ln x)$.
Déterminer la valeur minimale de la distance MM_k .

2) Pour tout entier $k \geq 2$, on pose $u_k = \sqrt[k]{\frac{1}{k}}$.

a) Vérifier que $\ln u_k = -\frac{\ln k}{k}$ et en déduire la limite de (u_k) .

b) Soit $A(1, 0)$ et A_k le point de coordonnées $(u_k, f_k(u_k))$.

Calculer la limite de la distance AA_k lorsque k tend vers $+\infty$.



- *Fonction $\ln$: continuité, dérivabilité, branches infinies .*
- *Notion d'extremum*
- *Suite réelle.*

Aptitudes visées :

- *Calculer la limite d'une fonction.*
- *Interpréter graphiquement un résultat.*
- *Etudier les variations d'une fonction.*
- *Reconnaître un minimum d'une fonction.*
- *Calculer la limite d'une suite réelle.*

Solutions

I.

1. a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_2(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_2(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(1 - \frac{\ln x}{x^2}\right) = +\infty$.

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_2(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x - \frac{\ln x}{x} = +\infty$ donc Γ admet une branche parabolique de direction celle de $O, \vec{j}$.

c) La fonction f_2 est dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour tout $x \in]0, +\infty[$, $f_2'(x) = 2x - \frac{1}{x} = \frac{2x^2 - 1}{x}$.

Le signe de $f_2'(x)$ est celui de $2x^2 - 1$. $\begin{cases} 2x^2 - 1 \\ x \in]0, +\infty[\end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

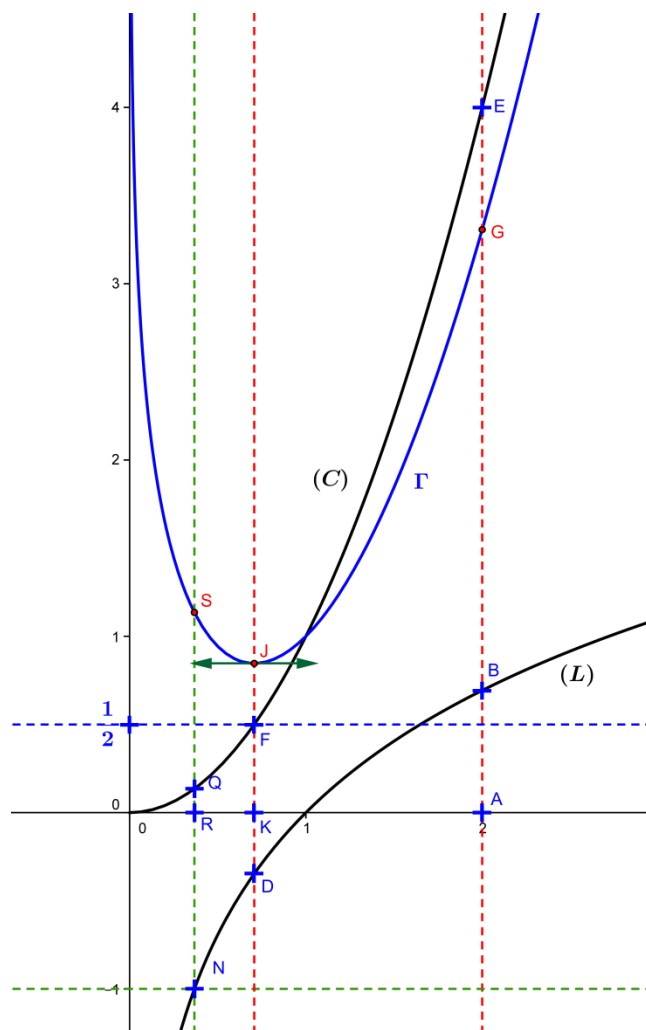
x	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$+\infty$
$f_2'(x)$	-	0	+
f_2	$+\infty$	$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \ln 2$	$+\infty$

2. a) Pour tout $x \in]0, +\infty[$, $MM_2 = |x^2 - \ln x| = |f_2(x)| = f_2(x)$ car f_2 admet un minimum global strictement positif sur $]0, +\infty[$ donc $f_2(x) > 0$ pour tout $x \in]0, +\infty[$.

b) *) La droite passant par le point A de l'axe des abscisses d'abscisse 2 et parallèle à l'axe des ordonnées coupe L en B et C en E. Ainsi le point de Γ d'abscisse 2 est le point G de AE tel que $EG = AB$.

**) Du point de l'axe des ordonnées d'ordonnée -1 , on mène la parallèle à l'axe des abscisses. Elle coupe L en N. Du point N on mène la parallèle à l'axe des ordonnées. Elle coupe C en Q et l'axe des abscisses en R, le point de Γ d'abscisse $\frac{1}{e}$ est alors le point S du segment RQ tel que $RS = NQ$.

***) Du point de l'axe des ordonnées d'ordonnée $\frac{1}{2}$ on mène la parallèle à l'axe des abscisses. Elle coupe C en F et de F on mène la parallèle à l'axe des ordonnées elle coupe L en H et l'axe des abscisses en K, le point de Γ d'abscisse $\frac{1}{\sqrt{2}}$ est alors le point J de la demi-droite KF tel que $KJ = HF$.



II.

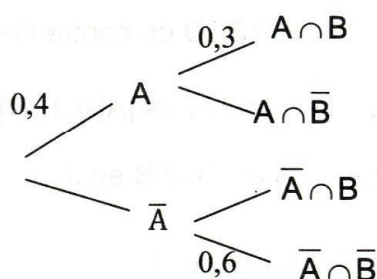
1. a) La fonction f_k est dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour $x \in]0, +\infty[$, $f'_k(x) = kx^{k-1} - \frac{1}{x} = \frac{kx^k - 1}{x}$.
 b) $f'_k(x) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt[k]{\frac{1}{k}}$ de plus $f'_k(x) < 0 \Leftrightarrow 0 < x < \sqrt[k]{\frac{1}{k}}$ et $f'_k(x) > 0 \Leftrightarrow x > \sqrt[k]{\frac{1}{k}}$. Il en résulte que f_k s'annule en $\sqrt[k]{\frac{1}{k}}$ en changeant de signe, d'où f_k admet un minimum en $\sqrt[k]{\frac{1}{k}}$ égal à $f_k\left(\sqrt[k]{\frac{1}{k}}\right) = \left(\sqrt[k]{\frac{1}{k}}\right)^k - \ln \sqrt[k]{\frac{1}{k}} = \frac{1}{k} + \frac{1}{k} \ln k = \frac{1 + \ln k}{k}$.
 c) $MM_k = |x^k - \ln x| = |f_k(x)| = f_k(x)$ car le minimum de f_k est $\frac{1 + \ln k}{k} > 0$ pour $k \geq 2$. Donc la valeur minimale de MM_k est la valeur minimale de f_k sur $]0, +\infty[$ qui est égale à $f_k\left(\sqrt[k]{\frac{1}{k}}\right) = \frac{1 + \ln k}{k}$.
2. a) Pour tout $k \geq 2$, $\ln u_k = \ln \sqrt[k]{\frac{1}{k}} = \frac{1}{k} \ln \frac{1}{k} = \frac{-\ln k}{k}$. $\lim_{k \rightarrow +\infty} \ln u_k = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{-\ln k}{k} = 0$ d'où $\lim_{k \rightarrow +\infty} u_k = 1$.
 b) $AA_k = \sqrt{1 - u_k^2 + f_k(u_k)^2}$. Or $\lim_{k \rightarrow +\infty} u_k = 1$ et $\lim_{k \rightarrow +\infty} f_k(u_k) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1 + \ln k}{k} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{k} + \frac{\ln k}{k} = 0$.
 On en déduit que $\lim_{k \rightarrow +\infty} AA_k = \lim_{k \rightarrow +\infty} \sqrt{1 - u_k^2 + f_k(u_k)^2} = 0$.

REPUBLIQUE TUNISIENNE ◇◇◇ MINISTRE DE L'EDUCATION	EXAMEN DU BACCALAUREAT SESSION DE JUIN 2012		
	Epreuve : MATHÉMATIQUES	Durée : 4 h	Coefficient : 4
SECTION : mathématiques		Session de contrôle	

Le sujet comporte 3 pages.

Exercice 1 (3 points)

Une expérience aléatoire est représentée par l'arbre de probabilité suivant :



Répondre par vrai ou faux à chacune des affirmations suivantes en justifiant la réponse :

- 1) $p(\bar{A}) = 0,6$.
- 2) La probabilité de $\bar{B}$ sachant A est égale à 0,7.
- 3) $p(B) = 0,7$.
- 4) $p(A \cup B) = 0,64$.

Exercice 2 (4 points)

Soit a un réel strictement positif.

- 1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - (1+i)az + ia^2 = 0$.
- 2) Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On désigne par A et B les points d'abscisses respectives a et ia .

- a) Quelle est la nature du triangle OAB ?
- b) Déterminer l'abscisse du point C tel que OACB soit un carré.
- 3) Soient P et Q les points du plan tels que les triangles OAP et AQC sont équilatéraux de sens direct.
 - a) Montrer que l'abscisse de P est égale à $(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})a$.
 - b) Calculer l'abscisse du point Q.
 - c) Montrer que les points B, P et Q sont alignés.

Exercice 3 (3 points)

1) On considère dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E) : $7x + 18y = 9$.

a) Montrer que le couple $(9, -3)$ est une solution particulière de l'équation (E).

b) Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E).

2) Résoudre alors dans $\mathbb{Z}$, le système
$$\begin{cases} n \equiv 6 \pmod{7} \\ n \equiv 15 \pmod{18} \end{cases}$$

Exercice 4 (5 points)

On considère dans le plan orienté un carré ABCD de centre O tel que $(\widehat{AB, AD}) = \frac{\pi}{2} [2\pi]$.

On note I, J et K les milieux respectifs des segments [AB], [CD] et [AD].

Soit S la similitude directe qui transforme A en O et B en J.

1) Montrer que S est de rapport $\frac{1}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

2) a) Déterminer les images des droites (BC) et (AC) par S.

b) En déduire $S(C)$.

3) a) Déterminer l'image du carré ABCD par S.

b) En déduire que $S(D) = K$.

c) Soit Ω le centre de S. Montrer que Ω est le barycentre des points pondérés $(C, 1)$ et $(K, 4)$.

d) Soit E le milieu du segment [OD]. Montrer que $S \circ S(A) = E$.

e) Construire Ω .

4) Montrer que les droites (AE), (CK) et (DI) sont concourantes.

Exercice 5 (5 points)

1) Soit g la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = 1 + x - x \ln x$.

a) Etudier les variations de g.

b) En déduire que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution x_0 dans $]0, +\infty[$.

Vérifier que $3,5 < x_0 < 3,6$.

c) En déduire le signe de g.

2) Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{\ln x}{1+x^2}$.

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- a) Calculer $f'(x)$ et vérifier que $f'(x) = \frac{g(x^2)}{x(1+x^2)^2}$.
- b) Dresser le tableau de variation de f .
- c) Vérifier que $f(\sqrt{x_0}) = \frac{1}{2x_0}$.
- d) Tracer la courbe (C). (On prendra $x_0 \approx 3,6$)
- 3) Soit (a_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $a_n = \int_1^n \frac{1}{t} f(t) dt$.
- a) Montrer que la suite (a_n) est croissante.
- b) Montrer que pour tout x de l'intervalle $]0,1[$, $\ln x \leq f(x) \leq \frac{1}{2} \ln x$.
- c) En déduire que $\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1 + \ln n}{n} \right) \leq a_n \leq 1 - \frac{1 + \ln n}{n}$.
- d) Montrer alors que la suite (a_n) est convergente et que sa limite appartient à l'intervalle $[\frac{1}{2}, 1]$.

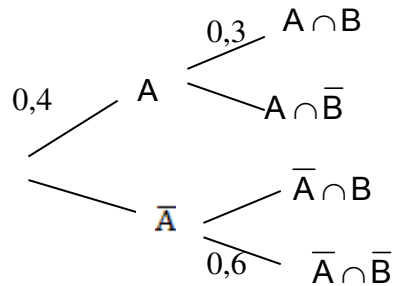
MATHS

Section : Mathématiques

Session de contrôle

Exercice 1

Une expérience aléatoire est représentée par l'arbre de probabilité suivant :



Répondre par vrai ou faux à chacune des affirmations suivantes en justifiant la réponse :

- 1) $p(\bar{A}) = 0,6$.
- 2) La probabilité de $\bar{B}$ sachant A est égale à 0,7.
- 3) $p(B) = 0,7$.
- 4) $p(A \cup B) = 0,64$.

Contenu

- Probabilité d'un évènement
- Probabilité conditionnelle

Solutions

1. Vrai. En effet : $p(\bar{A}) = 1 - p(A) = 1 - 0,4 = 0,6$.
2. Vrai. En effet : $p(\bar{B}|A) = 1 - p(B|A) = 1 - 0,3 = 0,7$.
3. Faux. Car $p(B) = p(B \cap A) + p(B \cap \bar{A}) = p(A) \times p(B|A) + p(\bar{A}) \times p(B|\bar{A})$
 $= p(A) \times p(B|A) + p(\bar{A}) \times (1 - p(\bar{B}|\bar{A})) = 0,4 \times 0,3 + 0,6 \times 0,4 = 0,36$.
4. Vrai. En effet : $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = 0,4 + 0,36 - 0,12 = 0,64$.

Exercice 2

Soit a un réel strictement positif.

- 1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - (1 + i)az + ia^2 = 0$.
- 2) Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On désigne par A et B les points d'affixes respectives a et ia.

a) Quelle est la nature du triangle OAB ?

b) Déterminer l'affixe du point C tel que OACB soit un carré.

3) Soient P et Q les points du plan tels que les triangles OAP et AQC sont équilatéraux de sens direct.

a) Montrer que l'affixe de P est égale à $\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a$.

b) Calculer l'affixe du point Q.

c) Montrer que les points B, P et Q sont alignés.

Contenu

- Equation du second degré dans $\mathbb{C}$
- Affixe d'un point, point image
- Configuration du plan

Aptitudes visées :

- Résoudre une équation du second degré dans $\mathbb{C}$
- Déterminer l'affixe d'un point
- Exploiter des écritures complexes pour montrer l'alignement de trois points.

Solutions

1. $\Delta = 2ia^2 - 4ia^2 = -2ia^2 = [1 - i]a^2$. On en déduit que $z_1 = a$ et $z_2 = ia$. $S_1 = a, ia$.

2. a) Puisque $z_{\overline{OA}} = a$ et $z_{\overline{OB}} = ia$ donc $\begin{cases} OA = OB = |a| = a \\ \frac{z_{\overline{OB}}}{z_{\overline{OA}}} = i \end{cases}$ d'où $OA = OB$ et $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB}$.

On en déduit que le triangle OAB est rectangle isocèle en O.

b) On sait que le triangle OAB est rectangle isocèle en O, par suite OACB est un carré si et seulement si $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{BC}$ équivaut à $(z_{\overline{OA}} = z_{\overline{BC}})$ équivaut à $(a - z_C = ia - ia)$ aut à $(z_C = a + ia)$

Ainsi OACB est un carré si et seulement si $z_C = a + ia$.

3. a) Le triangle OAP est équilatéral de sens direct donc P est l'image de A par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$

par suite $z_P = e^{i\frac{\pi}{3}}a$, on en déduit que $z_P = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a$.

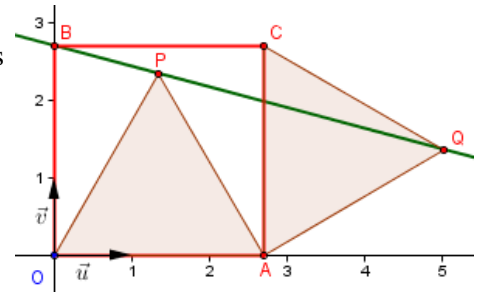
b) Le triangle AQC est équilatéral de sens direct donc Q est l'image de C par la rotation de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{3}$

par suite $z_Q = e^{-i\frac{\pi}{3}}z_C - z_A + z_A$, on en déduit que $z_Q = \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)ia + a = a\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$.

$$c) \frac{z_P - z_B}{z_Q - z_B} = \frac{\frac{1}{2} + i \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \right)}{1 + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i} = \frac{1 + i\sqrt{3} - 2}{2 + \sqrt{3} - i} = \frac{1 + i\sqrt{3} - 2}{2 + \sqrt{3}^2 + 1} = \frac{2 + \sqrt{3} - \sqrt{3} + 2}{2 + \sqrt{3}^2 + 1} = \frac{2}{3 + \sqrt{3}}.$$

Il en résulte que $\frac{z_{\overline{BP}}}{z_{\overline{BQ}}}$ est réel, donc les vecteurs $\overline{BP}$ et $\overline{BQ}$ sont colinéaires

par suite les points B, P et Q sont alignés.



Exercice 3

1) On considère dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E) : $7x + 18y = 9$.

a) Montrer que le couple $(9, -3)$ est une solution particulière de l'équation (E).

b) Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E).

2) Résoudre alors dans $\mathbb{Z}$, le système $\begin{cases} n \equiv 6 \pmod{7} \\ n \equiv 15 \pmod{18} \end{cases}$

Contenu

- Equation de type $ax + by = c$ où a, b et c sont des entiers

Aptitudes visées :

- Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ une équation de type $ax + by = c$ où a, b et c sont des entiers
- Résoudre un problème d'arithmétique

Solutions

1. a) $7 \times 9 + 18 \times -3 = 9 \times 7 - 6 = 9$ donc $9, -3$ est solution de E .

b) On sait que $9, -3$ est solution de E , donc $7x + 18y = 7 \times 9 + 18 \times -3 \Leftrightarrow 7x - 9 = 18 - y - 3$. *

7 divise $18 - y - 3$ et $7 \wedge 18 = 1$ donc d'après Gauss que 7 divise $-y - 3$ donc $-y - 3 = 7k, k \in \mathbb{Z}$

Par suite $y = -7k - 3, k \in \mathbb{Z}$. En remplaçant y par sa valeur dans * , on obtient $x = 18k + 9, k \in \mathbb{Z}$.

Réciproquement : Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $7(18k + 9) + 18(-7k - 3) = 7 \times 9 + 18 \times -3 = 9$.

On en déduit que $S_{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}} = \{18k + 9, -7k - 3, k \in \mathbb{Z}\}$.

2. $\begin{cases} n \equiv 6 \pmod{7} \\ n \equiv 15 \pmod{18} \end{cases}$ si et seulement s'il existe $x, y \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ tel que $\begin{cases} n = 6 + 7x \\ n = 15 + 18y \end{cases}$ donc $6 + 7x = 15 + 18y$

d'où $7x + 18 - y = 9$. D'après 1) b) il en résulte que $x = 18k + 9, k \in \mathbb{Z}$, par suite $n = 69 + 126k, k \in \mathbb{Z}$.

Réciproquement : Si $n = 69 + 126k, k \in \mathbb{Z}$, comme $\begin{cases} 126 = 18 \times 7 \\ 69 \equiv 6 \pmod{7} \\ 69 \equiv 15 \pmod{18} \end{cases}$ alors $\begin{cases} n \equiv 6 \pmod{7} \\ n \equiv 15 \pmod{18} \end{cases}$.

On en déduit que $S_{\mathbb{Z}} = \{69 + 126k, k \in \mathbb{Z}\}$.

Exercice 4

On considère dans le plan orienté un carré ABCD de centre O tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$.

On note I, J et K les milieux respectifs des segments [AB], [CD] et [AD].

Soit S la similitude directe qui transforme A en O et B en J.

- 1) Montrer que S est de rapport $\frac{1}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
- 2) a) Déterminer les images des droites (BC) et (AC) par S.
b) En déduire S(C).
- 3) a) Déterminer l'image du carré ABCD par S.
b) En déduire que $S(D) = K$.
c) Soit Ω le centre de S. Montrer que Ω est le barycentre des points pondérés (C, 1) et (K, 4).
d) Soit E le milieu du segment [OD]. Montrer que $S \circ S(A) = E$.
e) Construire Ω .
- 4) Montrer que les droites (AE), (CK) et (DI) sont concourantes.

Contenu

- *Similitude directe*
- *Image d'une configuration de base par une similitude directe*

Aptitudes visées :

- *Reconnaître une similitude directe.*
- *Construction du centre d'une similitude directe*
- *Montrer que trois droites sont concourantes*

Solutions

1. Le rapport de S est $k = \frac{OJ}{AB} = \frac{\frac{1}{2}AD}{AD} = \frac{1}{2}$.

Une mesure de l'angle de S est $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{OJ}) \equiv (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) [2\pi] \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$.

2. a) $S(B) = J$ donc S(BC) est la droite passant par J et perpendiculaire à BC d'où $S(BC) = CD$.
 $S(A) = O$ donc S(AC) est la droite passant par O et perpendiculaire à AC d'où $S(AC) = BD$.
b) $C \in AC \cap BC$ donc $S(C) \in S(AC) \cap S(BC) = BD \cap CD = D$ d'où $S(C) = D$.

3. a) Le carré ABCD est un carré direct donc son image par S est un carré direct.
Or $S(A) = O$, $S(B) = J$, $S(C) = D$ et le carré OJDK est un carré direct, on en déduit que l'image du carré ABCD par S est le carré OJDK.

b) Puisque l'image du carré ABCD par S est le carré OJKL or $S A = O$, $S B = J$ et $S C = D$,
on en déduit que $S D = K$.

c) On a $S C = D$ et $S D = K$ donc $S \circ S C = K$, or $S \circ S$ est la similitude directe de centre Ω , de rapport $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ et d'angle $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \equiv \pi \pmod{2\pi}$ donc $S \circ S$ est l'homothétie de centre Ω et de rapport $-\frac{1}{4}$. Il en résulte que $\overrightarrow{\Omega K} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{\Omega C}$ donc $\overrightarrow{\Omega C} + 4\overrightarrow{\Omega K} = \vec{0}$ par suite Ω est le barycentre des points pondérés C,1 et K,4.

d) $S \circ S A = S O$, or O est le milieu de AC donc S O est le milieu de $[S A S C] = OD$, il en résulte que $S O = E$ par suite $S \circ S A = E$.

e) On sait que $S \circ S$ est l'homothétie de centre Ω et de rapport $-\frac{1}{4}$ et $S \circ S A = E$ donc Ω appartient à la droite AE d'où Ω est le point d'intersection des droites AE et KC. D'où la construction de Ω .

4. Les droites AE et CK sont sécantes en Ω .

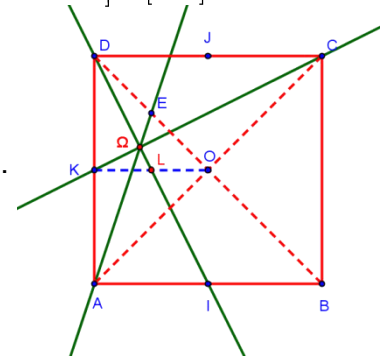
Soit L le milieu de $[OK]$, puisque K est le milieu de $[AD]$ donc S K est le milieu de $[S A S D] = [OK]$,

il en résulte que $S K = L$ par suite $S \circ S D = L$. On en déduit que $\Omega \in DL$.

Montrons que $I \in DL$. soit h l'homothétie de centre D et de rapport 2.

$h K = A$ et $h O = B$ donc $h L = I$. Il en résulte que $I \in DL$ et par suite $\Omega \in DI$.

On en déduit que les droites AE, CK et DI sont concourantes en Ω .



Exercice 5

1) Soit g la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = 1 + x - x \ln x$.

a) Etudier les variations de g.

b) En déduire que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution x_0 dans $]0, +\infty[$.

Vérifier que $3,5 < x_0 < 3,6$.

c) En déduire le signe de g.

2) Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{\ln x}{1+x^2}$.

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

a) Calculer $f'(x)$ et vérifier que $f'(x) = \frac{g(x^2)}{x(1+x^2)^2}$.

b) Dresser le tableau de variation de f.

c) Vérifier que $f(\sqrt{x_0}) = \frac{1}{2x_0}$.

d) Tracer la courbe (C). (On prendra $x_0 \approx 3,6$)

3) Soit (a_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $a_n = \int_1^n f(t) dt$.

a) Montrer que la suite (a_n) est croissante.

b) Montrer que pour tout x de l'intervalle $]0,1[$, $\ln x \leq f(x) \leq \frac{1}{2} \ln x$.

c) En déduire que $\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1 + \ln n}{n} \right) \leq a_n \leq 1 - \frac{1 + \ln n}{n}$.

d) Montrer alors que la suite (a_n) est convergente et que sa limite appartient à l'intervalle $[\frac{1}{2}, 1]$.

Contenu

- Fonction $\ln$: continuité, dérivabilité, branches infinies, variation, courbe représentative.
- Théorème de la bijection
- Calcul intégral, suite réelle.

Aptitudes visées :

- Déterminer le signe d'une expression
- Etudier les variations d'une fonction. Déterminer un extremum d'une fonction
- Etudier une suite définie par une intégrale
- Encadrer la limite d'une suite réelle.

Solutions

1. a) La fonction g est dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour $x \in]0, +\infty[$,

$$g'(x) = 1 - \left(\ln x + x \frac{1}{x} \right) = -\ln x. \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} g'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 - \ln x = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} g'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \ln x = -\infty.$$

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-
g	1	2	$-\infty$

b) La fonction g est continue et strictement croissante sur $]0,1[$ donc $g]0,1[=]1,2[$, par suite $g(x) > 0$ sur $]0,1[$.

La fonction g est continue et strictement décroissante sur $]1, +\infty[$ donc g réalise une bijection de $]1, +\infty[$ sur $g]1, +\infty[=]-\infty, 2[$, $0 \in]-\infty, 2[$ donc il existe un unique réel x_0 de $]1, +\infty[$ tel que $g(x_0) = 0$.

On en déduit que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique solution x_0 dans $]0, +\infty[$.

La fonction g est continue sur $[3.5, 3.6]$ et $g(3.5) \approx 0.11 > 0$ et $g(3.6) \approx -0.01 < 0$ d'où $3.5 < x_0 < 3.6$.

c) Pour tout $x \in]0,1[$, on a $g(x) > 0$.

g est strictement décroissante sur $]1, +\infty[$ et $g(x_0) = 0$ donc $g(x) > g(x_0) = 0$, pour tout $x \in]1, x_0[$.

g est strictement décroissante sur $x_0, +\infty$ et $g x_0 = 0$ donc $g x < g x_0 = 0$, pour tout $x \in x_0, +\infty$.

x	0	x_0	$+\infty$
$g x$	+	0	-

2. a) La fonction f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour tout $x \in]0, +\infty[$,

$$f' x = \frac{\frac{1}{x} (1+x^2 - 2x \ln x)}{1+x^{2/2}} = \frac{1+x^2 - 2x^2 \ln x}{x (1+x^{2/2})} = \frac{1+x^2 - x^2 \ln x^2}{x (1+x^{2/2})} = \frac{g x^2}{x (1+x^{2/2})}$$

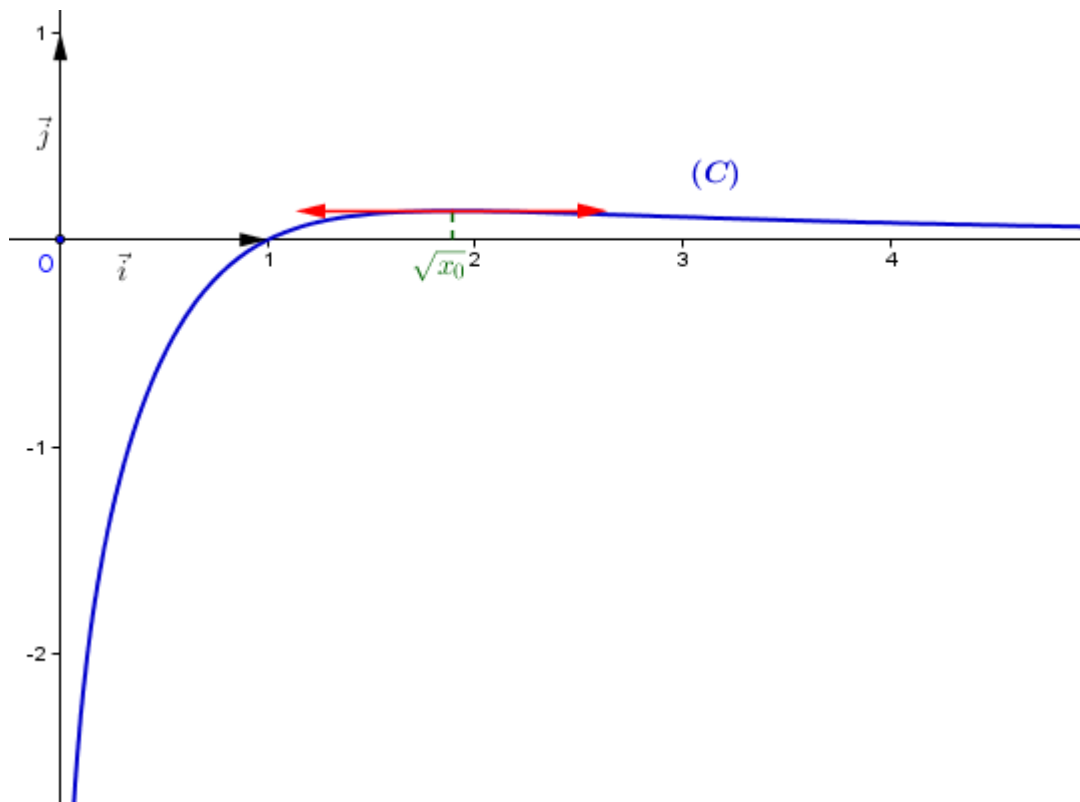
b) Le signe de $f' x$ est celui de $g x^2$. $\begin{cases} g x^2 = 0 \\ x \in]0, +\infty[\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = x_0 \\ x \in]0, +\infty[\end{cases} \Leftrightarrow x = \sqrt{x_0}$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\ln x}{x}}{\frac{1}{x} + x} = 0.$$

x	0	$\sqrt{x_0}$	$+\infty$
$f' x$	+	0	-
f	$-\infty$	$f \sqrt{x_0}$	0

c) $f \sqrt{x_0} = \frac{\ln \sqrt{x_0}}{1+x_0} = \frac{\ln x_0}{2(1+x_0)}$ or $g x_0 = 0$ donc $\ln x_0 = \frac{1+x_0}{x_0}$ d'où $f \sqrt{x_0} = \frac{1+x_0}{2(1+x_0)} = \frac{1}{2x_0}$.

d)



3. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit F la primitive de f sur $]0, 1[$ qui s'annule en 1, il en résulte que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$a_n = F\left(\frac{1}{n}\right).$$

Pour tout $x \in]0,1[$, on a $f(x) \leq 0$ donc F est décroissante sur $]0,1[$, or pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 < \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n} \leq 1$

donc $F\left(\frac{1}{n+1}\right) \geq F\left(\frac{1}{n}\right)$ d'où $a_n \leq a_{n+1}$ par suite a_n est croissante.

b) Pour tout $x \in]0,1[$, $1 \leq 1+x^2 \leq 2$ donc $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+x^2} \leq 1$, comme $\ln x < 0$, $x \in]0,1[$ donc

$$\ln x \leq \frac{\ln x}{1+x^2} \leq \frac{1}{2} \ln x \text{ d'où } \ln x \leq f(x) \leq \frac{1}{2} \ln x.$$

c) Pour tout $x \in]0,1[$, $\ln x \leq f(x) \leq \frac{1}{2} \ln x$, les fonctions f , $x \mapsto \ln x$ et $x \mapsto \frac{1}{2} \ln x$ sont continues sur $\left[\frac{1}{n}, 1\right]$

donc $\int_{\frac{1}{n}}^1 \ln x \, dx \leq \int_{\frac{1}{n}}^1 f(x) \, dx \leq \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{n}}^1 \ln x \, dx$ d'où $x \ln x - x \frac{1}{n} \leq -a_n \leq \frac{1}{2} x \ln x - x \frac{1}{n}$ par suite

$$-1 - \frac{1}{n} \ln \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \leq -a_n \leq \frac{1}{2} \left(-1 - \frac{1}{n} \ln \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \right) \text{ donc } \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1 + \ln n}{n} \right) \leq a_n \leq 1 - \frac{1 + \ln n}{n}.$$

d) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\ln n \geq 0$ donc $1 - \frac{1 + \ln n}{n} \leq 1$, ainsi a_n est croissante et majorée par 1 donc elle est convergente.

De plus $\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1 + \ln n}{n} \right) \leq a_n \leq 1 - \frac{1 + \ln n}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1 + \ln n}{n} \right) = \frac{1}{2} \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1 + \ln n}{n} \right) = 1. \text{ On en déduit que } \frac{1}{2} \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \leq 1.$$

**EXAMEN DU BACCALAUREAT
SESSION DE JUIN 2011**

**SESSION
PRINCIPALE**

SECTION : MATHEMATIQUES

EPREUVE : MATHEMATIQUES

DUREE : 4 heures

COEFFICIENT : 4

Le sujet comporte 4 pages numérotées de 1/4 à 4/4.

La page 4/4 est à rendre avec la copie.

Exercice 1 (3 points)

Dans ce qui suit, x et y désignent des entiers.

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

a) $x^3 \equiv x \pmod{2}$.

b) Si $x \equiv 2 \pmod{14}$ alors $x \equiv 1 \pmod{7}$.

c) Si $4x \equiv 10y \pmod{5}$ alors $x \equiv 0 \pmod{5}$.

d) Si $\begin{cases} x \equiv 4 \pmod{5} \\ y \equiv 5 \pmod{8} \end{cases}$ alors $8x - 5y = 7$.

Exercice 2 (6 points)

I - Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^{-x}$ et (Γ) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) Déterminer une équation de la tangente à (Γ) au point d'abscisse 0.

2) a) Montrer que pour tout $x \geq 0$, $1 - x \leq e^{-x} \leq 1$.

b) En déduire que pour tout $x \geq 0$, $x - \frac{x^2}{2} \leq 1 - e^{-x} \leq x$.

II - On considère la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par

$$\begin{cases} f(x) = e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

On désigne par $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a) Calculer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

b) Etudier la continuité et la dérivabilité de f à droite en 0.

c) Dresser le tableau de variation de f .

2) a) Montrer que le point $I \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{e^2} \right)$ est un point d'inflexion de la courbe $(\mathcal{C})$.

b) Donner une équation de la tangente T à la courbe $(\mathcal{C})$ au point I .

3) Dans la **figure 1** de l'annexe ci-jointe, on a représenté la courbe (Γ) dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

a) Construire I .

b) Construire la tangente T .

c) Tracer la courbe $(\mathcal{C})$.

4) Soit A_k l'aire du domaine plan limité par la courbe ($\mathcal{C}$), la droite d'équation $y = 1$ et les droites d'équations $x = k$ et $x = k + 1$ où k est un entier naturel non nul.

a) En utilisant I 2) b) montrer que $\ln\left(\frac{k+1}{k}\right) - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right] \leq A_k \leq \ln\left(\frac{k+1}{k}\right)$.

b) Calculer $\lim_{k \rightarrow +\infty} A_k$.

5) Pour tout $n \geq 1$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^n A_k$.

a) Interpréter graphiquement S_n .

b) Montrer que $\ln(n+1) - \frac{1}{2} \left[1 - \frac{1}{n+1} \right] \leq S_n \leq \ln(n+1)$.

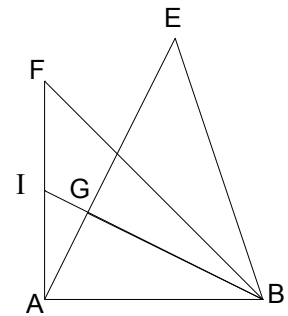
c) En déduire les limites de S_n et de $\frac{S_n}{\ln(n)}$, quand n tend vers l'infini.

Exercice 3 (5 points)

Dans la figure ci-contre, ABF est un triangle rectangle isocèle tel

que $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AF} \right) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$,

I est le milieu de [AF]. Les droites (IB) et (AE) se coupent en G et EGB est un triangle rectangle isocèle en G.



1) Soit f la similitude directe de centre B, d'angle $\frac{\pi}{4}$ et de

rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Déterminer les images des points E et F par f .

2) Soit g la similitude directe qui envoie A en F et F en B.

a) Montrer que g est de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\left(-\frac{3\pi}{4} \right)$.

b) Déterminer la nature de $g \circ g$ et préciser son rapport et son angle.

c) Montrer que $\tan(\angle ABI) = \frac{1}{2}$. En déduire que $GB = 2 GA$.

d) En déduire que G est le centre de g .

3) Soit $r = g \circ f$.

a) Montrer que r est la rotation de centre F et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

b) Déterminer $r(E)$. En déduire que EFGH est un carré, où H est le milieu de [EB].

EXERCICE 4 (6 points)

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère le point A d'affixe (-1) et les points M, N et P d'affixes respectives z , z^2 et z^3 où z est un nombre complexe non nul différent de (-1) et de 1 .

1) a) Montrer que :

(le triangle MNP est rectangle en P) si et seulement si $(\frac{1+z}{z})$ est imaginaire pur).

b) On pose $z = x + iy$ où x et y sont des réels. Montrer que $\frac{1+z}{z} = \frac{x^2 + y^2 + x - iy}{x^2 + y^2}$.

c) En déduire que l'ensemble des points M tels que le triangle MNP soit un triangle rectangle en P est le cercle (Γ) de diamètre $[OA]$, privé des points O et A.

2) Dans la **figure 2** de l'annexe ci-jointe, on a tracé le cercle (Γ) et on a placé un point M d'affixe z sur (Γ) et son projeté orthogonal H sur l'axe $(O, \vec{u})$.

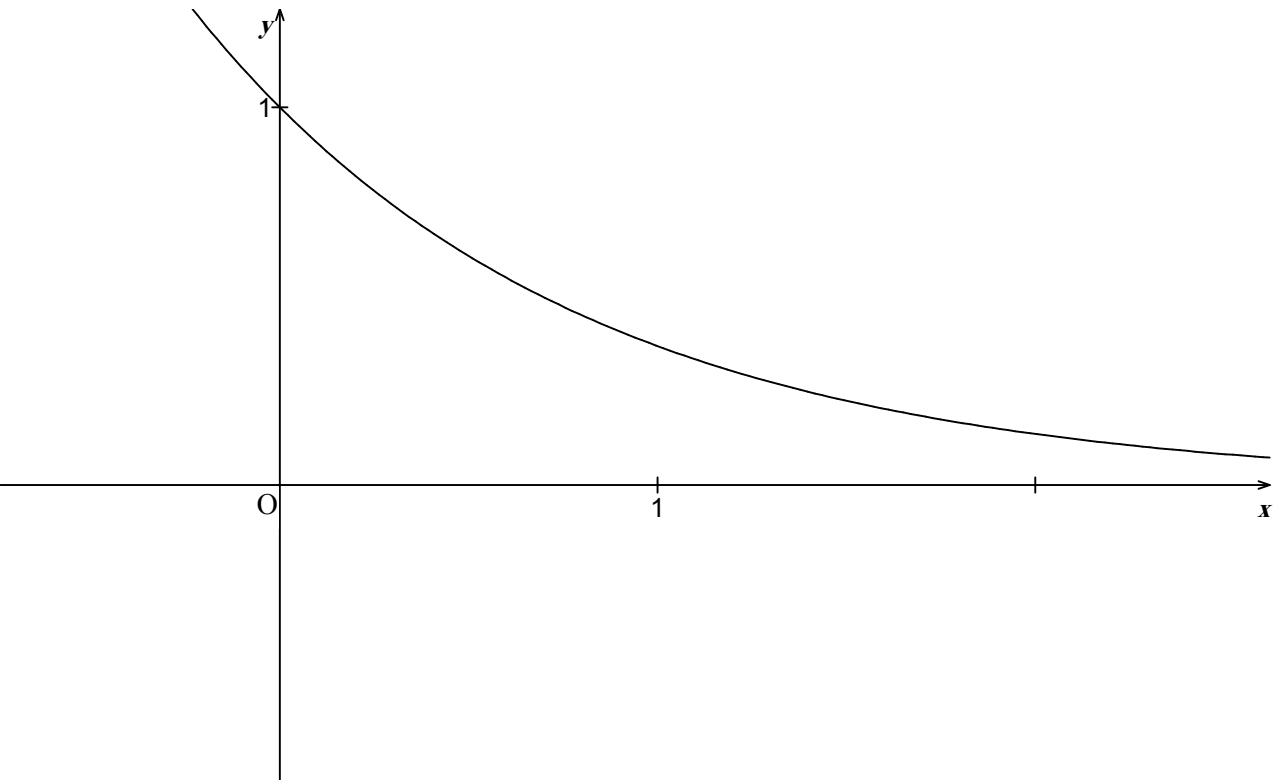
On se propose de construire les points N et P d'affixes respectives z^2 et z^3 tels que le triangle MNP soit rectangle en P.

a) Montrer que $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}) \equiv (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM})[2\pi]$ puis que $(\overrightarrow{ON}, \overrightarrow{OP}) \equiv (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM})[2\pi]$.

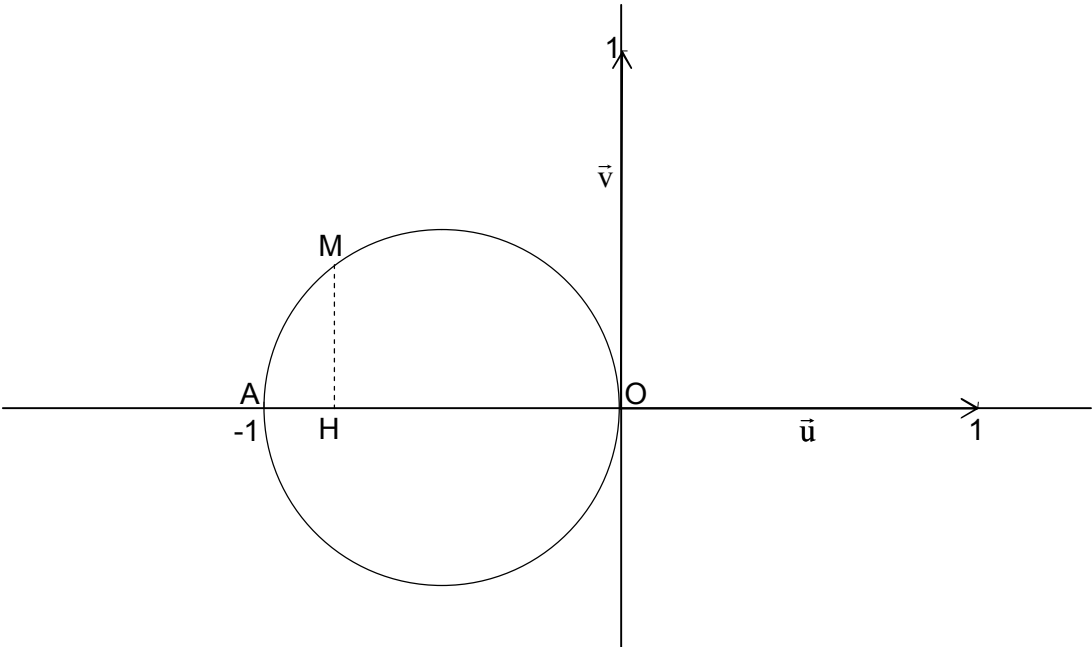
b) Montrer que $OH = OM^2$.

c) Donner un procédé de construction des points N et P puis les construire.

EXERCICE 2 figure1



EXERCICE 4 : figure 2



MATHS

Section : Maths

1^{ère} Session

EXERCICE 1

Dans ce qui suit, x et y désignent des entiers.

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

a) $x^3 \equiv x \pmod{2}$.

b) Si $x \equiv 2 \pmod{14}$ alors $x \equiv 1 \pmod{7}$.

c) Si $4x \equiv 10y \pmod{5}$ alors $x \equiv 0 \pmod{5}$.

Si $\begin{cases} x \equiv 4 \pmod{5} \\ y \equiv 5 \pmod{8} \end{cases}$ alors $8x - 5y = 7$

Contenu

- *Congruence*.
- *Reste modulo n* .

Solutions et commentaires

a) **Vrai**. En effet : on sait que si x est un entier, alors son reste modulo 2 est soit 0 soit 1 :

Reste de $x \pmod{2}$	0	1
Reste de $x^3 \pmod{2}$	0	1

Il en résulte du tableau ci-dessus que $x^3 \equiv x \pmod{2}$.

✓ On pourrait envisager la justification suivante : $x^3 - x = x(x-1)(x+1)$ est toujours pair, par conséquent $x^3 \equiv x \pmod{2}$

b) **Faux**. Car pour $x = 2$, $2 \equiv 2 \pmod{14}$ et 2 non congru à 1 modulo 7.

c) **Vrai**. En effet : si $4x \equiv 10y \pmod{5}$ alors $4x \equiv 0 \pmod{5}$ et donc $x \equiv 0 \pmod{5}$; car $4 \wedge 5 = 1$.

✓ Il s'agit d'utiliser le lemme de Gauss : $\begin{cases} ax \equiv 0 \pmod{b} \\ b \text{ ne divise pas } a \end{cases}$ alors $x \equiv 0 \pmod{b}$

d) **Faux**. Car : pour $x = 9$ et $y = 5$, $8 \times 9 - 7 \times 5 = 47$.

EXERCICE 2

I - Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^{-x}$ et (Γ) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) Déterminer une équation de la tangente à (Γ) au point d'abscisse 0.

2) a) Montrer que pour tout $x \geq 0$, $1 - x \leq e^{-x} \leq 1$.

b) En déduire que pour tout $x \geq 0$, $x - \frac{x^2}{2} \leq 1 - e^{-x} \leq x$.

II - On considère la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par

$$\begin{cases} f(x) = e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

On désigne par $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a) Calculer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

b) Etudier la continuité et la dérivabilité de f à droite en 0.

c) Dresser le tableau de variation de f .

2) a) Montrer que le point $I \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{e^2} \right)$ est un point d'inflexion de la courbe $(\mathcal{C})$.

b) Donner une équation de la tangente T à la courbe $(\mathcal{C})$ au point I .

3) Dans la **figure 1** de l'annexe ci-jointe, on a représenté la courbe (Γ) dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

a) Construire I .

b) Construire la tangente T .

c) Tracer la courbe $(\mathcal{C})$.

4) Soit A_k l'aire du domaine plan limité par la courbe $(\mathcal{C})$, la droite d'équation $y = 1$ et les droites

d'équations $x = k$ et $x = k + 1$ où k est un entier naturel non nul.

a) En utilisant I 2) b) montrer que $\ln\left(\frac{k+1}{k}\right) - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right] \leq A_k \leq \ln\left(\frac{k+1}{k}\right)$.

b) Calculer $\lim_{k \rightarrow +\infty} A_k$.

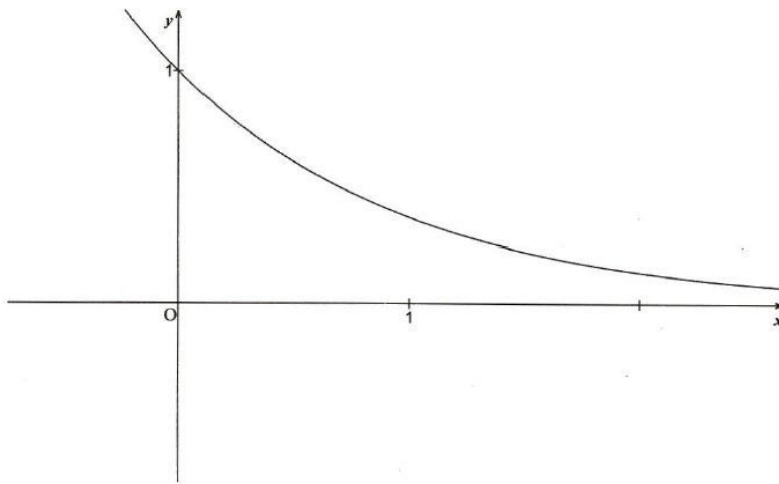
5) Pour tout $n \geq 1$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^n A_k$.

a) Interpréter graphiquement S_n .

b) Montrer que $\ln(n+1) - \frac{1}{2} \left[1 - \frac{1}{n+1} \right] \leq S_n \leq \ln(n+1)$.

c) En déduire les limites de S_n et de $\frac{S_n}{\ln(n)}$, quand n tend vers l'infini.

EXERCICE 2 figure1



Contenu

- Continuité- Dérivabilité –calculs de limites.
- Calcul d'intégrales
- Suites d'intégrales, limite d'une suite réelle.

Aptitudes visées :

- Etudier la continuité et la dérivabilité d'une fonction en un point.
- Encadrer une expression algébrique.
- Etudier les variations d'une fonction.
- Reconnaître un point d'inflexion.
- Exploiter un graphique pour construire un point ou une droite dans le plan .
- Tracer la courbe représentative d'une fonction.
- Reconnaître et encadrer une aire.

Solutions et commentaires

I.

1) $g(0) = 1$. Pour tout réel x , $g'(x) = -e^{-x}$ ce qui donne $g'(0) = -1$.

Une équation de la tangente à (Γ) au point d'abscisse 0 est $y = g'(0)x + g(0) = -x + 1$.

2) a) Pour tout $x \geq 0$, $-x \leq 0$ donc $e^{-x} \leq 1$.

Pour tout $x \geq 0$, posons la fonction h définie par $h(x) = e^{-x} + x - 1$.

La fonction h est dérivable sur $[0, +\infty[$ et $h'(x) = 1 - e^{-x} \geq 0$ donc h est strictement croissante sur

$[0, +\infty[$. Il en résulte que si $x \geq 0$ alors $h(x) \geq h(0) = 0$. On en déduit que $e^{-x} \geq 1 - x$ pour tout $x \geq 0$.

Ainsi pour tout $x \geq 0$, $1 - x \leq e^{-x} \leq 1$.

✓ La courbe représentative de la fonction

exponentielle est au dessus de la tangente T_1 au point d'abscisse 0 ($T_1 : y = x+1$) (voir graphique ci-contre).

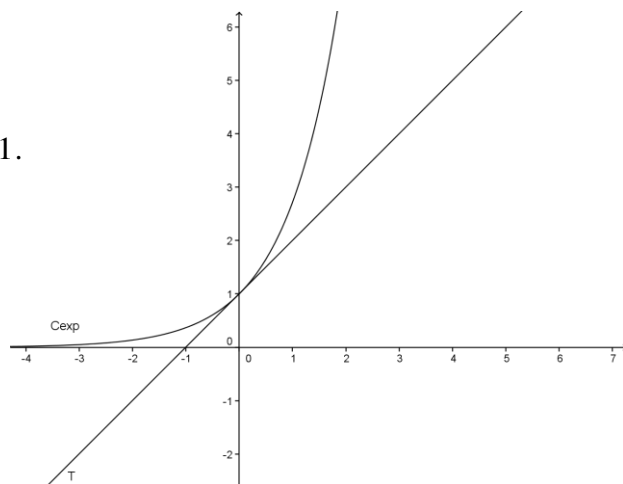
Ainsi pour tout réel x ; $e^x \geq x+1$ et par conséquent $e^{-x} \geq -x+1$.

b) D'après a) $1-t \leq e^{-t} \leq 1$ pour tout $t \in [0, x]$, $x \geq 0$.

Les fonctions $t \mapsto 1-t$ et $t \mapsto e^{-t}$ sont continues sur $[0, x]$, $x \geq 0$

$$\text{donc } \int_0^x (1-t)dt \leq \int_0^x e^{-t}dt \leq \int_0^x 1dt$$

$$\text{Donc } \left[t - \frac{t^2}{2} \right]_0^x \leq [-e^{-t}]_0^x \leq x \text{ d'où } x - \frac{x^2}{2} \leq 1 - e^{-x} \leq x \text{ pour tout } x \geq 0.$$



II.

$$1) \ a) \ \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} e^x = 1 \end{cases} \text{ on en déduit que } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-\frac{1}{x}} = 1.$$

$$b) \ \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{1}{x} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \end{cases} \text{ on en déduit que } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-\frac{1}{x}} = 0 = f(0) \text{ donc } f \text{ est continue à droite en } 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} -\left(-\frac{1}{x} e^{-\frac{1}{x}} \right) = 0 = f'_d(0). \text{ donc } f \text{ est dérivable à droite en } 0 \text{ et } f'_d(0) = 0.$$

c) La fonction f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $f'(x) = \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} > 0$.

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	0	+
f	0	1

2) a) La fonction f' est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $f''(x) = -\frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x}} + \frac{1}{x^4} e^{-\frac{1}{x}} = \frac{1-2x}{x^4} e^{-\frac{1}{x}}$.

$f''(x)$ s'annule en $\frac{1}{2}$ en changeant de signe. Donc le point $I\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{e^2}\right)$ est un point d'inflexion de la courbe ($\mathcal{C}$).

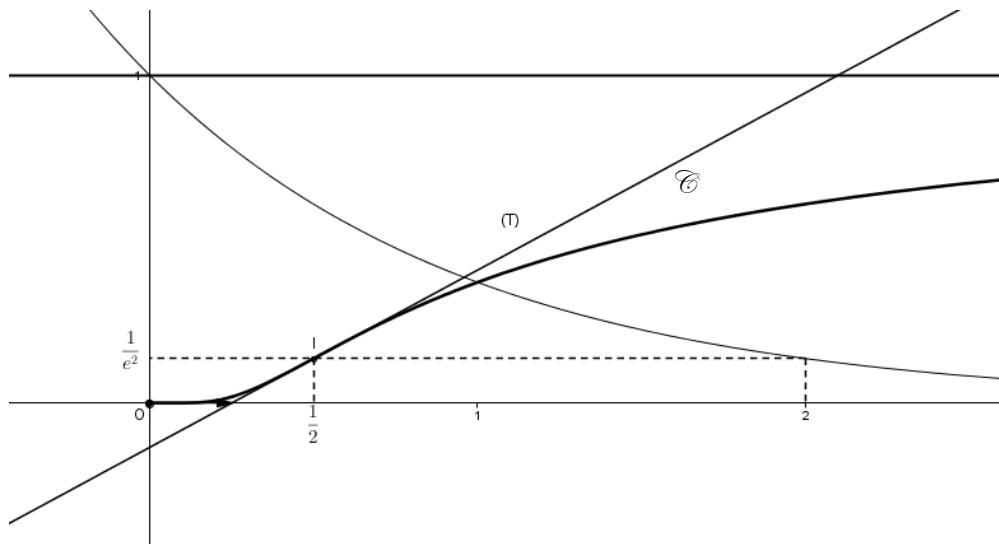
$$b) \ f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{4}{e^2} ; T : y = \frac{4}{e^2}x - \frac{3}{e^2}.$$

3) a) Le point I est le point de (Γ) d'abscisse $\frac{1}{2}$

✓ Il s'agit d'exploiter une donnée graphique pour construire un point du plan.

b) La tangente T passe par le point I et de coefficient directeur $\frac{4}{e^2}$; ce coefficient est constructible vu que $\frac{1}{e^2}$.

c) Représentation graphique de f .



$$4)a) A_k = \int_k^{k+1} (1 - f(x)) dx = \int_k^{k+1} \left(1 - e^{-\frac{1}{x}}\right) dx. \text{ or d'après I 2) on a } x - \frac{x^2}{2} \leq 1 - e^{-x} \leq x \text{ pour tout } x \geq 0,$$

on en déduit que $\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} \leq 1 - e^{-\frac{1}{x}} \leq \frac{1}{x}$ pour tout $x > 0$.

Les fonctions $x \mapsto \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2}$, $x \mapsto 1 - e^{-\frac{1}{x}}$ et $t \mapsto \frac{1}{x}$ sont continues sur $[k, k+1]$, $k \geq 1$

$$\text{donc } \int_k^{k+1} \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} dx \leq \int_k^{k+1} \left(1 - e^{-\frac{1}{x}}\right) dx \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx \text{ d'où } \left[\ln x + \frac{1}{2x}\right]_k^{k+1} \leq A_k \leq [\ln x]_k^{k+1}$$

$$\text{on en déduit que } \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right] \leq A_k \leq \ln\left(\frac{k+1}{k}\right).$$

$$b) \lim_{k \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right] = \lim_{k \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = 0 \text{ donc } \lim_{k \rightarrow +\infty} A_k = 0.$$

5)a) pour tout entier naturel n non nul, $S_n = \sum_{k=1}^n A_k = \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} \left(1 - e^{-\frac{1}{x}}\right) dx = \int_1^{n+1} \left(1 - e^{-\frac{1}{x}}\right) dx$. Ainsi S_n est l'aire de la partie du plan limitée par $(\mathcal{C})$, la droite $y = 1$ et les droites d'équations $x = 1$ et $x = n+1$.

$$b) \text{ On a } S_n = \int_1^{n+1} \left(1 - e^{-\frac{1}{x}}\right) dx \text{ donc } \int_1^{n+1} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2}\right) dx \leq S_n \leq \int_1^{n+1} \frac{1}{x} dx.$$

$$\text{On en déduit que } \ln(n+1) - \frac{1}{2}\left[1 - \frac{1}{n+1}\right] \leq S_n \leq \ln(n+1).$$

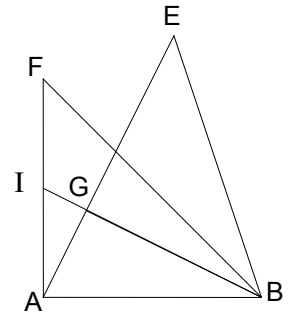
$$c) \text{ On sait } \ln(n+1) - \frac{1}{2}\left[1 - \frac{1}{n+1}\right] \leq S_n \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(n+1) - \frac{1}{2}\left[1 - \frac{1}{n+1}\right] = +\infty \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty.$$

De plus pour tout $n > 1$, $\ln(n) > 0$ donc

$$\frac{\ln(n+1) - \frac{1}{2} \left[1 - \frac{1}{n+1} \right]}{\ln(n)} \leq \frac{S_n}{\ln(n)} \leq \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} \text{ et puisque}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n+1) - \frac{1}{2} \left[1 - \frac{1}{n+1} \right]}{\ln(n)} = 1 \text{ on en déduit que}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{\ln(n)} = 1.$$



EXERCICE 3

Dans la figure ci-contre, ABF est un triangle rectangle isocèle

tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AF}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$,

I est le milieu de [AF]. Les droites (IB) et (AE) se coupent en G

et EGB est un triangle rectangle isocèle en G.

1) Soit f la similitude directe de centre B, d'angle $\frac{\pi}{4}$ et de

rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Déterminer les images des points E et F par f .

2) Soit g la similitude directe qui envoie A en F et F en B.

a) Montrer que g est de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$.

b) Déterminer la nature de $g \circ g$ et préciser son rapport et son angle.

c) Montrer que $\tan(\angle ABI) = \frac{1}{2}$. En déduire que $GB = 2 GA$.

d) En déduire que G est le centre de g .

3) Soit $r = g \circ f$.

a) Montrer que r est la rotation de centre F et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

b) Déterminer $r(E)$. En déduire que EFGH est un carré, où H est le milieu de [EB].

Contenu

- *Similitude directe.*
- *Composée de deux similitudes directes.*
- *Rotation.*

Aptitudes visées :

- Reconnaître l'image d'un point par une similitude directe.
- Identifier une similitude directe connaissant deux points et leurs images.
- Reconnaître la composée de deux similitudes directes non inverses et de rapports inverses.
- Exploiter une isométrie pour identifier une configuration usuelle du plan (carré).

Solutions et commentaires

1) Le triangle BEG est rectangle, isocèle en G et de sens direct donc
$$\begin{cases} \frac{BG}{BE} = \frac{BG}{\sqrt{2}BG} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \left(\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{BG} \right) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi] \end{cases}$$

Il en résulte que $f(E) = G$.

Le triangle BFA est rectangle, isocèle en A et de sens direct donc
$$\begin{cases} \frac{BA}{BF} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \left(\overrightarrow{BF}, \overrightarrow{BA} \right) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi] \end{cases}$$

Il en résulte que $f(F) = A$.

✓ Il s'agit d'utiliser une configuration de bases usuelle (triangle rectangle et isocèle) pour identifier l'image d'un point par une similitude directe.

2) a) $\frac{FB}{AF} = \sqrt{2}$ et $\left(\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{FB} \right) \equiv \pi + \left(\overrightarrow{FA}, \overrightarrow{FB} \right) [2\pi]$. Soit $\left(\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{FB} \right) \equiv -\frac{3\pi}{4} [2\pi]$

b) $g \circ g$ est une similitude directe de rapport 2 et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

c) $\tan(\angle ABI) = \frac{AI}{AB} = \frac{\frac{1}{2}AF}{AB} = \frac{1}{2}$ or $\tan(\angle ABG) = \frac{GA}{GB}$ donc $GB = 2GA$.

d) $g \circ g(A) = B$ et $\left(\overrightarrow{GA}, \overrightarrow{GB} \right) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$ et $GB = 2GA$ donc G est le centre de $g \circ g$ donc G est le centre de g .

✓ Il s'agit d'exploiter un résultat de cours : g et $g \circ g$ sont deux similitudes directes de même centre.

3) a) r est la composée de deux similitudes directes de rapports respectifs $\sqrt{2}$ et $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et d'angles respectifs

$-\frac{3\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{4}$, il en résulte que r est une rotation et d'angle $-\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{4} \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi]$ comme $(g \circ f)(F) = g(A) = F$

donc r est la rotation de centre F et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

b) $r(E) = g(f(E)) = g(G) = G$ donc $FE = FG$ et $GFE = \frac{\pi}{2}$ par suite le triangle EFG est rectangle et isocèle en F donc $GEF = \frac{\pi}{4}$. D'autre part H est le milieu de [BE] et le triangle EGB est rectangle et isocèle en G donc le triangle EGH est rectangle et isocèle en H donc $GEH = \frac{\pi}{4}$, on en déduit que $HEF = \frac{\pi}{2}$.
D'où $GHE = EFG = HEF = \frac{\pi}{2}$ ce qui prouve que le quadrilatère EFGH est un rectangle et puisque $FE = FG$ donc EFGH est un carré.

✓ Il s'agit d'utiliser un déplacement pour identifier une configuration usuelle (un carré).

EXERCICE 4

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère le point A d'affixe (-1) et les points M, N et P d'affixes respectives z , z^2 et z^3 où z est un nombre complexe non nul différent de (-1) et de 1.

1) a) Montrer que :

(le triangle MNP est rectangle en P) si et seulement si $\left(\frac{1+z}{z}\right)$ est imaginaire pur).

b) On pose $z = x + iy$ où x et y sont des réels. Montrer que $\frac{1+z}{z} = \frac{x^2 + y^2 + x - iy}{x^2 + y^2}$.

c) En déduire que l'ensemble des points M tels que le triangle MNP soit un triangle rectangle en P est le cercle (Γ) de diamètre [OA], privé des points O et A.

2) Dans la **figure 2** de l'annexe ci-jointe, on a tracé le cercle (Γ) et on a placé un point M d'affixe z sur (Γ) et son projeté orthogonal H sur l'axe $(O, \vec{u})$.

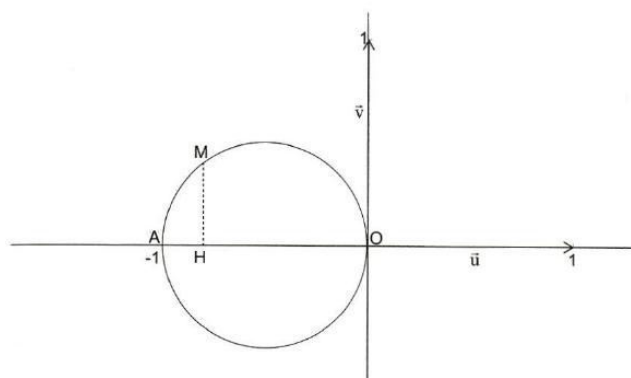
On se propose de construire les points N et P d'affixes respectives z^2 et z^3 tels que le triangle MNP soit rectangle en P.

a) Montrer que $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}) \equiv (\vec{u}, \overrightarrow{OM})[2\pi]$ puis que $(\overrightarrow{ON}, \overrightarrow{OP}) \equiv (\vec{u}, \overrightarrow{OM})[2\pi]$.

b) Montrer que $OH = OM^2$.

c) Donner un procédé de construction des points N et P puis les construire.

EXERCICE 4 : figure 2



Contenu

- *Ecriture algébrique d'un nombre complexe.*
- *Argument d'un nombre complexe non nul.*
- *Affixe et image .*

Aptitudes visées :

- *Déterminer l'écriture algébrique d'un nombre complexe.*
- *Repérer un point dans le plan et déterminer son affixe.*
- *Utiliser les nombres complexes pour déterminer un ensemble des points du plan.*
- *Utiliser les nombres complexes pour des constructions géométriques.*

Solutions et commentaires

1) a) Le triangle MNP est rectangle en P si et seulement si $\frac{z - z^3}{z^2 - z^3}$ est imaginaire pur si et seulement si $\frac{1+z}{z}$ est imaginaire pur.

$$b) \frac{1+z}{z} = \frac{1+x+iy}{x+iy} = \frac{(1+x+iy)(x-iy)}{(x+iy)(x-iy)} = \frac{x^2 + y^2 + x - iy}{x^2 + y^2}.$$

c) Soit M un point du plan d'affixe z non nulle et différente de 1 et -1.

(Le triangle MNP est rectangle en P) si et seulement si $\frac{1+z}{z}$ est imaginaire pur si et seulement si

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + x = 0 \\ M \neq O \\ M \neq A \end{cases} \quad \text{si et seulement si} \quad \begin{cases} \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4} \\ M \neq O \\ M \neq A \end{cases} \quad \text{si et seulement si } M \text{ appartient au cercle } \Gamma \text{ de centre}$$

$I\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ et de rayon $\frac{1}{2}$ privé des points O et A. Or le point I est le milieu de [OA] donc le cercle Γ est le cercle de diamètre [OA]. On en déduit que l'ensemble cherché est le cercle Γ de diamètre [OA] privé de O et A.

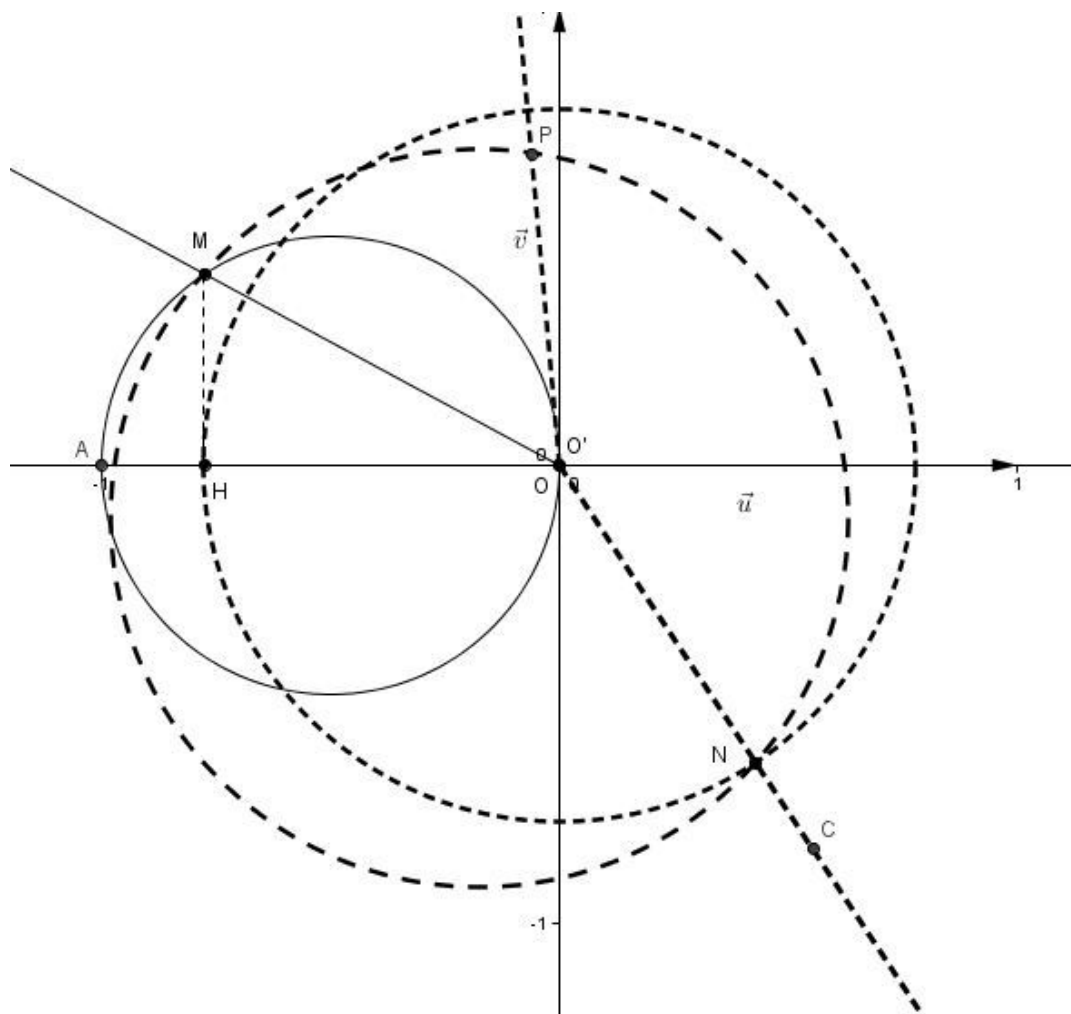
$$2) a) \left(\overrightarrow{OM}; \overrightarrow{ON}\right) \equiv \arg\left(\frac{z^2}{z}\right) [2\pi] \text{ donc } \left(\overrightarrow{OM}; \overrightarrow{ON}\right) \equiv \arg(z) [2\pi] \text{ d'où } \left(\overrightarrow{OM}; \overrightarrow{ON}\right) \equiv \left(\vec{u}; \overrightarrow{OM}\right) [2\pi].$$

$$\left(\overrightarrow{ON}; \overrightarrow{OP}\right) \equiv \arg\left(\frac{z^3}{z^2}\right) [2\pi] \text{ donc } \left(\overrightarrow{ON}; \overrightarrow{OP}\right) \equiv \left(\vec{u}; \overrightarrow{OM}\right) [2\pi].$$

$$b) OH = -x \text{ or } x^2 + y^2 + x = 0 \text{ donc } -x = x^2 + y^2 \text{ il en résulte que } OH = OM^2.$$

c) $ON = |z|^2 = OM^2 = OH$ donc N est le point d'intersection de la demi-droite $[OC)$ telle que $\left(\overrightarrow{OM}; \overrightarrow{ON}\right) \equiv \left(\vec{u}; \overrightarrow{OM}\right) [2\pi]$ avec le cercle de centre O et de rayon OH.

P est le point d'intersection du cercle de diamètre $[MN]$ avec la demi-droite image de $[OM)$ par la symétrie orthogonale d'axe (ON) .



EXAMEN DU BACCALAUREAT

SESSION DE JUIN 2011

**SESSION
DE CONTRÔLE**

SECTION : MATHEMATIQUES
EPREUVE : MATHEMATIQUES

DUREE : 4 heures

COEFFICIENT : 4

EXERCICE 1 (3 points)

Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \int_1^x \frac{\cos^2 t}{t} dt$.

Répondre par vrai ou faux à chacune des affirmations suivantes, en justifiant la réponse.

- 1) Pour tout $x > 0$, $f'(x) \geq 0$.
- 2) Pour tout $x > 0$, $f(x) \geq 0$.
- 3) $f(2) \leq \ln 2$.

EXERCICE 2 (6 points)

Pour tout entier naturel p supérieur ou égal à 3, on désigne par f_p la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par

$f_p(x) = p(\ln x) - x$, où $\ln$ désigne la fonction logarithme népérien. On note (C_p) la courbe représentative de f_p dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

A-1) Etudier les variations de la fonction $f_3: x \mapsto 3\ln x - x$.

2) Montrer que l'équation $f_3(x) = 0$ admet exactement deux solutions, notées u_3 et v_3 , appartenant respectivement aux intervalles $]1, 3[$ et $]3, +\infty[$.

3) On donne ci-dessous, le tableau de variation de f_p pour $p \geq 3$.

x	0	p	$+\infty$
$f'_p(x)$		+	-
f_p	$-\infty$	$p(\ln p) - p$	$-\infty$

- a) Montrer que, pour tout entier naturel $p \geq 3$, il existe un unique réel u_p appartenant à l'intervalle $]1, p[$ tel que $f_p(u_p) = 0$.
- b) Montrer que, pour tout entier naturel $p \geq 3$, il existe un unique réel $v_p > p$ tel que $f_p(v_p) = 0$.

On définit ainsi, pour tout entier naturel $p \geq 3$, deux suites (u_p) et (v_p) .

B- Dans cette partie on se propose d'étudier les deux suites (u_p) et (v_p) définies précédemment.

- 1) Déterminer la limite de la suite (v_p) .
- 2) On a représenté dans la **figure 1** de l'annexe ci jointe les courbes C_3 , C_4 , C_5 et C_6 représentatives des fonctions f_3 , f_4 , f_5 et f_6 .
 - a) Placer sur l'axe des abscisses les termes u_3 , u_4 , u_5 et u_6 de la suite (u_p) .
 - b) Représenter sur l'axe des ordonnées les réels $f_3(u_4)$, $f_4(u_5)$ et $f_5(u_6)$.
- 3) a) Montrer que pour tout entier naturel $p \geq 3$, $f_p(u_{p+1}) < 0$.
 - b) En déduire que la suite (u_p) est décroissante et qu'elle est convergente.
- c) Montrer que $\frac{\ln u_p}{u_p} = \frac{1}{p}$. En déduire la limite de la suite (u_p) .

EXERCICE 3 (5 points)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points $A(1,3,2)$, $B(1,-1,-2)$ et $C(2,4,1)$.

- 1) a) Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
 - b) Montrer qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est $2x - y + z - 1 = 0$.
- 2) Soit S la sphère d'équation $x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 2z - 4 = 0$.
 - a) Déterminer le centre I et le rayon r de la sphère S.
 - b) Montrer que la sphère S coupe le plan (ABC) suivant le cercle (Γ) de diamètre $[AB]$.
 - c) Montrer que la droite (AC) est tangente au cercle (Γ) .
- 3) Soit h l'homothétie de centre C et de rapport 3 et S' l'image de la sphère S par h.
 - a) Déterminer le rayon de la sphère S' et les coordonnées de son centre J.
 - b) Montrer que le plan (ABC) coupe la sphère S' suivant un cercle (Γ') .
 - c) Montrer que la droite (AC) est tangente au cercle (Γ') en un point E que l'on précisera.

EXERCICE 4 (6 points)

Le plan est orienté.

Dans la **figure 2** de l'annexe ci-jointe, le triangle OAB est rectangle isocèle en O et de sens direct.

H est le projeté orthogonal du point O sur la droite (AB), A' est le point du segment [OH] tel que

$OA' = \frac{1}{2} OA$ et H' est le projeté orthogonal du point A' sur la droite (OB).

Soit f la similitude directe de centre O qui envoie A en A'.

1) Déterminer le rapport et l'angle de f.

2) On note B' l'image du point B par la similitude directe f.

a) Déterminer la nature du triangle OA'B'.

b) Construire le point B'.

c) Montrer que $f(H) = H'$.

3) Soit I le milieu du segment [A'B] et J le milieu du segment [AA'].

a) Montrer qu'il existe un unique déplacement R qui envoie J en O et I en H.

b) Montrer que R est une rotation dont on déterminera l'angle.

c) Soit K le milieu du segment [AB']. Montrer que $JK = OH'$ et que $(\overrightarrow{JK}, \overrightarrow{OH'}) \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi]$.

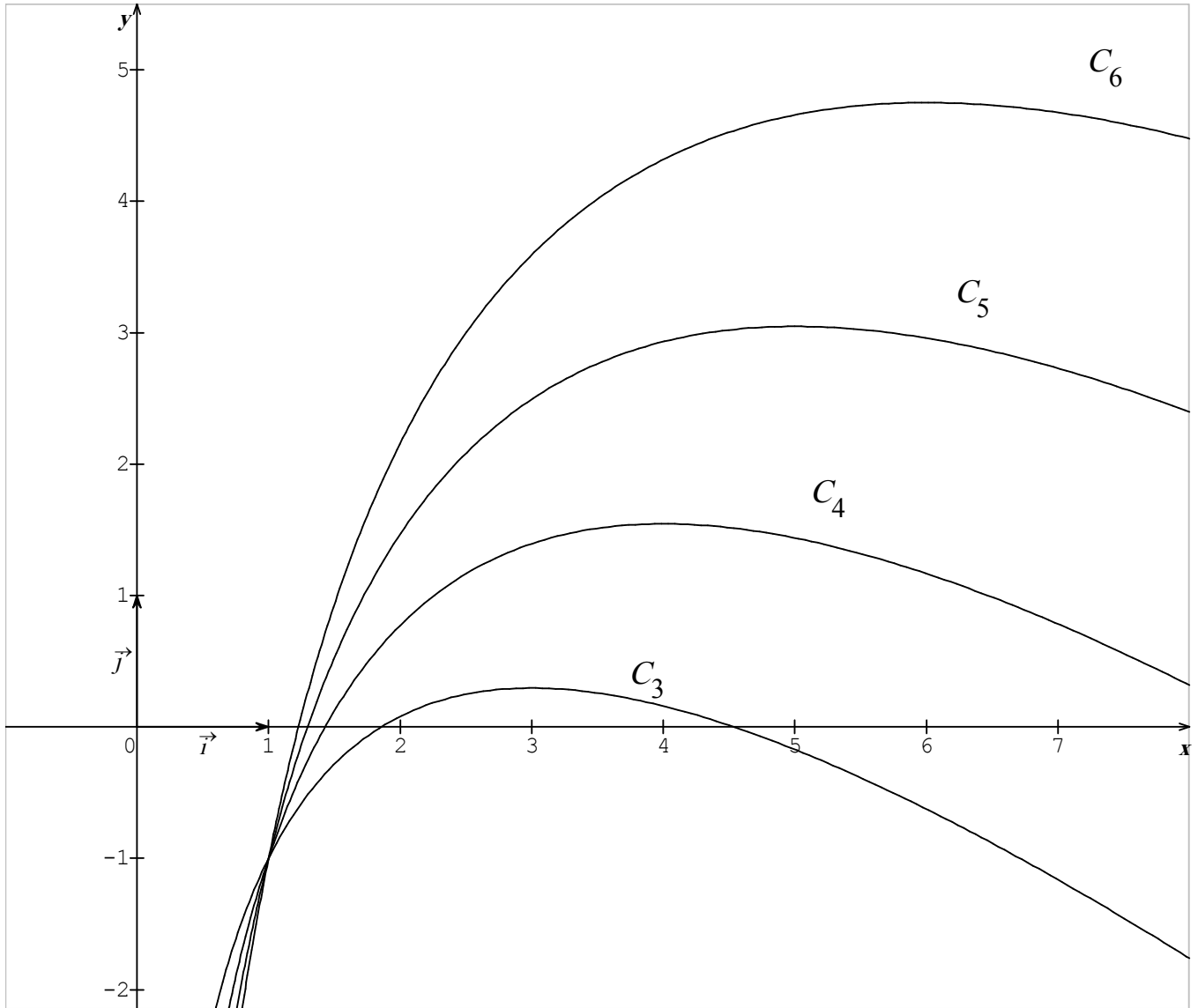
d) Déterminer alors R(K).

e) En déduire que $IK = HH'$ et que (IK) et (HH') sont perpendiculaires.

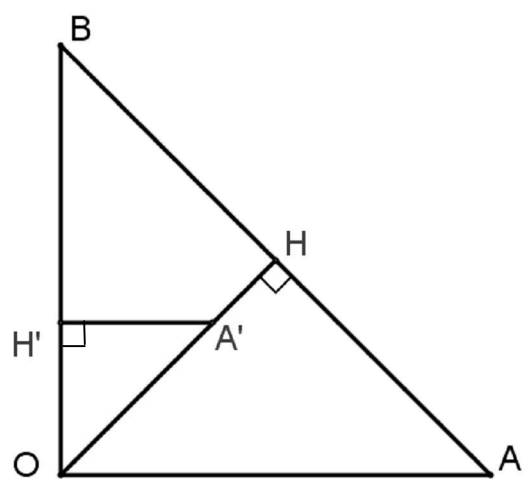
4) Montrer que le quadrilatère IHK H' est un carré.

ANNEXE

EXERCICE 2 figure1



EXERCICE 4 figure 2



MATHS

Section : Maths

2^{ème} Session

EXERCICE 1

Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \int_1^x \frac{\cos^2 t}{t} dt$.

Répondre par vrai ou faux à chacune des affirmations suivantes, en justifiant la réponse.

- 1) Pour tout $x > 0$, $f'(x) \geq 0$.
- 2) Pour tout $x > 0$, $f(x) \geq 0$.
- 3) $f(2) \leq \ln 2$.

Contenu

- *Fonction définie par intégrale.*
- *Signe d'une intégrale.*
- *Comparaison de deux intégrales.*

Solutions

1. **Vrai.** En effet : $g : x \mapsto \frac{\cos^2 x}{x}$ est continue sur $]0, +\infty[$ et $1 \in]0, +\infty[$ donc f est la primitive de g sur $]0, +\infty[$ qui s'annule en 1. Donc f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour tout $x > 0$; $f'(x) = \frac{\cos^2 x}{x} \geq 0$.
2. **Faux.** Car pour $0 < x < 1$; $\int_1^x \frac{\cos^2 t}{t} dt \leq 0$.
3. **Vrai.** En effet $\frac{\cos^2 t}{t} \leq \frac{1}{t}$ pour tout $t \in [1, 2]$ donc $f(2) = \int_1^2 \frac{\cos^2 t}{t} dt \leq \int_1^2 \frac{1}{t} dt = [\ln t]_1^2 = \ln 2$.

EXERCICE 2

Pour tout entier naturel p supérieur ou égal à 3, on désigne par f_p la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par

$f_p(x) = p(\ln x) - x$, où $\ln$ désigne la fonction logarithme népérien. On note (C_p) la courbe représentative de f_p dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

A-1) Etudier les variations de la fonction $f_3 : x \mapsto 3\ln x - x$.

- 2) Montrer que l'équation $f_3(x) = 0$ admet exactement deux solutions, notées u_3 et v_3 , appartenant respectivement aux intervalles $]1, 3[$ et $]3, +\infty[$.
- 3) On donne ci-dessous, le tableau de variation de f_p pour $p \geq 3$.

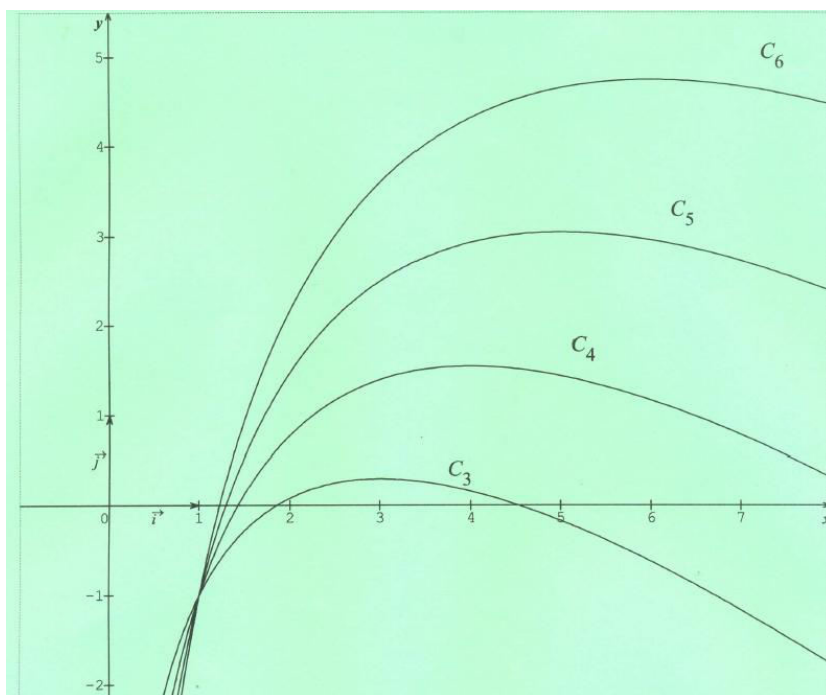
x	0	p	$+\infty$	
$f'_p(x)$		+	0	-
f_p	$-\infty$	$p(\ln p) - p$	$-\infty$	

- a) Montrer que , pour tout entier naturel $p \geq 3$, il existe un unique réel u_p appartenant à l'intervalle $]1, p[$ tel que $f_p(u_p) = 0$.
- b) Montrer que, pour tout entier naturel $p \geq 3$, il existe un unique réel $v_p > p$ tel que $f_p(v_p) = 0$.

On définit ainsi, pour tout entier naturel $p \geq 3$, deux suites (u_p) et (v_p) .

B- Dans cette partie on se propose d'étudier les deux suites (u_p) et (v_p) définies précédemment.

- 1) Déterminer la limite de la suite (v_p) .
- 2) On a représenté dans la **figure 1** de l'annexe ci jointe les courbes C_3 , C_4 , C_5 et C_6 représentatives des fonctions f_3 , f_4 , f_5 et f_6 .
 - a) Placer sur l'axe des abscisses les termes u_3 , u_4 , u_5 et u_6 de la suite (u_p) .
 - b) Représenter sur l'axe des ordonnées les réels $f_3(u_4)$, $f_4(u_5)$ et $f_5(u_6)$.
- 3) a) Montrer que pour tout entier naturel $p \geq 3$, $f_p(u_{p+1}) < 0$.
 - b) En déduire que la suite (u_p) est décroissante et qu'elle est convergente.
- c) Montrer que $\frac{\ln u_p}{u_p} = \frac{1}{p}$. En déduire la limite de la suite (u_p) .



Contenu

- Fonction $\ln$
- Notion de bijection.
- Suites réelles, calcul de limites.

Aptitudes visées

- Etudier les variations d'une fonction.
- Utiliser les théorèmes des valeurs intermédiaires ou de bijection pour montrer l'existence, l'unicité et encadrer des solutions des équations de type $f(x) = 0$.
- Représenter graphiquement les termes d'une suite récurrente.
- Prouver la convergence d'une suite réelle et déterminer sa limite.

Solutions et commentaires

A.

- 1) f_3 est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $f_3'(x) = \frac{3}{x} - 1 = \frac{3-x}{x}$.

x	0	3	$+\infty$
$f_3'(x)$		+	—
f_3		$3\ln 3 - 3$	$-\infty$

- 2) La fonction f_3 est continue et strictement croissante sur $]1, 3[$ donc elle réalise une bijection de $]1, 3[$ sur $f_3(]1, 3[) =]-1, 3\ln 3 - 3[$. $0 \in]-1, 3\ln 3 - 3[$ donc il existe un unique $u_3 \in]1, 3[$ tel que $f_3(u_3) = 0$.

La fonction f_3 est continue et strictement décroissante sur $]3, +\infty[$ donc elle réalise une bijection de $]3, +\infty[$ sur $f_3(]3, +\infty[) =]-\infty, 3\ln 3 - 3[$. $0 \in]-\infty, 3\ln 3 - 3[$ donc il existe un unique $v_3 \in]3, +\infty[$ tel que $f_3(v_3) = 0$.

✓ Se rappeler le théorème de bijection

- 3) Remarquons que pour tout $p > 3$, $p \ln p - p = p(\ln p - 1) > 0$.

a) La fonction f_p est continue et strictement croissante sur $]1, p[$ donc elle réalise une bijection de $]1, p[$ sur $f_p(]1, p[) =]-1, p \ln p - p[$. $0 \in]-1, p \ln p - p[$ donc il existe un unique $u_p \in]1, p[$ tel que $f_p(u_p) = 0$

b) La fonction f_p est continue et strictement décroissante sur $]p, +\infty[$ donc elle réalise une bijection de $]p, +\infty[$ sur $f_p(]p, +\infty[) =]-\infty, p \ln p - p[$. $0 \in]-\infty, p \ln p - p[$ donc il existe un unique $v_p \in]p, +\infty[$ tel que $f_p(v_p) = 0$.

B.

1) On sait que pour tout $p > 3$, $v_p > p$ et $\lim_{p \rightarrow +\infty} p = +\infty$ donc $\lim_{p \rightarrow +\infty} v_p = +\infty$.

2) a) et b) voir la figure.

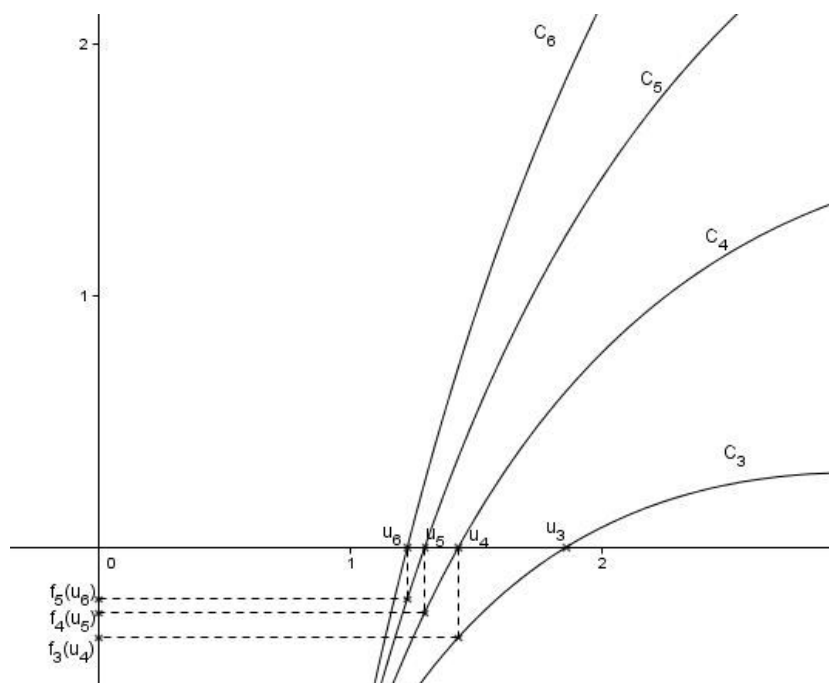
3) a) Pour tout $p \geq 3$, $f_p(u_{p+1}) = p \ln(u_{p+1}) - u_{p+1} = (p+1) \ln(u_{p+1}) - u_{p+1} - \ln(u_{p+1})$
 $= f_{p+1}(u_{p+1}) - \ln(u_{p+1}) = -\ln(u_{p+1}) < 0$ car $u_{p+1} > 1$.

b) on a pour tout $p \geq 3$, $f_p(u_{p+1}) < 0 = f_p(u_p)$ et la fonction f_p est strictement croissante sur $]1, p[$ donc $u_{p+1} < u_p$ par suite la suite (u_p) est décroissante et minorée par 1 donc elle est convergente.

c) $f_p(u_p) = 0 \Rightarrow p \ln(u_p) - u_p = 0 \Rightarrow \frac{\ln(u_p)}{u_p} = \frac{1}{p}$

Posons $\lim_{p \rightarrow +\infty} u_p = L$; $L \geq 1$.

$\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{\ln(u_p)}{u_p} = \lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{1}{p} = 0$, Si $L > 1$ alors $\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{\ln(u_p)}{u_p} = \frac{\ln L}{L} \neq 0$ d'où $L = 1$.



EXERCICE 3

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points $A(1,3,2)$, $B(1,-1,-2)$ et $C(2,4,1)$.

- 1) a) Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
b) Montrer qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est $2x - y + z - 1 = 0$.
- 2) Soit S la sphère d'équation $x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 2z - 4 = 0$.
a) Déterminer le centre I et le rayon r de la sphère S.
b) Montrer que la sphère S coupe le plan (ABC) suivant le cercle (Γ) de diamètre $[AB]$.
c) Montrer que la droite (AC) est tangente au cercle (Γ) .
- 3) Soit h l'homothétie de centre C et de rapport 3 et S' l'image de la sphère S par h.
a) Déterminer le rayon de la sphère S' et les coordonnées de son centre J.
b) Montrer que le plan (ABC) coupe la sphère S' suivant un cercle (Γ') .
c) Montrer que la droite (AC) est tangente au cercle (Γ') en un point E que l'on précisera.

Contenu

- Plan passant par trois points non alignés de l'espace.
- Sphère : équation d'une sphère, détermination du centre et du rayon d'une sphère, position d'une sphère et d'un plan
- Homothétie de l'espace, image d'une sphère, image d'un plan par une homothétie.

Aptitudes visées

- Déterminer une équation cartésienne d'un plan.
- Déterminer le centre et le rayon d'une sphère connaissant son équation cartésienne.
- Déterminer la position d'une sphère et d'un plan.
- Reconnaître l'image d'une sphère par une homothétie.
- Reconnaître un plan globalement invariant par une homothétie.

Solutions et commentaires

- 1) a) $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \neq \vec{0}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires et par suite les points A, B et C ne sont pas alignés.

Le vecteur $\vec{n}$ de composantes $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$, don $\vec{n}$ est normal au plan (ABC) et par suite

une équation du plan (ABC) est $2x - y + z + d = 0$

le point $A \in (ABC)$ donc $d = -1$. On en déduit que (ABC) : $2x - y + z - 1 = 0$.

✓ On peut traiter autrement cette question : il suffit de vérifier que les points A, B et C appartiennent au plan $P : 2x - y + z - 1 = 0$.

2) a) $S : x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 2z - 4 = 0 \Leftrightarrow (x - 3)^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 14$. On en déduit que S est la sphère de centre $I(3, 0, 1)$ et de rayon $r = \sqrt{14}$.

b) $d(I, (ABC)) = \sqrt{6} < r$ donc S coupe (ABC) suivant un cercle (Γ) de rayon $r' = \sqrt{r^2 - d^2} = 2\sqrt{2}$.

Or $A \in S$, $B \in S$ et $AB = 4\sqrt{2} = 2r'$ ce qui prouve que [AB] est un diamètre de (Γ) .

c) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ donc $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$ par suite la droite (AC) est perpendiculaire à la droite (AB) en A. D'où (AC) est tangente à (Γ) en A.

3) a) on pose R' le rayon de S' donc $R' = 3r = 3\sqrt{14}$ et $J = h(I) \Leftrightarrow \overrightarrow{CJ} = 3\overrightarrow{CI}$. En posant $J(x, y, z)$, l'égalité

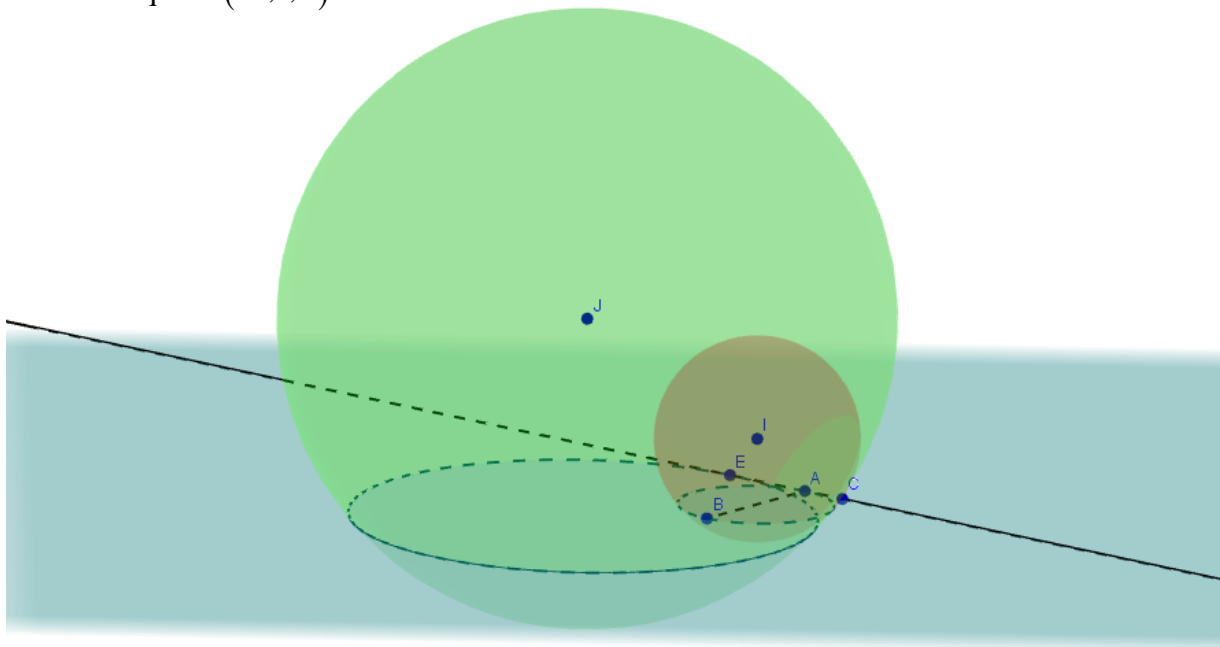
vectorielle précédente donne
$$\begin{cases} x - 2 = 3 \\ y - 4 = -12 \\ z - 1 = 0 \end{cases}$$
 il résulte que $J(5, -8, 1)$.

b) On sait que $h(S) = S'$. Or $C \in (ABC)$ donc $h((ABC)) = (ABC)$ et puisque S coupe (ABC) suivant le cercle (Γ) donc $S' = h(S)$ coupe $(ABC) = h((ABC))$ suivant le cercle $\Gamma' = h(\Gamma)$.

c) $C \in (AC)$ donc $h((AC)) = (AC)$ et puisque (AC) est tangente à S en A donc $(AC) = h((AC))$ est tangente à S' en $h(A) = E$

$h(A) = E \Leftrightarrow \overrightarrow{CE} = 3\overrightarrow{CA}$. En posant $E(x, y, z)$, l'égalité vectorielle précédente donne
$$\begin{cases} x - 2 = -1 \\ y - 4 = -1 \\ z - 1 = 1 \end{cases}$$

Il en résulte que $E(-1, 1, 4)$.



EXERCICE 4

Le plan est orienté.

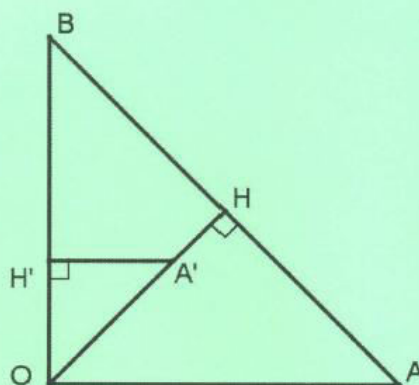
Dans la **figure 2** de l'annexe ci-jointe, le triangle OAB est rectangle isocèle en O et de sens direct.

H est le projeté orthogonal du point O sur la droite (AB), A' est le point du segment [OH] tel que $OA' = \frac{1}{2}OA$ et H' est le projeté orthogonal du point A' sur la droite (OB).

Soit f la similitude directe de centre O qui envoie A en A'.

- 1) Déterminer le rapport et l'angle de f.
- 2) On note B' l'image du point B par la similitude directe f.
 - a) Déterminer la nature du triangle OA'B'.
 - b) Construire le point B'.
 - c) Montrer que $f(H) = H'$.
- 3) Soit I le milieu du segment [A'B] et J le milieu du segment [AA'].
 - a) Montrer qu'il existe un unique déplacement R qui envoie J en O et I en H.
 - b) Montrer que R est une rotation dont on déterminera l'angle.
 - c) Soit K le milieu du segment [AB']. Montrer que $JK = OH'$ et que $(\vec{JK}, \vec{OH'}) \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi]$.
 - d) Déterminer alors R(K).
 - e) En déduire que $IK = HH'$ et que (IK) et (HH') sont perpendiculaires.
- 4) Montrer que le quadrilatère IHK H' est un carré

EXERCICE 4 figure 2



Contenu

- *Similitude directe : détermination du centre , du rapport et de l'angle d'une similitude directe, image d'un triangle par une similitude directe.*
- *Déplacement : éléments caractéristique d'une rotation.*
- *Identification d'une configuration de base (carré).*

Aptitudes visées

- *Déterminer les éléments caractéristiques d'une similitude directe.*
- *Déterminer la nature et les éléments caractéristiques d'un déplacement.*
- *Utiliser une similitude ou une isométrie pour déterminer la nature d'une configuration usuelle (triangle rectangle , carré).*

Solutions et commentaires

1) $k = \frac{OA'}{OA} = \frac{\frac{1}{2}OA}{OA} = \frac{1}{2}$ et $\theta \equiv (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'}) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$.

2) a) Le triangle OAB est rectangle isocèle en O et de sens direct or $f(O) = O$, $f(A) = A'$ et $f(B) = B'$ donc le triangle $OA'B'$ est rectangle isocèle en O et de sens direct (f est une similitude directe).

b) Le triangle $OA'B'$ est rectangle isocèle en O et de sens direct donc B' est l'image de B par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

c) Montrons que H' est le milieu de $[A'B']$. on sait que

$(\overrightarrow{OA'}, \overrightarrow{OB}) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$ et $(\overrightarrow{OA'}, \overrightarrow{OB'}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ donc $(\overrightarrow{OH'}, \overrightarrow{OB'}) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$ donc (OB) est la bissectrice de $[OA', OB']$ et puisque le triangle $OA'B'$ est rectangle isocèle en O donc (OB) est la médiatrice de $[A'B']$ par suite $(OB) \perp (A'B')$ et $(OB) \perp (A'H')$ donc les points A' , H' et B' sont alignés et $H' \in (OB)$ d'où le point H' est le milieu de $[A'B']$.

Puisque H est le milieu de $[AB]$ et $f(A) = A'$ et $f(B) = B'$ donc $f(H) = H'$.

3) a) I est le milieu de $[A'B]$ et J est le milieu de $[AA']$ donc $IJ = \frac{1}{2}AB = AH = OH \neq 0$ donc il existe un unique déplacement R qui envoie J en O et I en H.

b) $(\overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{HO}) \equiv (\overrightarrow{HA}, \overrightarrow{HO})[2\pi] = -\frac{\pi}{2}[2\pi]$ donc R est une rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

c) K est le milieu de $[AB']$ et J est le milieu de $[A'A]$ donc $KJ = \frac{1}{2}A'B' = A'H' = OH'$ de plus

$$\overrightarrow{JK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{A'B'} \text{ donc } (\overrightarrow{JK}, \overrightarrow{OH'}) \equiv (\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{OH'})[2\pi] \equiv (\overrightarrow{A'H'}, \overrightarrow{OH'})[2\pi] = -\frac{\pi}{2}[2\pi].$$

d) On pose $R(K) = K'$ on obtient alors $JK = OK'$ et $(\overrightarrow{JK}, \overrightarrow{OK'}) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$ or $JK = OH'$ et

$$\left(\overrightarrow{\text{JK}}, \overrightarrow{\text{OH}'}\right) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi] \text{ on en déduit que } \text{OK}' = \text{OH}' \text{ et } \left(\overrightarrow{\text{OH}'}, \overrightarrow{\text{OK}'}\right) \equiv \left(\overrightarrow{\text{OH}'}, \overrightarrow{\text{JK}}\right) + \left(\overrightarrow{\text{JK}}, \overrightarrow{\text{OK}'}\right)[2\pi] = 0[2\pi]$$

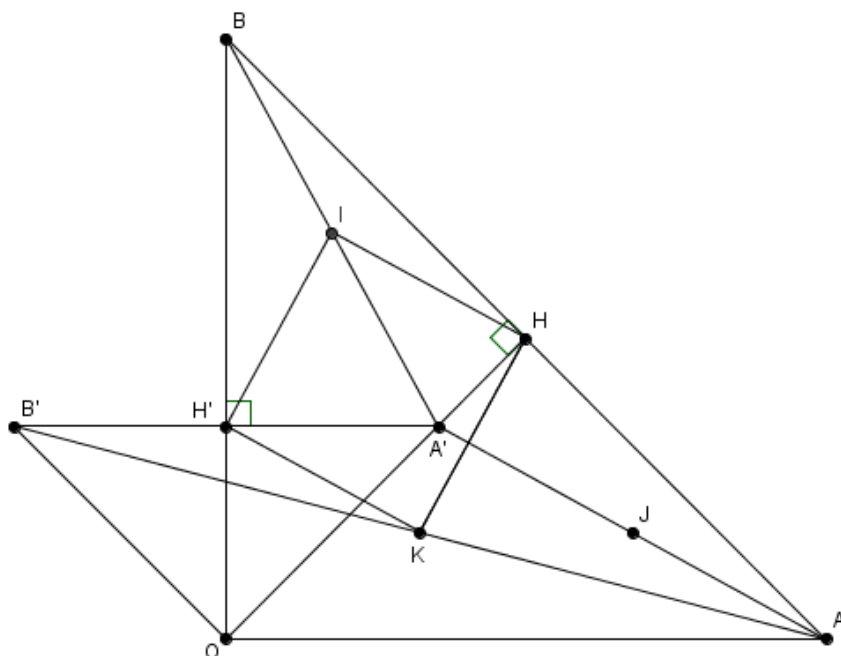
donc $K' = H'$. ainsi $R(K) = H'$.

e) $R(K) = H'$ et $R(I) = H$ donc $IK = HH'$ et $(IK) \perp (HH')$

4) I est le milieu de $[A'B]$ et H est le milieu de $[AB]$ donc $\overrightarrow{IH} = \frac{1}{2} \overrightarrow{A'A}$

H' est le milieu de [A'B'] et K est le milieu de [AB'] donc $\overrightarrow{H'K} = \frac{1}{2} \overrightarrow{A'A}$

Donc $\overrightarrow{IH} = \overrightarrow{H'K}$ par suite IHKH' est un parallélogramme (les points I, H et K ne sont pas alignés) et puisque IK=HH' et $(IK) \perp (HH')$ donc c'est un carré.



EXAMEN DU BACCALAUREAT - SESSION DE JUIN 2010

SECTION : MATHEMATIQUES

EPREUVE : MATHEMATIQUES

DUREE : 4h

COEFFICIENT : 4

Le sujet comporte 4 pages numérotées de 1/4 à 4/4

Exercice 1 (3 points)

Répondre par « Vrai » ou « Faux ». Aucune justification n'est demandée.

- 1) Le quotient de (-23) par (-5) est 4.
- 2) Si a et b sont deux entiers tels que $64a + 9b = 1$ alors les entiers b et 64 sont premiers entre eux.
- 3) $147^{146} \equiv 2 \pmod{12}$.
- 4) $x^2 \equiv 0 \pmod{8}$ équivaut à $x \equiv 0 \pmod{8}$.
- 5) Si $\begin{cases} x \equiv 3 \pmod{4} \\ x \equiv 4 \pmod{5} \end{cases}$ alors $x \equiv 19 \pmod{20}$.
- 6) Si p est un entier premier distinct de 2 alors $p^2 \equiv 1 \pmod{4}$.

Exercice 2 (4 points)

Le plan est orienté dans le sens direct.

Dans la figure (1) de l'annexe ci-jointe, $[AB]$ et $[IJ]$ sont deux diamètres perpendiculaires du cercle $(\mathcal{C})$, M est un point variable du cercle $(\mathcal{C})$ tel que $\widehat{(\overline{MA}, \overline{MB})} = \frac{\pi}{2}[2\pi]$ et $MBEN$ et $MKFA$ sont des carrés de sens direct.

- 1) Montrer que les points E , F et M sont alignés.
- 2) On désigne par r_1 et r_2 les rotations d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de centres respectifs A et B .
 - a) Montrer que $r_1 \circ r_2$ est la symétrie centrale de centre I .
 - b) Déterminer $r_1 \circ r_2 (E)$. En déduire que lorsque M varie, la droite (EF) passe par un point fixe que l'on déterminera.
- 3) Soit S la similitude directe de centre A , d'angle $\frac{\pi}{4}$ et de rapport $\sqrt{2}$.
 - a) Déterminer $S(M)$.
 - b) Construire le point G image de F par S .
 - c) Montrer que F est le milieu du segment $[KG]$.
 - d) En déduire que lorsque M varie, la droite (KF) passe par un point fixe P . Construire P .

Exercice 3 (4 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On note A le point d'affixe -2 .

On considère l'équation (E) : $3z^3 - 2z^2 + 4z + 16 = 0$.

Soit $\alpha \in \mathbb{C}^*$ et M, N et P les points d'affixes respectives α , $\frac{3}{2}\alpha^2$ et $\frac{8}{\alpha}$.

1) Montrer que si $\alpha \in \mathbb{R}^*$ alors les points M, N et P sont alignés.

Dans la suite de l'exercice on suppose que α n'appartient pas à $\mathbb{R}$.

2) Montrer que si MNAP est un parallélogramme, alors α est une solution de l'équation (E).

3) Dans cette question on prend $\alpha = 1 + i\sqrt{3}$.

a) Donner l'écriture exponentielle de chacun des nombres complexes α , $\frac{3}{2}\alpha^2$ et $\frac{8}{\alpha}$.

Placer dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$ les points A, M, N et P.

b) Donner l'écriture algébrique de chacun des nombres complexes $\frac{3}{2}\alpha^2$ et $\frac{8}{\alpha}$.

Montrer que le quadrilatère MNAP est un parallélogramme.

4) a) Montrer que si α est une solution de (E) alors $\bar{\alpha}$ est une solution de (E).

b) En déduire les affixes des points M pour lesquels MNAP est un parallélogramme.

Exercice 4 (5 points)

1) Soit la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \ln x - x \ln x + x$.

a) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$.

b) Montrer que pour tout $x > 0$, $f'(x) = \frac{1}{x} - \ln x$.

2) Dans la figure (2) de l'annexe ci-jointe, $\mathcal{C}_g$ et $\mathcal{C}_h$ sont les courbes représentatives dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ des fonctions g et h définies sur $]0, +\infty[$ par

$$g(x) = \frac{1}{x} \text{ et } h(x) = \ln x.$$

$\mathcal{C}_g$ et $\mathcal{C}_h$ se coupent en un point d'abscisse β .

a) Par une lecture graphique donner le signe de $f'(x)$.

b) En déduire le sens de variation de f.

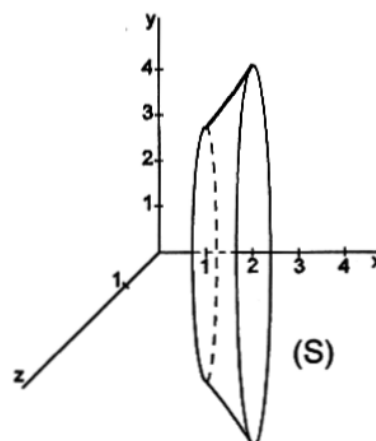
c) Montrer que $f(\beta) = \beta + \frac{1}{\beta} - 1$.

- 3) On désigne par $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
- Etudier la position relative des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_h$.
 - Montrer que la courbe $\mathcal{C}_f$ coupe l'axe des abscisses en deux points d'abscisses respectives x_1 et x_2 telles que $0,4 < x_1 < 0,5$ et $3,8 < x_2 < 3,9$.
 - Placer dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ les points $A(\beta, 0)$ et $B(0, \frac{1}{\beta})$ et en déduire une construction du point de coordonnées $(\beta, f(\beta))$.
 - Tracer $\mathcal{C}_f$.
- 4) Pour tout réel t de $]0, +\infty[\setminus \{\beta\}$, on désigne par $\mathcal{A}(t)$ l'aire de la partie du plan $S(t)$ limitée par les courbes $\mathcal{C}_g$ et $\mathcal{C}_h$ et la droite d'équation $x = t$.
- Montrer que pour tout réel $t \in]0, +\infty[\setminus \{\beta\}$, $\mathcal{A}(t) = f(\beta) - f(t)$.
 - Soit $t_0 > \beta$. Hachurer $S(t_0)$.
 - Montrer qu'il existe un réel unique t_1 dans $]0, \beta[$ tel que $\mathcal{A}(t_1) = \mathcal{A}(t_0)$.
Hachurer $S(t_1)$.

Exercice 5 (4 points)

Dans la figure ci-contre, le solide de révolution (S) est obtenu en faisant tourner la portion de la courbe d'équation $y = e^{\sqrt{x}}$, $x \in [1, 2]$ autour de l'axe (Ox) .

Le but de cet exercice est de calculer le volume $\mathcal{V}$ de ce solide.



- Soit F la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par $F(x) = \int_1^x e^{\sqrt{4t}} dt$.
Vérifier que $\mathcal{V} = \pi F(2)$.
- Soit G la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par $G(x) = \int_1^{\sqrt{4x}} te^t dt$.
 - Montrer que G est dérivable sur $[1, +\infty[$ et que $G'(x) = 2 F'(x)$.
 - En déduire que pour tout réel x de $[1, +\infty[$, $2 F(x) = G(x) - G(1)$.
- Montrer que pour tout réel x de $[1, +\infty[$, $G(x) = (\sqrt{4x} - 1)e^{\sqrt{4x}}$.
 - Calculer alors $\mathcal{V}$.

figure (1)

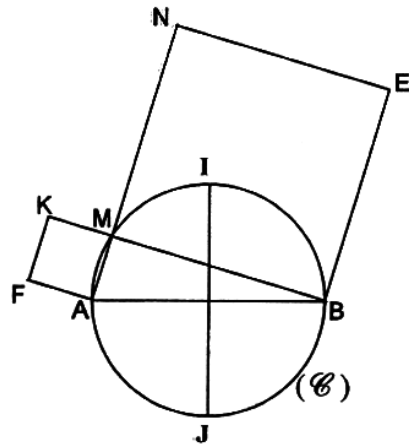
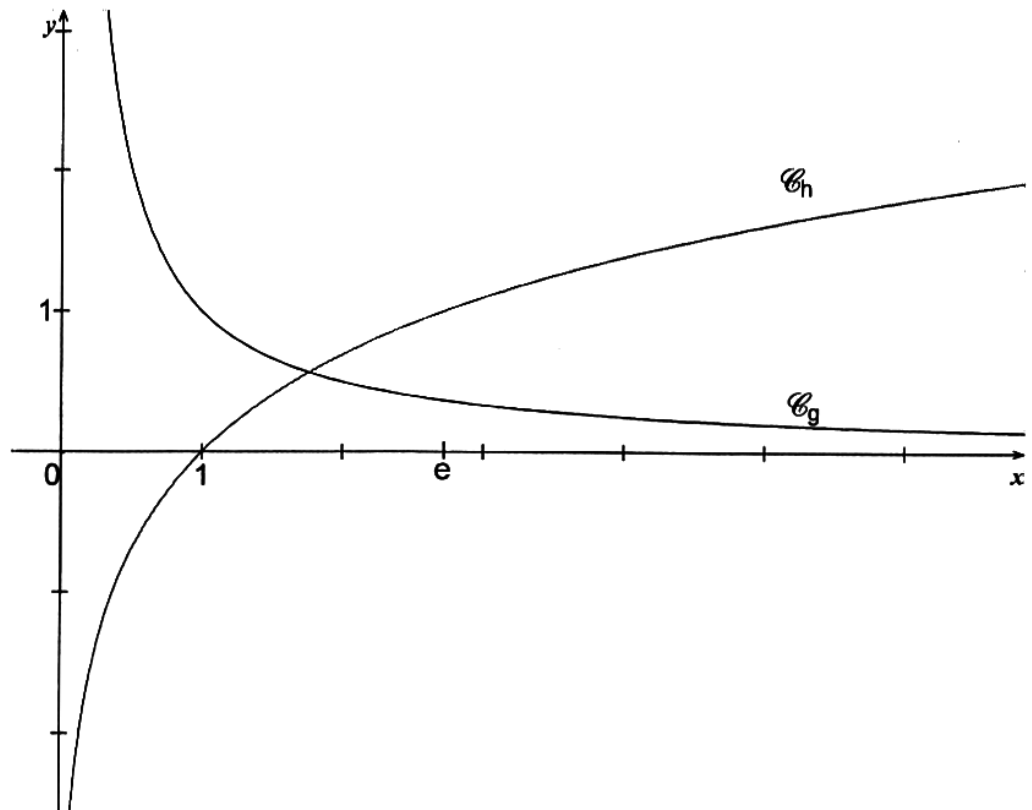


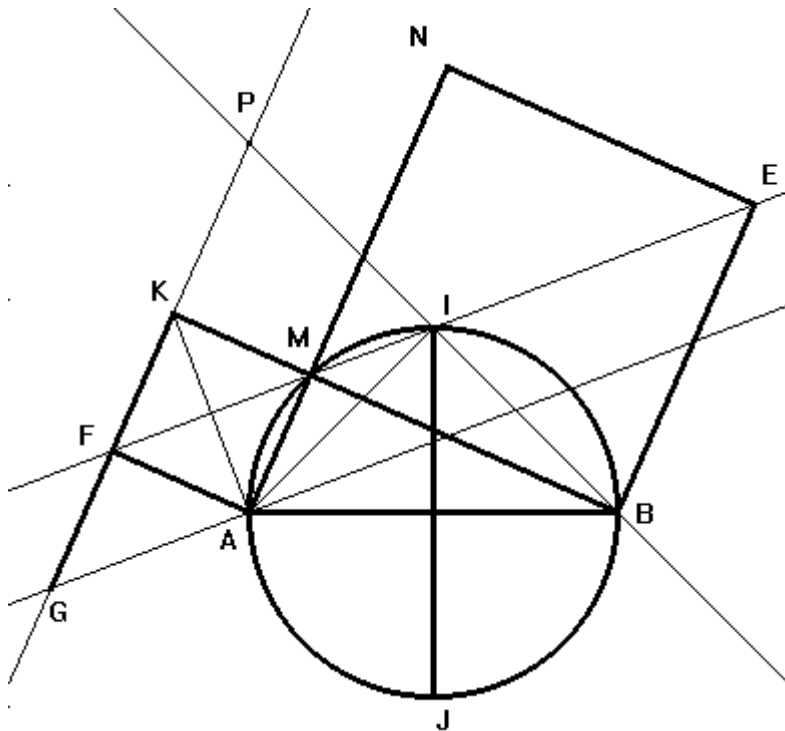
figure (2)



Exercice 1

- 1) *faux* 2) *vrai* 3) *faux* 4) *faux* 5) *vrai* 6) *vrai*

Exercice 2



1°)

$$\begin{aligned}(\overline{\text{MF}}, \overline{\text{ME}}) &\equiv (\overline{\text{MF}}, \overline{\text{MA}}) + (\overline{\text{MA}}, \overline{\text{MB}}) + (\overline{\text{MB}}, \overline{\text{ME}}) \quad [2\pi] \\ &\equiv \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \quad \pi[2\pi]\end{aligned}$$

Donc les points E , M et F sont alignés.

2°) a) r_1 ou r_2 est un déplacement d'angle $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$ donc r_1 ou r_2 est une symétrie centrale.

$r_1 \text{ or } r_2(I) = r_1(J) = I$ car $AJBI$ est un carré direct

donc r_1 or r_2 est la symétrie centrale de centre I .

b) $r_1 \text{ or } r_2(E) = r_1(M) = F$.

$r_1 \circ r_2(E) = F$ et $r_1 \circ r_2$ est la symétrie centrale de centre I , donc I est le milieu de $[EF]$

Par suite, lorsque M varie, la droite (EF) passe par le point fixe I .

3°) S est la similitude directe de centre A , d'angle $\frac{\pi}{4}$ et de rapport $\sqrt{2}$.

$$a) \text{ On a } \begin{cases} \frac{AK}{AM} = \sqrt{2} \\ \left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AK} \right) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi] \end{cases} \quad \text{donc } S(M) = K$$

b) On pose $S(F) = G$

On a AMF est un triangle rectangle isocèle de sommet principal A , donc $S(AMF) = AKG$ est un triangle rectangle isocèle de sommet principal $S(A) = A$.
D'où la construction de G

c) AKG est un triangle rectangle isocèle de sommet principal A et $\left(\overrightarrow{AK}, \overrightarrow{AF} \right) \equiv \left(\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AG} \right) (2\pi)$,
donc $[AF]$ est la bissectrice intérieure de l'angle $\left(\overrightarrow{AK}, \overrightarrow{AG} \right)$ par suite F est le milieu du segment $[KG]$

d) $S(M) = K$ et $S(F) = G$ d'où $S(MF) = (GK) = (KF)$ or (MF) passe par le point fixe I ,
donc (KF) passe par le point fixe $P = S(I)$.

$$S(I) = P \quad \text{donc} \quad \begin{cases} \frac{AP}{AI} = \sqrt{2} \\ \left(\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AP} \right) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi] \end{cases} \quad \text{d'où } AIP \text{ est un triangle rectangle isocèle de sommet}$$

principal I .

Exercice 3

1°) Si α est un réel non nul, alors les affixes des points M, N et P sont des réels, donc les points M, N et P sont sur l'axe des réels par suite ils sont alignés.

2°) $MNAP$ est un parallélogramme $\Rightarrow \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PA}$

$$\Rightarrow Z_N - Z_M = Z_A - Z_P$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2}\alpha^2 - \alpha = -2 - \frac{8}{\alpha}$$

$$\Rightarrow 3\alpha^3 - 2\alpha^2 = -4\alpha - 16$$

$$\Rightarrow 3\alpha^3 - 2\alpha^2 + 4\alpha + 16 = 0$$

Conclusion : Si $MNAP$ est un parallélogramme alors α est une solution de l'équation (E).

$$3^\circ) \alpha = 1 + \sqrt{3}$$

$$a) \alpha = 2e^{i\frac{\pi}{3}}, \quad \frac{3}{2}\alpha^2 = 6e^{i\frac{2\pi}{3}} \quad \text{et} \quad \frac{8}{\alpha} = \frac{8}{2e^{i\frac{\pi}{3}}} = 4e^{-i\frac{\pi}{3}}.$$

$$b) \frac{3}{2}\alpha^2 = 6e^{i\frac{2\pi}{3}} = 6\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -3 + 3\sqrt{3}i \quad \text{et} \quad \frac{8}{\alpha} = 4e^{-i\frac{\pi}{3}} = 4\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2 - 2\sqrt{3}i, \dots$$

$$\text{On a } \begin{cases} Z_{\overline{MN}} = -3 + 3i\sqrt{3} - 1 - i\sqrt{3} = -4 + 2i\sqrt{3} \\ Z_{\overline{PA}} = -2 - 2 + 2i\sqrt{3} = -4 + 2i\sqrt{3} \end{cases} \quad \text{donc} \quad \overline{MN} = \overline{PA}$$

Et on a $\det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AN}) \neq 0$ c'est-à-dire que les points A, M et N ne sont pas alignés

donc MNAP est un parallélogramme.

4°) a) α est une solution de (E) $\Rightarrow 3\alpha^3 - 2\alpha^2 + 4\alpha + 16 = 0$

$$\Rightarrow 3\alpha^3 - 2\alpha^2 + 4\alpha + 16 = 0$$

$$\Rightarrow 3(\overline{\alpha})^3 - 2(\overline{\alpha})^2 + 4\overline{\alpha} + 16 = 0$$

$$\Rightarrow \overline{\alpha} \text{ est une solution de (E).}$$

Donc si α est une solution de (E) alors $\overline{\alpha}$ est une solution de (E).

b) D'après a) Si MNAP est un parallélogramme alors α et $\overline{\alpha}$ sont des solutions de (E).

Pour $\alpha = 1 + i\sqrt{3}$, MNAP est un parallélogramme, donc $\alpha = 1 + i\sqrt{3}$ et $\overline{\alpha} = 1 - i\sqrt{3}$ sont des solutions de (E).

Par suite, pour tout nombre complexe z , $3z^3 - 2z^2 + 4z + 16 = 3(z - \alpha)(z - \overline{\alpha})(z - \beta)$ avec $\alpha = 1 + i\sqrt{3}$.

Par identification on obtient, $-12\beta = 16$ donc $\beta = -\frac{4}{3}$.

Les solutions de (E) sont donc $t : 1 + i\sqrt{3}, 1 - i\sqrt{3}$ et $-\frac{4}{3}$

➤ La solution $-\frac{4}{3}$ est inacceptable car α est non réel.

➤ Pour $\alpha = 1 - i\sqrt{3}$ on a $\begin{cases} z_{\overline{MN}} = -3 - 3i\sqrt{3} - 1 + i\sqrt{3} = -4 - 2i\sqrt{3} \\ z_{\overline{PA}} = -2 - 2 - 2i\sqrt{3} = -4 - 2i\sqrt{3} \end{cases}$

donc $\overline{MN} = \overline{PA}$, Par suite MNAP est un parallélogramme.

Conclusion : Les affixes des points M pour lesquelles MNAP est un parallélogramme sont $1 + i\sqrt{3}$ et $1 - i\sqrt{3}$.

Exercice 4

1°) a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x - x \ln x + x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{\ln x}{x} - \ln x + 1 \right) = -\infty$;

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln x}{x} - \ln x + 1 \right) = -\infty$$

b) f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et on a pour tout $x > 0$ $f'(x) = \frac{1}{x} - \ln x - 1 + 1 = \frac{1}{x} - \ln x$

2°) a) Pour tout $x > 0$, $f'(x) = g(x) - h(x)$.

x	0	β	$+\infty$
Position	C_g au dessus de C_h		C_g au dessous de C_h
$f'(x) = g(x) - h(x)$	+	0	-

b) f est croissante sur $]0, \beta]$ et décroissante sur $[\beta, +\infty[$

c) On a C_h et C_g se coupent en un point d'abscisse $\beta > 0$, donc $h(\beta) = g(\beta)$ d'où $\ln \beta = \frac{1}{\beta}$.

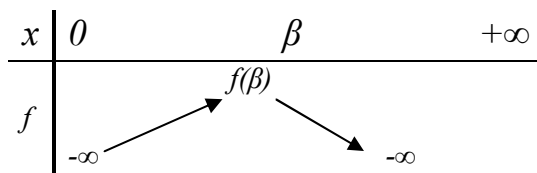
Par suite $f(\beta) = \ln \beta - \beta \ln \beta + \beta = \frac{1}{\beta} - 1 + \beta = \frac{1}{\beta} + \beta - 1$

3°) a) Pour tout $x > 0$, $f(x) - h(x) = x(1 - \ln x)$. Le signe de $f(x) - h(x)$ est celui de $1 - \ln x$.

x	0	e	$+\infty$
$f(x) - h(x)$	+	0	-
Position	C_f au dessus de C_h		C_f au dessous de C_h

Les deux courbes se coupent au point d'abscisse e .

b)



On a :

$$\rightarrow \begin{cases} f \text{ est continue et strictement croissante sur }]0, \beta] \\ f([0, \beta]) =]-\infty, f(\beta)] \end{cases}$$

0

car $f(\beta) > 0$

Donc C_f coupe $(x'x)$ en un seul point d'abscisse $x_1 \in]0, \beta]$

Et on a encore $f(0.4) \times f(0.5) = [\ln(0.4) - (0.4)\ln(0.4) + 0.4][\ln(0.5) - (0.5)\ln(0.5) + 0.5] \approx -0.02 < 0$

Donc $0.4 < x_1 < 0.5$

$$\rightarrow \begin{cases} f \text{ est continue et strictement décroissante sur } [\beta, +\infty[\\ f([\beta, +\infty[) =]-\infty, f(\beta)] \end{cases}$$

$$0 \quad \text{car } f(\beta) > 0$$

Donc $\mathcal{C}_f$ coupe (x'x) en un seul point d'abscisse $x_2 \in [\beta, +\infty[$

$$\text{Et on a encore } f(3.8) \times f(3.9) = [\ln(3.8) - (3.8)\ln(3.8) + 3.8][\ln(3.9) - (3.9)\ln(3.9) + 3.9] \\ \approx -2.9 < 0$$

$$\text{Donc } 3.8 < x_2 < 3.9$$

En conclusion : la courbe $\mathcal{C}_f$ coupe l'axe des abscisses en deux points d'abscisses respectives x_1 et x_2 telles que $0.4 < x_1 < 0.5$ et $3.8 < x_2 < 3.9$

c) Voir graphique

Soit les points $I(1,0)$, $C(0, f(\beta))$ et $D(\beta, f(\beta))$.

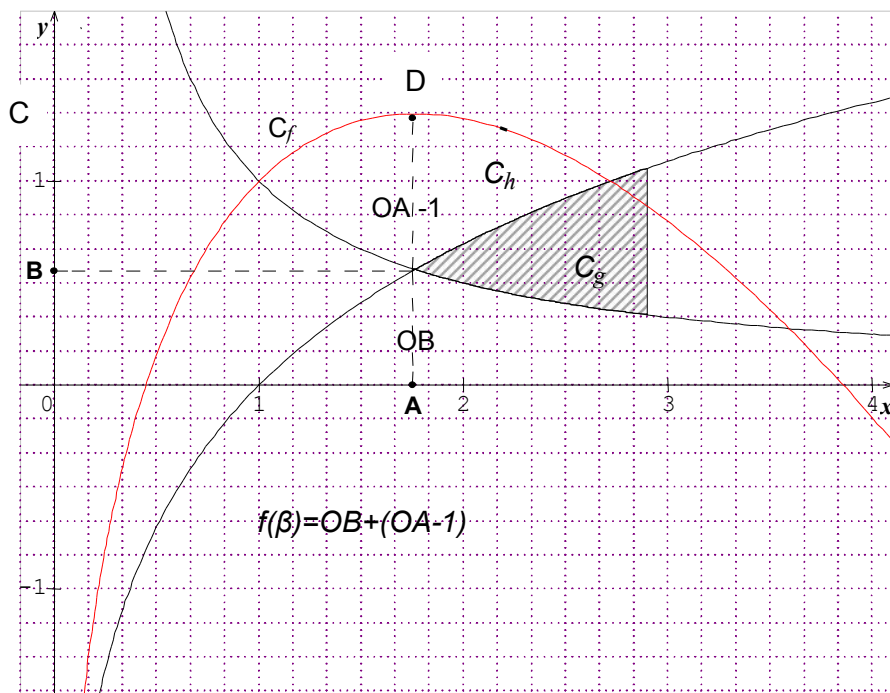
$$\text{On a } f(\beta) = \frac{1}{\beta} + \beta - 1 \text{ alors } f(\beta) - 1/\beta = \beta - 1 \text{ donc } OC - OB = OA - OI > 0 \text{ donc } BC = AI$$

alors C est le point de $[OB) \setminus [OB]$ et tel que $BC = AI$

donc le point D est le point du plan admettant les points A et C comme projetés orthogonaux sur les axes.

d) $\mathcal{C}_f$ admet :

- une tangente horizontale au point d'abscisse β .
- une branche parabolique de direction (yy') au voisinage de $+\infty$.
- l'axe des ordonnées comme asymptote.



$$4^{\circ}a) \Delta(t) = \begin{cases} \int_t^{\beta} g(x) - h(x) dx & \text{si } 0 < t < \beta \\ \int_{\beta}^t h(x) - g(x) dx & \text{si } t > \beta \end{cases} = \begin{cases} \int_t^{\beta} f'(x) dx & \text{si } 0 < t < \beta \\ \int_{\beta}^t -f'(x) dx & \text{si } t > \beta \end{cases} = f(\beta) - f(t)$$

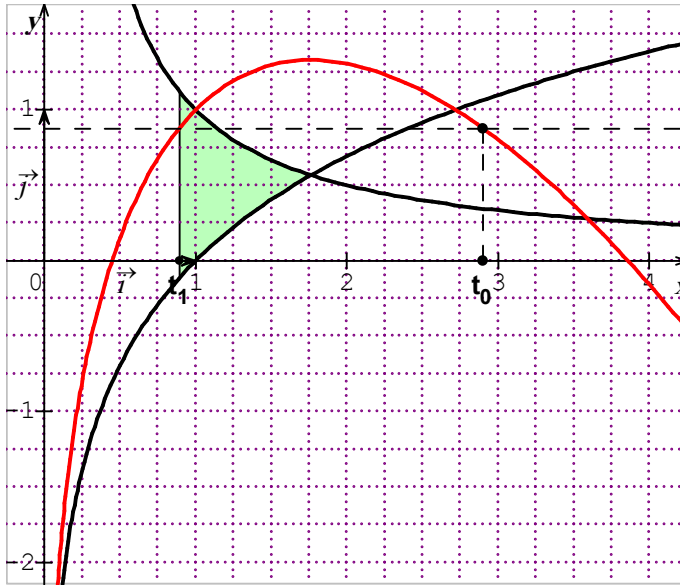
b) Voir graphique

c) $t_1 \in]0, \beta[, t_0 \in]\beta, +\infty[$

$$\Delta(t_1) = \Delta(t_0) \Leftrightarrow f(\beta) - f(t_1) = f(t_0) \\ \Leftrightarrow f(t_1) = f(t_0)$$

Or $f(t_0) \in]-\infty, f(\beta)[$ et f réalise une bijection de $]0, \beta[$ sur $]f(\beta), +\infty[$, donc

il existe un seul réel $t_1 \in]0, \beta[$ tel que $\Delta(t_1) = \Delta(t_0)$



Exercice 5

1°) La fonction $t \mapsto e^{\sqrt{t}}$ est continue et positive sur $[1, 2]$, donc

$$V = \int_1^2 \pi (e^{\sqrt{t}})^2 dt = \pi \int_1^2 e^{2\sqrt{t}} dt = \pi F(2)$$

2°) a) La fonction $t \mapsto e^{\sqrt{4t}}$ est continue sur $[0, +\infty[$ et $1 \in [0, +\infty[$ donc F est dérivable

sur $[1, +\infty[$ et on a pour tout $x \in [1, +\infty[$, $F'(x) = e^{\sqrt{4x}}$

La fonction $x \mapsto \sqrt{4x}$ est dérivable sur $[1, +\infty[$ et la fonction $t \mapsto te^t$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc la fonction G est dérivable sur $[1, +\infty[$ et on a pour tout $x \in [1, +\infty[$

$$G'(x) = (\sqrt{4x})' \cdot e^{\sqrt{4x}} = 2e^{\sqrt{4x}} = 2F'(x)$$

$$b) \text{ Pour tout } x \in [1, +\infty[, 2F(x) = 2F(x) - 2F(1) = \int_1^x 2F'(t) dt = \int_1^x G'(t) dt = G(x) - G(1).$$

$$3°) a) \text{ Soit } x \in [1, +\infty[, G(x) = \int_1^{\sqrt{4x}} te^t dt.$$

On effectue une Intégration par partie :

$$\text{On pose } \begin{cases} u(t) = t \\ u'(t) = 1 \end{cases}$$

$$v'(t) = e^t \qquad v(t) = e^t$$

$$\text{Pour tout } x \in [1, +\infty[, \quad G(x) = \int_1^{\sqrt{4x}} te^t dt = \left[te^t \right]_1^{\sqrt{4x}} - \int_1^{\sqrt{4x}} e^t dt = \sqrt{4x}e^{\sqrt{4x}} - e - e^{\sqrt{4x}} + e = (\sqrt{4x} - 1)e^{\sqrt{4x}}.$$

$$b) \quad V = \pi F(2) = \pi \frac{G(2) - G(1)}{2} = \pi \frac{(\sqrt{8} - 1)e^{\sqrt{8}} - e^2}{2}$$

EXAMEN DU BACCALAUREAT - SESSION DE JUIN 2010

SECTION : MATHÉMATIQUES
ÉPREUVE : MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4h

COEFFICIENT : 4

Le sujet comporte 4 pages numérotées de 1/4 à 4/4

Exercice 1(4 points)

Pour chacune des questions suivantes une seule des trois réponses proposées est exacte.

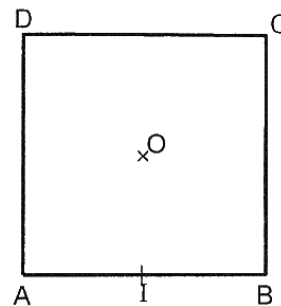
Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondante à la réponse choisie.

Aucune justification n'est demandée.

ABCD est un carré de centre O tel que

$$(\widehat{AB, AD}) = \frac{\pi}{2} [2\pi] \text{ et } I \text{ le milieu de } [AB].$$

Soit $S_{(BC)}$, $S_{(BD)}$ et $S_{(OI)}$ les symétries d'axes respectifs (BC), (BD) et (OI) et $t_{\overline{BD}}$, $t_{\overline{CD}}$ et $t_{\overline{BC}}$ les translations de vecteurs respectifs $\overline{BD}$, $\overline{CD}$ et $\overline{BC}$.



1) L'isométrie $S_{(BC)} \circ S_{(BD)} \circ t_{\overline{BD}}$ est

- a) une rotation
- b) une translation
- c) une symétrie glissante.

2) $t_{\overline{BD}} \circ S_{(BC)}$ est égale à

- a) $t_{\overline{CD}} \circ S_{(OI)}$
- b) $t_{\overline{BC}} \circ S_{(OI)}$
- c) $S_{(BC)}$.

3) Soit r_1 la rotation de centre O d'angle $(-\frac{\pi}{2})$ et r_2 la rotation de centre C d'angle $(\frac{\pi}{2})$.

$r_1 \circ r_2$ est

- a) la symétrie centrale de centre A
- b) la translation de vecteur $\overline{CB}$
- c) la translation de vecteur $\overline{AD}$.

4) Soit S la similitude directe de centre B qui transforme D en A. Alors

- a) $S(A) = O$
- b) $S(I) = O$
- c) $S(C) = O$.

Exercice 2 (6 points)

Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{(x-2)e^x}{x^3}$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a) Montrer que $f'(x) = \frac{e^x(x^2 - 4x + 6)}{x^4}$.

b) Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

c) Dresser le tableau de variation de f .

2) Montrer que la tangente Δ à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 2 a pour équation $y = \frac{e^2}{8}(x - 2)$.

3) On se propose d'étudier la position relative de $\mathcal{C}_f$ et de sa tangente Δ .

Soit g la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = \frac{e^x}{x^3}$. On donne ci-dessous le tableau de variation de g .

x	0	2	3	$+\infty$
$g(x)$	$+\infty$	$\frac{e^2}{8}$	$\frac{e^3}{27}$	$+\infty$

a) Montrer que l'équation $g(x) = \frac{e^2}{8}$ admet dans $]3, +\infty[$ une solution unique α telle que $4,2 < \alpha < 4,3$.

b) Dédire la position relative de $\mathcal{C}_f$ et Δ .

4) Justifier l'existence sur $]0, +\infty[$ d'une primitive F de f telle que $F(1) = e$.

5) Dans l'annexe ci-jointe, on a tracé la courbe représentative $\mathcal{C}_F$ de la fonction F , la droite Δ et le rectangle ABCD tel que $A(1, e)$; $B(0, e)$; $C(0, F(2))$ et $D(1, F(2))$.

a) Etudier les branches infinies de $\mathcal{C}_f$.

b) Tracer la courbe $\mathcal{C}_f$ dans l'annexe ci-jointe.

6) Soit $t \in [1, 2[$. On désigne par $S(t)$ la partie du plan limitée par la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe $(O, \vec{i})$ et les droites d'équations $x = t$ et $x = 2$. On désigne par $\mathcal{A}(t)$ l'aire de $S(t)$.

a) Exprimer $\mathcal{A}(t)$ en fonction de $F(t)$.

b) Hachurer $S(1)$ et justifier qu'elle a la même aire que le rectangle ABCD.

c) Montrer qu'il existe un unique $t_0 \in [1, 2[$ tel que $\mathcal{A}(t_0) = \frac{1}{2} \mathcal{A}(1)$.

d) Construire le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse t_0 .

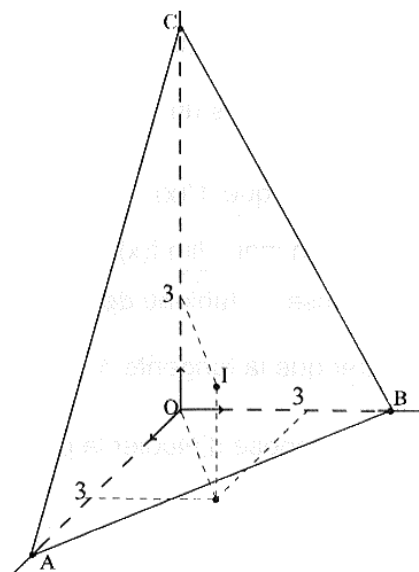
Exercice 3 (5 points)

Soit $(O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ un repère orthonormé direct de l'espace.

Dans la figure ci-contre OABC est un tétraèdre

tel que $\vec{OA} = 5\vec{u}$, $\vec{OB} = 5\vec{v}$, $\vec{OC} = 10\vec{w}$ et

I est le point de coordonnées $(3, 3, 3)$.



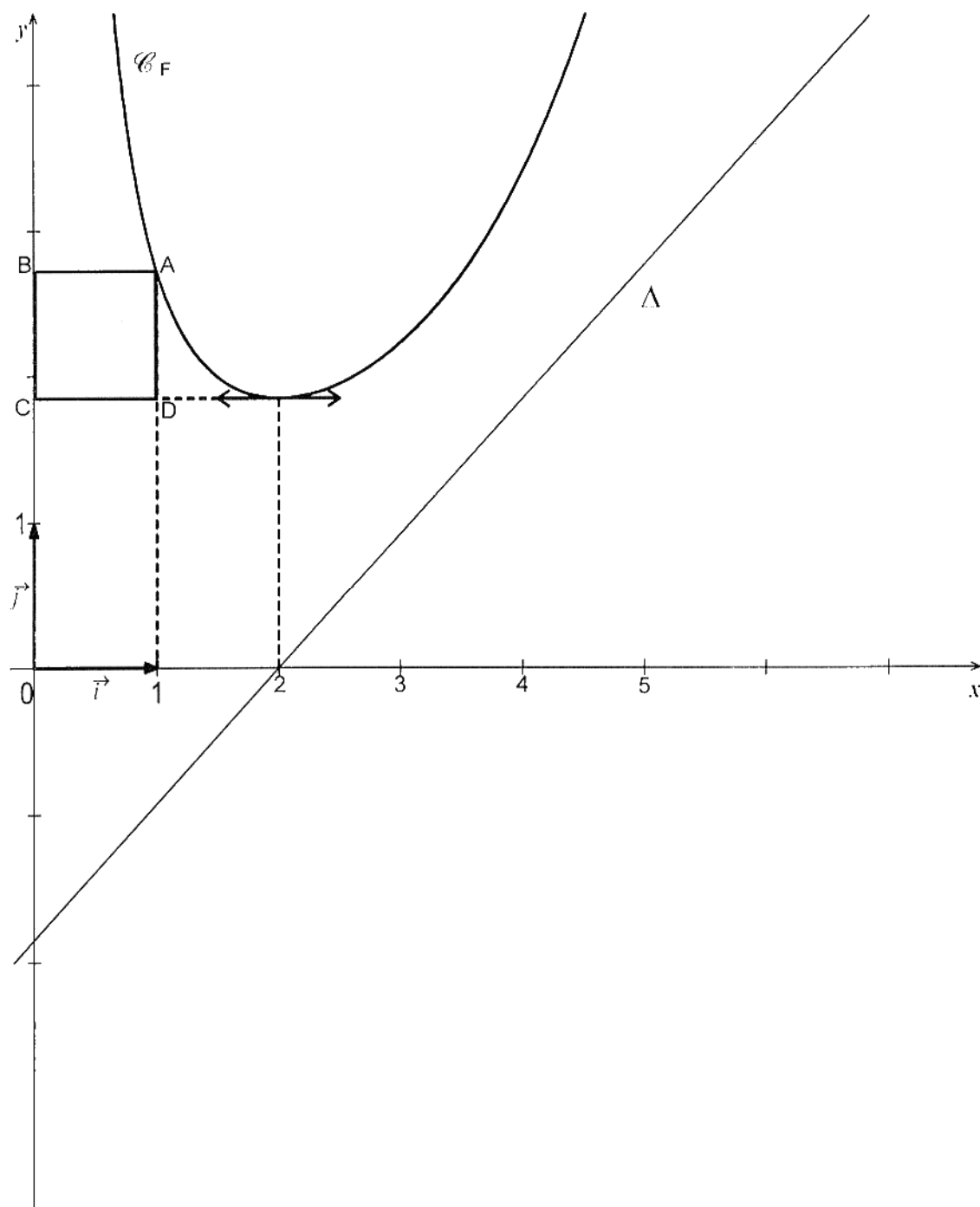
- 1) Vérifier que le plan (ABC) a pour équation $2x + 2y + z - 10 = 0$.
- 2) Soit S la sphère de centre I et de rayon 3.
 - a) Quelle est la position relative de S et du plan (ABC) ?
 - b) Montrer que S est tangente aux plans (OAB), (OAC) et (OBC).
- 3) Soit k un réel non nul et h l'homothétie de centre O et de rapport k. On désigne par S', la sphère image de S par h.
 - a) Montrer que S' est tangente aux plans (OAB), (OAC) et (OBC).
 - b) Déterminer les valeurs de k pour lesquelles S' est tangente au plan (ABC).
- 4) Déterminer le centre et le rayon de la sphère tangente intérieurement aux quatre faces du tétraèdre OABC.

Exercice 4 (5 points)

On pose $a = 7^{2009} + 7^{2010} + 7^{2011}$.

- 1) Soit n un entier naturel. Discuter suivant les valeurs de n, le reste de 7^n modulo 100.
- 2) En déduire qu'il existe un entier naturel k tel que $a = 100k - 1$.
- 3) a) En utilisant la formule du binôme, montrer que $a^{100} \equiv 1 \pmod{100^2}$.
 b) Déterminer les quatre derniers chiffres de a^{100} .

ANNEXE A RENDRE AVEC LA FEUILLE DE COPIE



REPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTRE DE L'EDUCATION ET DE LA FORMATION	SESSION PRINCIPALE	EXAMEN DU BACCALAURÉAT SESSION DE JUIN 2009
SECTION : MATHEMATIQUES		
EPREUVE : MATHEMATIQUES	DURÉE : 4 Heures	COEFFICIENT : 4

Exercice 1 (3 points)

Pour chacune des questions suivantes, une seule des trois réponses proposées est exacte.
Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.
Une réponse correcte vaut 0,75 point, une réponse fausse ou l'absence de réponse vaut 0 point.

- 1) Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère le point A d'affixe $1 + i\sqrt{3}$.

L'image du point A par la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{2}$ est le point d'affixe

a) $-\sqrt{3} + i$

b) $\sqrt{3} - i$

c) $-\sqrt{3} - i$

- 2) Si z est un nombre complexe non nul d'argument $\frac{\pi}{6}$ alors un argument de $i\bar{z}$ est

a) $-\frac{\pi}{6}$

b) $\frac{\pi}{6}$

c) $\frac{\pi}{3}$

- 3) Pour tout entier naturel n , on pose $a_n = 2^n + 3^n$.

alors $a_n \equiv 0 \pmod{5}$ pour

a) tout entier naturel n pair

b) tout entier naturel n

c) tout entier naturel n impair

- 4) Un questionnaire à choix multiples (QCM) comporte quatre questions. Pour chaque question, trois réponses sont proposées dont une seule est exacte. Un candidat répond au hasard à chacune des quatre questions de ce QCM.

La probabilité pour que ses quatre réponses soient toutes exactes est

a) $\frac{1}{3}$

b) $\frac{1}{3^4}$

c) $1 - \left(\frac{2}{3}\right)^4$

Exercice 2 (5 points)

Soit f la fonction définie sur $]0, 1[$ par $f(x) = \ln(1 - \sqrt{x})$.

On note $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a) Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = -\infty$.

b) On donne ci-dessous le tableau de variation de la fonction f .

x	0	1
$f'(x)$		-
$f(x)$	0	$-\infty$

Tracer $(\mathcal{C})$. (On précisera la demi-tangente à $(\mathcal{C})$ en O).

2) a) Montrer que f réalise une bijection de $]0, 1[$ sur $]-\infty, 0]$.

(On notera f^{-1} la fonction réciproque de f et (Γ) sa courbe représentative dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$).

b) Tracer (Γ) . (On précisera la demi-tangente à (Γ) en O).

3) a) Montrer que, pour tout $x \in]-\infty, 0]$, $f^{-1}(x) = (e^x - 1)^2$.

b) Calculer l'aire $\mathcal{A}$ de la partie du plan limitée par la courbe (Γ) et les droites d'équations $x = -\ln 2$, $x = 0$ et $y = 0$.

c) En déduire la valeur de $\int_0^1 \ln(1 - \sqrt{x}) dx$.

Exercice 3 (5 points)

Dans le plan orienté, on considère un triangle ABC isocèle et rectangle en A tel que $(\widehat{AB, AC}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$.

On désigne par I, J, K et L les milieux respectifs des segments [AB], [BC], [AC] et [JC].

1) Faire une figure.

2) Soit f la similitude directe de centre J, qui envoie A sur K.

a) Déterminer l'angle et le rapport de f .

b) Justifier que $f(K) = L$.

c) Soit H le milieu du segment [AJ]. Justifier que $f(I) = H$.

- 3) On munit le plan du repère orthonormé direct $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

Soit φ l'application du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z'

tel que $z' = -\left(\frac{1+i}{2}\right)\bar{z} + \frac{1+i}{2}$.

- Montrer que φ est une similitude indirecte de centre C.
 - Donner les affixes des points I, K, J et H.
 - Déterminer $\varphi(I)$ et $\varphi(J)$.
 - Déduire alors que $\varphi = f \circ s_{(IK)}$, (où f est la similitude définie dans 2° et $s_{(IK)}$ est la symétrie orthogonale d'axe (IK)).
- 4) Soit Δ l'axe de la similitude indirecte φ .
- Tracer Δ .
 - La droite Δ coupe les droites (IK) et (HL) respectivement en P et Q.
Montrer que $\varphi(P) = f(P)$ et en déduire que $\varphi(P) = Q$.

Exercice 4 (4 points)

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère l'ellipse ($\mathcal{E}$) d'équation $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ et on désigne par M le point de coordonnées $(\cos \theta, 2 \sin \theta)$, où θ est un réel de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

- Déterminer, par leurs coordonnées, les sommets et les foyers de ($\mathcal{E}$).
 - Tracer ($\mathcal{E}$) et placer ses foyers.
 - Vérifier que le point M appartient à ($\mathcal{E}$).
- Soit (T) la tangente à ($\mathcal{E}$) en M.
Montrer qu'une équation de (T) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est $2x \cos \theta + y \sin \theta - 2 = 0$.
- On désigne respectivement par P et Q les points d'intersection de (T) avec l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées et on désigne par $\mathcal{A}$ l'aire du triangle OPQ.
 - Montrer que $\mathcal{A} = \frac{2}{\sin(2\theta)}$.
 - En déduire que l'aire $\mathcal{A}$ est minimale si et seulement si M est le milieu du segment [PQ].

Exercice 5 (3 points)

1) Résoudre l'équation différentielle $y'' + y = 0$.

2) Soit E l'ensemble des fonctions définies et deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, f'(x) + f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 0, \text{ où } f' \text{ désigne la fonction dérivée de } f.$$

a) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \cos x$.

Vérifier que g est un élément de E .

b) Soit f un élément de E . Vérifier que, pour tout réel x , $f''(x) = f'\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.

c) En déduire que si f est un élément de E alors f est une solution de l'équation différentielle $y'' + y = 0$.

d) Déterminer alors l'ensemble E .

EXERCICE N°1

De quoi s'agit-il ?

Nombres complexes-Rotations-arithmétique-Probabilités

SOLUTION

- 1) Réponse - b - 2) Réponse - c - 3) Réponse - c - 4) Réponse - b -

EXERCICE N°2

De quoi s'agit-il ?

Fonction logarithme népérien-Fonction exponentielle-Fonction réciproque d'une fonction continue et strictement monotone-calcul intégral-Calcul d'aire

SOLUTION

1) a- En posant $t = -\sqrt{x}$ on aura $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{f(x)}{x} \right) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(\frac{\ln(1+t)}{t^2} \right) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{t} \times \frac{\ln(1+t)}{t} \right) = -\infty$.

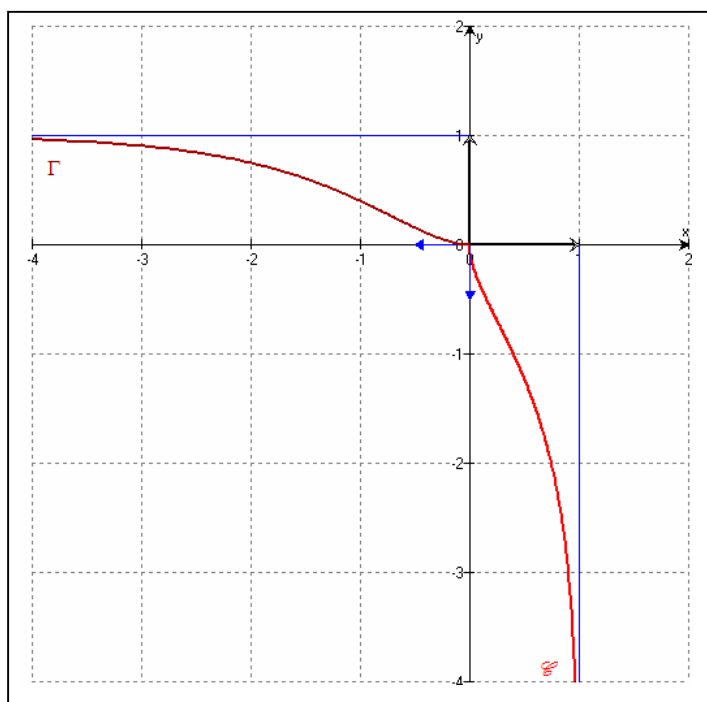
b- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{f(x)}{x} \right) = -\infty$

donc f n'est pas dérivable à droite en 0

et $(\mathcal{C})$ admet au point O une

demi-tangente verticale dirigé vers le bas.

- 2) a- f est définie et strictement décroissante sur $[0, 1[$ donc réalise une bijection de $[0, 1[$ sur $f([0, 1[)$ de plus f est continue sur $[0, 1[$ donc $f([0, 1[) =]-\infty, 0]$.



Conclusion : f réalise une bijection de $[0, 1[$ sur $f([0, 1[) =]-\infty, 0]$.

b- $(\Gamma) = S_{D, y=x}(\mathcal{C})$

$(\mathcal{C})$ admet au point O une demi-tangente verticale donc (Γ) admet en ce point

une demi-tangente horizontale.

3) a- On a : $\begin{cases} x \in]-\infty, 0] \\ f^{-1}(x) = y \end{cases}$, si et seulement si $\begin{cases} y \in [0, 1] \\ f(y) = x \end{cases}$

$$x = f(y) = \ln(1 - \sqrt{y}) \Leftrightarrow e^x = 1 - \sqrt{y} \Leftrightarrow \sqrt{y} = 1 - e^x \Leftrightarrow f^{-1}(x) = (1 - e^x)^2.$$

$$\text{b- } \mathcal{A} = \int_{-\ln 2}^0 f^{-1}(x) dx = \int_{-\ln 2}^0 (1 - 2e^x + e^{2x}) dx = \left[x - 2e^x + \frac{1}{2}e^{2x} \right]_{-\ln 2}^0 = \left(-2 + \frac{1}{2} \right) - \left(-\ln 2 - \frac{2}{e^{\ln 2}} + \frac{1}{2e^{\ln 4}} \right)$$

donc $\mathcal{A} = \ln 2 - \frac{5}{8}$ u.a

c- En utilisant la symétrie orthogonale d'axe la droite d'équation $y = x$ on aura :

$$-\int_0^1 \ln(1-\sqrt{x}) dx = \int_0^1 |f(x)| dx = \frac{1}{4} \times \ln 2 - \mathcal{A} = \frac{\ln 2}{4} - \ln 2 + \frac{5}{8} \quad (f^{-1}(0)=0 \text{ et } f^{-1}(-\ln 2)=\frac{1}{4})$$

D'où $\int_0^{\frac{1}{4}} \ln(1-\sqrt{x}) dx = \frac{3}{4} \ln 2 - \frac{5}{8}$

Autrement : $\mathcal{A} = \int_0^1 (f(x) - (-\ln 2)) dx = \ln 2 - \frac{5}{8}$ donc $\int_0^1 \ln(1 - \sqrt{x}) dx = \ln 2 - \frac{5}{8} - \frac{1}{4} \ln 2 = \frac{3}{4} \ln 2 - \frac{5}{8}$

EXERCICE N°3

De quoi s'agit-il ?

Similitude directe – Similitude indirecte-symétrie orthogonale – Composée d’une similitude directe et d’une symétrie orthogonale.

SOLUTION

1) voir figure ci-contre.

2) a- $\square \quad (\overrightarrow{JA}, \overrightarrow{JK}) \equiv -\frac{\pi}{4} \quad [2\pi]$ est une mesure de l'angle de f

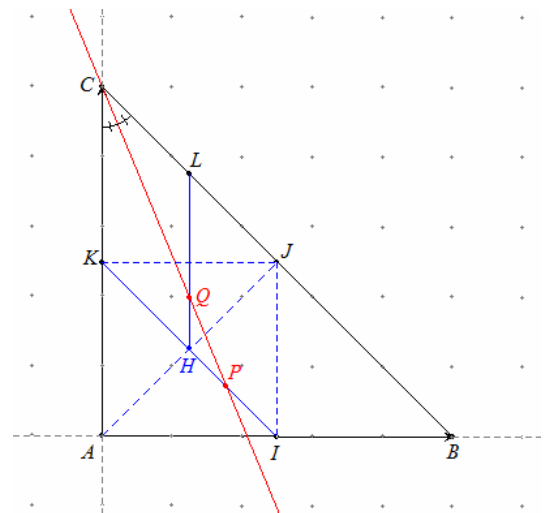
en effet :

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{JK} = \frac{1}{2} \overline{BA} = \overline{IA} \text{ car } J = B * C, K = A * C \text{ et } I = A * B \\ (\widehat{AI}, \widehat{AK}) \equiv (\widehat{AB}, \widehat{AC}) \equiv \frac{\pi}{2} \text{ } [2\pi] \\ AI = AK \text{ car } ABC \text{ est isocèle en } A, K = A * C \text{ et } I = A * B \end{array} \right.$$

donc A_{IJK} est un carré direct dont $[JA]$ est une diagonale

$$\text{ainsi } (\overrightarrow{JA}, \overrightarrow{JK}) \equiv -\frac{\pi}{4} [2\pi]$$

Autrement :



$(JK) // (AB)$ car dans le triangle ABC on a : $J = B * C$ et $K = A * C$

donc $(\widehat{JC}, \widehat{JK}) \equiv (\widehat{BC}, \widehat{BA}) [2\pi]$

or $(\widehat{BC}, \widehat{BA}) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$ car ABC est un triangle rectangle et isocèle en A de sens direct

par suite $(\widehat{JA}, \widehat{JK}) \equiv (\widehat{JA}, \widehat{JC}) + (\widehat{JC}, \widehat{JK}) [2\pi]$

$$\equiv -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} [2\pi] \quad \text{d'où} \quad (\widehat{JA}, \widehat{JK}) \equiv -\frac{\pi}{4} [2\pi]$$

$$\square \frac{JK}{JA} = \frac{\frac{1}{2}BA}{\frac{1}{2}BC} = \frac{BA}{BC} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ est le rapport de } f.$$

$$\text{b-} \begin{cases} \frac{JL}{JK} = \frac{\frac{1}{4}BC}{\frac{1}{2}BA} = \frac{BC}{2BA} = \frac{1}{2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ (\widehat{JA}, \widehat{JK}) \equiv -\frac{\pi}{4} [2\pi] \end{cases} \quad \text{d'où} \quad f(K) = L.$$

$$\text{c-} \begin{cases} (\widehat{JI}, \widehat{JH}) \equiv (\widehat{CA}, \widehat{JA}) \equiv (\widehat{AC}, \widehat{AJ}) \equiv -\frac{\pi}{4} [2\pi] \\ \frac{JH}{JI} = \frac{\frac{1}{2}JA}{\frac{1}{2}AC} = \frac{\frac{1}{2}BC}{BA} = \frac{1}{2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \quad \text{d'où} \quad f(I) = H.$$

$$3) \text{ a- } z' = -\frac{1}{2}(1+i)\bar{z} + \frac{1}{2}(1+i) \text{ est de la forme } z' = a\bar{z} + b \text{ où } |a| = \frac{\sqrt{2}}{2} \neq 0$$

donc φ est une similitude indirecte de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\text{Or } -\frac{1}{2}(1+i)\bar{z}_C + \frac{1}{2}(1+i) = \frac{i}{2}(1+i) + \frac{1}{2}(1+i) = \frac{1}{2}(i-1) + \frac{1}{2}(1+i) = i = z_C \quad \text{d'où} \quad \varphi(C) = C$$

et comme $|a| \neq 1$ donc C est l'unique point invariant par f qui n'est autre que le centre.

$$\text{b-} \square z_I = \frac{1}{2} \quad \square z_K = \frac{1}{2}i \quad \square z_J = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i \quad \square z_H = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}i$$

$$\text{c-} \square -\frac{1}{2}(1+i)\bar{z}_I + \frac{1}{2}(1+i) = -\frac{1}{4}(1+i) + \frac{1}{2}(1+i) = \frac{1}{4}(1+i) = z_H \quad \text{d'où} \quad \varphi(I) = H.$$

$$\square -\frac{1}{2}(1+i)\bar{z}_J + \frac{1}{2}(1+i) = -\frac{1}{4}(1+i)(1-i) + \frac{1}{2}(1+i) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1+i) = \frac{1}{2}i = z_K \quad \text{d'où} \quad \varphi(J) = K.$$

$$d- \begin{cases} \bullet f \circ S_{(IK)}(I) = f(I) = H \text{ donc } f \circ S_{(IK)}(I) = H \\ \bullet f \circ S_{(IK)}(J) = f(A) = K \text{ donc } f \circ S_{(IK)}(J) = K \\ \bullet f \circ S_{(IK)} \text{ est une similitude indirecte comme composée} \\ \text{d'une similitude directe et antidéplacement} \end{cases}$$

Donc $f \circ S_{(IK)}$ et φ sont deux similitudes indirectes qui coïncident en deux points distincts
par suite $\varphi = f \circ S_{(IK)}$.

4) a- La droite Δ est portée par la bissectrice intérieure de $(\overrightarrow{CJ}, \overrightarrow{CK})$ (ou $(\overrightarrow{CI}, \overrightarrow{CH})$)

b- $\square P \in (IK)$ alors $S_{(IK)}(P) = P$ par suite $\varphi(P) = f \circ S_{(IK)}(P) = f(P)$ donc $\varphi(P) = f(P)$.

$\square P \in (IK)$ alors $f(P) \in f(\langle (IK) \rangle) = (LH)$ par suite $\varphi(P) \in (LH)$

$P \in \Delta$ et Δ étant l'axe de φ alors $\varphi(P) \in \varphi(\Delta) = \Delta$

Ainsi $\varphi(P) \in \Delta \cap (LH) = \{Q\}$ par conséquent $\varphi(P) = Q$.

EXERCICE N°4

De quoi s'agit-il ?

Ellipse-équation de la tangente à une ellipse en l'un de ses points-Aire d'un triangle

SOLUTION

1) a- L'ellipse $(\mathcal{E})$ a pour équation, dans le repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$, $\frac{x^2}{1^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$

$a = 1$, $b = 2$ et comme $a < b$, l'axe focal est $(O, \vec{j})$.

Les sommets suivant l'axe focal de $(\mathcal{E})$ ont pour coordonnées $(0, -2)$ et $(0, 2)$

Les sommets suivant l'axe non focal de $(\mathcal{E})$ ont pour coordonnées $(-1, 0)$ et $(1, 0)$

Comme $c = \sqrt{b^2 - a^2} = \sqrt{3}$ donc les foyers de $(\mathcal{E})$ ont pour coordonnées $(0, -\sqrt{3})$ et $(0, \sqrt{3})$

b- voir figure ci-contre

$$c- \frac{\cos^2 x}{1^2} + \frac{4 \sin^2 x}{2^2} = \cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$

Donc $M \in (\mathcal{E})$

2) Une équation de la tangente à $(\mathcal{E})$ en un point $M(x_0, y_0)$ est :

$$T: \frac{xx_0}{1^2} + \frac{yy_0}{2^2} = 1 \text{ par suite pour } M(\cos\theta, 2\sin\theta) \text{ on aura}$$

$$T: x\cos\theta + \frac{2y\sin\theta}{4} = 1 \text{ d'où } T: 2x\cos\theta + y\sin\theta - 2 = 0.$$

3) a- Le triangle OPQ est rectangle en O

$$\text{donc l'aire } \mathcal{A} = \frac{1}{2} \times OP \times OQ$$

$$\text{Or } \begin{cases} P \in (O, \vec{i}) \\ P \in T \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} y_P = 0 \\ 2x_P \cos\theta = 2 \end{cases} \text{ d'où } P\left(\frac{1}{\cos\theta}, 0\right)$$

$$\text{de même } \begin{cases} Q \in (O, \vec{j}) \\ Q \in T \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} x_Q = 0 \\ y_Q \sin\theta = 2 \end{cases} \text{ d'où } Q\left(0, \frac{2}{\sin\theta}\right)$$

$$\text{De plus } \cos\theta > 0 \text{ et } \sin\theta > 0 \text{ pour tout } \theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$$

$$\text{Ainsi } \mathcal{A} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{\cos\theta} \times \frac{2}{\sin\theta} = \frac{2}{2\cos\theta\sin\theta} = \frac{2}{\sin(2\theta)}$$

$$\text{donc } \mathcal{A} = \frac{2}{\sin(2\theta)}.$$

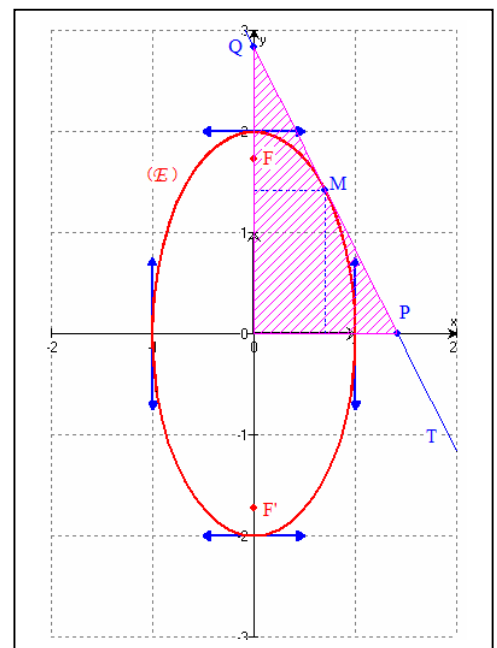
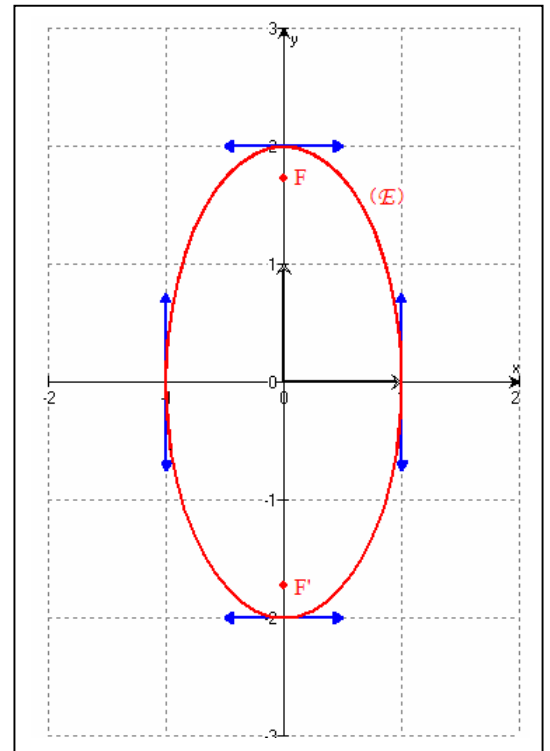
b- L'aire $\mathcal{A} = \frac{2}{\sin(2\theta)}$ est minimale si et seulement si

$$\sin 2\theta \text{ est maximum or } 0 < 2\theta < \pi \text{ donc } 0 < \sin 2\theta \leq 1$$

$$\text{d'où } \mathcal{A} \text{ est minimale si et seulement si } 2\theta = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{par suite } \theta = \frac{\pi}{4} \text{ d'où : } P(\sqrt{2}, 0), Q(0, 2\sqrt{2}) \text{ et } M\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}\right)$$

ce qui prouve que M est le milieu du segment $[PQ]$.



EXERCICE N°5

De quoi s'agit-il ?

Equations différentielles -Recherche d'un ensemble de fonctions.

SOLUTION

1) L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y'' + y = 0$ est l'ensemble des fonctions

définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = A \sin x + B \cos x$ où $(A, B) \in \mathbb{R}^2$

2) a- $g(x) = \cos x$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = -\sin x$

$$\text{donc } g'(x) + g\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\sin x + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\sin x + \sin x = 0 \quad \text{ainsi } g'(x) + g\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 0$$

par suite g est un élément de E .

b- Comme f est un élément de E donc pour tout réel x on a : $f'(x) + f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 0$

$$\text{et par suite } f''(x) - f'\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 0 \text{ d'où } f''(x) = f'\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

c- Si f est un élément de E alors pour tout réel x on a : $f'(x) = -f\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

$$\text{ce qui donne : pour tout réel } x, \quad f'\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -f\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) = -f(x).$$

$$\text{Or d'après b- si } f \text{ est un élément de } E \text{ alors pour tout réel } x, \quad f''(x) = f'\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\text{Par suite : pour tout réel } x, \quad f''(x) = -f(x) \text{ d'où } f''(x) + f(x) = 0$$

C'est-à-dire f est une solution de l'équation différentielle $y'' + y = 0$.

d- d'après c- si f est un élément de E alors f est une solution de l'équation différentielle

$$y'' + y = 0 \text{ donc } f(x) = A \sin x + B \cos x \text{ où } (A, B) \in \mathbb{R}^2.$$

$$\text{D'autre part, comme } f \text{ est un élément de } E \text{ donc pour tout réel } x \text{ on a : } f'(x) + f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 0$$

$$\text{Ce qui donne, pour tout réel } x, \quad (A \cos x - B \sin x) + \left(A \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + B \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) = 0$$

donc pour tout réel x , $A \cos x - B \sin x + A \cos x + B \sin x = 2A \cos x = 0$ ainsi $A = 0$

d'où $f(x) = B \cos x$ où $B \in \mathbb{R}$.

Conclusion : E est l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = B \cos x$ où $B \in \mathbb{R}$.

FIN.

REPUBLIQUE TUNISIENNE
MINISTRE DE L'EDUCATION
ET DE LA FORMATION

SESSION
DE
CONTROLE

EXAMEN DU BACCALAURÉAT
SESSION DE JUIN 2009

SECTION : MATHÉMATIQUES

ÉPREUVE : MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 Heures

COEFFICIENT : 4

Le sujet comporte 4 pages numérotées de 1/4 à 4/4. La page 4/4 est à rendre avec la copie.

Exercice 1 (3 points)

Pour chacune des questions suivantes, une seule des trois réponses proposées est exacte.
Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.
Une réponse correcte vaut 0,75 point, une réponse fausse ou l'absence de réponse vaut 0 point.

1) Soit z un nombre complexe de module 2.

Alors le conjugué $\bar{z}$ de z est égal à

- a) $\frac{\sqrt{2}}{z}$
- b) $\frac{2}{z}$
- c) $\frac{4}{z}$

2) Dans Le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A et B d'affixes respectives 1 et i . L'ensemble des points M d'affixe z tel que $\frac{z-i}{z-1}$ est réel est

- a) la droite (AB) privée de A
- b) le segment [AB] privé de A
- c) le cercle de diamètre [AB] privé de A

3) Soit (u_n) une suite arithmétique de raison $(- \ln 2)$. Alors la suite (v_n) définie par $v_n = e^{u_n}$ est

- a) une suite arithmétique de raison $(- 2)$
- b) une suite géométrique de raison $(- 2)$
- c) une suite géométrique de raison $(\frac{1}{2})$

4) La limite de $x \ln(1 + \frac{2}{x})$ quand x tend vers $+\infty$ est égale à

- a) 0
- b) 1
- c) 2

Exercice 2 (5 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = x + (x-1)e^{-x}$ et soit $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. (unité graphique 2 cm)

- 1) a) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$
 - b) Montrer que la droite Δ d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}$ au voisinage de $+\infty$.
 - c) Déterminer la position relative de $\mathcal{C}$ et Δ .
- 2) On donne ci-dessous le tableau de variation de la fonction f .

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	3	+
$f(x)$	-1	$+\infty$

- a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet, dans $\mathbb{R}_+$, une seule solution α et vérifier que $0 < \alpha < \frac{1}{2}$.
 - b) Tracer la droite Δ et la courbe $\mathcal{C}$.
(On précisera la demi tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0 et on prendra $\alpha \simeq 0,4$).
- 3) On désigne par (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \int_{\alpha}^1 [f(x)]^n dx$.
- a) Calculer u_1 . Interpréter graphiquement le résultat obtenu.
 - b) Montrer que pour tout entier naturel non nul n , $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}$.
 - c) En déduire la limite de la suite (u_n) .

Exercice 3 (4 points)

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies sur $\mathbb{N}$ par

$$\begin{cases} u_0 = 0 & ; & u_{n+1} = \frac{2u_n + v_n}{3} \\ v_0 = 1 & ; & v_{n+1} = \frac{3u_n + 2v_n}{5} \end{cases}$$

- 1) Montrer que pour tout entier naturel non nul n , $u_n \leq v_n$.
- 2) Montrer que la suite (u_n) est croissante et que la suite (v_n) est décroissante.
- 3) Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes et qu'elles admettent la même limite.
- 4) Soit la suite (w_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $w_n = 9u_n + 5v_n$
 - a) Montrer que (w_n) est une suite constante.
 - b) En déduire la limite commune des suites (u_n) et (v_n) .

Exercice 4 (5 points)

Dans l'annexe ci-jointe (page 4/4), ABCD est un rectangle de centre O et tel que $(\widehat{AB, AC}) \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi]$.

Le point E désigne le symétrique du point A par rapport à D.

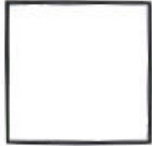
Soit S la similitude directe de centre C, de rapport $\frac{1}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

- 1) a) Justifier que $S(A) = B$
 b) Montrer que le triangle ACE est équilatéral et en déduire que $S(E) = O$.
- 2) Soit I un point du segment [EO], distinct des points O et E et soit (Γ) le cercle de centre I et passant par A.
 Les droites (AD) et (AB) recoupent le cercle (Γ) respectivement en M et P.
 a) Tracer (Γ) et placer les points M et P.
 b) Justifier que le point C appartient à (Γ) .
- 3) Soit N le projeté orthogonal du point C sur la droite (MP).
 a) Montrer que $(\widehat{MP, MC}) \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi]$.
 b) En déduire que $S(M) = N$.
- 4) Montrer que les points B, D et N sont alignés.

Exercice 5 (3 points)

On considère dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E) : $3x + 4y = -8$.

- 1) a) Vérifier que $(0, -2)$ est une solution de (E).
 b) Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E).
- 2) Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère la droite Δ dont une équation est : $3x + 4y + 8 = 0$ et on désigne par A le point de Δ d'abscisse 0.
 a) Montrer que si M est un point de Δ à coordonnées entières alors AM est un multiple de 5.
 b) Soit N un point de Δ de coordonnées (x, y) .
 Vérifier que $AN = \frac{5}{4} |x|$.
 c) En déduire que si AN est un multiple de 5 alors x et y sont des entiers.



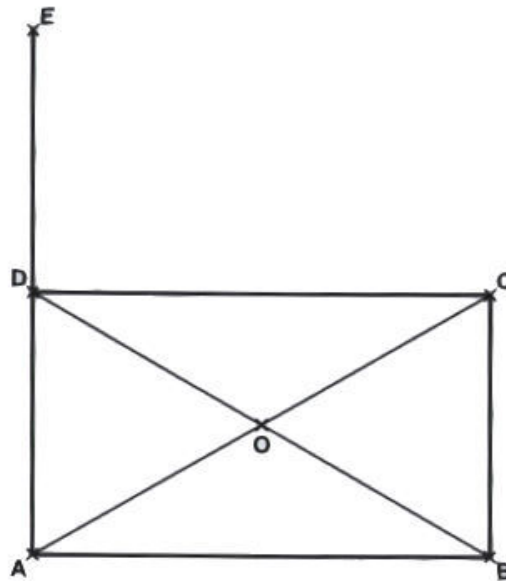
Section : N° d'inscription : Série :
Nom et prénom :
Date et lieu de naissance :

Signature des
Surveillants
.....
.....



Annexe à rendre avec la copie

Exercice 4



Exercice n°1

De quoi s'agit-il ?

Nombres complexes-suites –fonction logarithme népérien-limites

CORRIGÉ

- 1) Réponse - c - 2) Réponse - a - 3) Réponse - c - 4) Réponse - c -

Exercice n°2

De quoi s'agit-il ?

Fonction exponentielle - suites – calcul intégral.

CORRIGÉ

1) a- En posant $t = -x$ on aura $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{t \rightarrow -\infty} \left(\underbrace{-t}_{+\infty} - \underbrace{te^t}_0 - \underbrace{e^t}_0 \right) = +\infty$.

b- En posant $t = -x$ on aura $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{t \rightarrow -\infty} \left(-\underbrace{te^t}_0 - \underbrace{e^t}_0 \right) = 0$

Donc la droite Δ d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe ($\mathcal{C}$) au voisinage de $+\infty$.

c- Soit $x \in [0, +\infty[$; $f(x) - x = (x-1)e^{-x}$

☐ sur $[0, 1]$ la courbe ($\mathcal{C}$) est située au dessous de Δ .

☐ sur $[1, +\infty[$ la courbe ($\mathcal{C}$) est située au dessus de Δ .

2) a- f est définie et strictement croissante sur $[0, +\infty[$ donc elle réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur $f([0, +\infty[)$

de plus f est continue sur $[0, +\infty[$ donc $f([0, +\infty[) = [-1, +\infty[$.

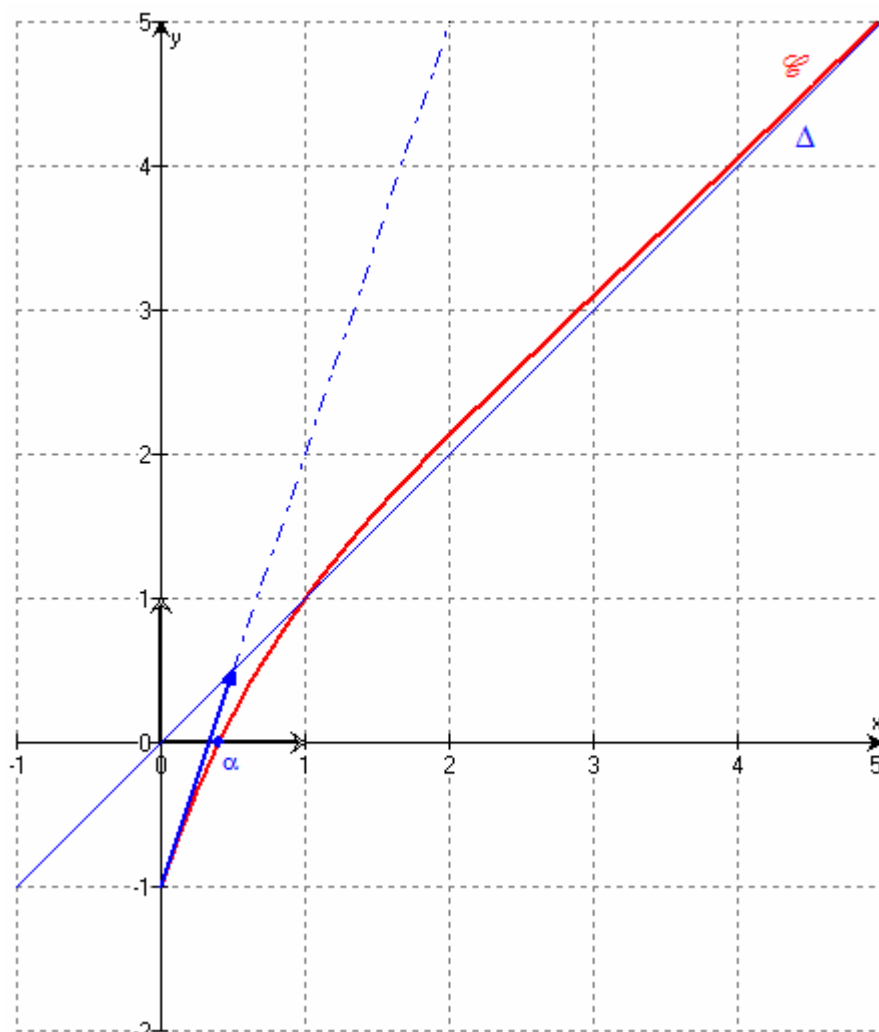
Comme $0 \in [-1, +\infty[$ donc l'équation $f(x) = 0$ admet dans $[0, +\infty[$ une solution unique α .

Puisque $f(0) = -1 < 0$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{e}}\right) > 0$ donc $0 < \alpha < \frac{1}{2}$.

Conclusion : L'équation $f(x) = 0$ admet dans $[0, +\infty[$ une solution unique $\alpha \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$.

b- D'après le tableau de variation de la fonction f on a : $f'(0) = 3$

donc la demi tangente à $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse 0 est de coefficient directeur 3.



$$3) \text{ a- } u_1 = \int_{\alpha}^1 f(x) dx = \int_{\alpha}^1 (x + (x-1)e^{-x}) dx = \int_{\alpha}^1 x dx + \int_{\alpha}^1 (x-1)e^{-x} dx$$

$$\text{Or } \int_{\alpha}^1 x dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_{\alpha}^1 = \frac{1}{2}(1 - \alpha^2)$$

$$\int_{\alpha}^1 (x-1)e^{-x} dx \quad \text{on intègre par parties on pose : } \begin{cases} u(x) = x-1 & \rightarrow & u'(x) = 1 \\ v'(x) = e^{-x} & \rightarrow & v(x) = -e^{-x} \end{cases}$$

$$\text{Par suite } \int_{\alpha}^1 (x-1)e^{-x} dx = [-(x-1)e^{-x}]_{\alpha}^1 + \int_{\alpha}^1 e^{-x} dx = [-xe^{-x}]_{\alpha}^1 = -\frac{1}{e} + \alpha e^{-\alpha}$$

$$\text{donc } u_1 = \int_{\alpha}^1 f(x) dx = \frac{1}{2}(1 - \alpha^2) - \frac{1}{e} + \alpha e^{-\alpha}.$$

Interprétation : $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in [\alpha, 1]$ donc u_1 représente l'aire, en unité d'aire, du domaine du plan limité par la courbe $(\mathcal{C})$ et les droites d'équations : $y = 0$, $x = 1$ et $x = \alpha$

b- sur $[0,1]$ la courbe $(\mathcal{C})$ est située au dessous de Δ donc pour tout réel $x \in [0,1]$, $f(x) \leq x$

de plus pour tout $x \in [\alpha, +\infty[$, $f(x) \geq 0$ et $\alpha < 1$ ainsi pour tout $x \in [\alpha, 1]$ on a : $0 \leq f(x) \leq x$

par suite $0 \leq \int_{\alpha}^1 [f(x)]^n dx \leq \int_{\alpha}^1 x^n dx$

$$\text{d'où } 0 \leq u_n \leq \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_{\alpha}^1 \quad \text{or} \quad \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_{\alpha}^1 = \frac{1}{n+1} - \frac{\alpha^{n+1}}{n+1} \leq \frac{1}{n+1} \quad \text{donc} \quad 0 \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}$$

c- Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ et $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

Exercice n°3

De quoi s'agit-il ?

Suites adjacentes

CORRIGÉ

1) Montrons, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$.

□ vérification : pour $n = 1$ l'inégalité $u_1 \leq v_1$ est vraie (car $u_1 = \frac{1}{3}$ et $v_1 = \frac{2}{5}$)

□ soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons que $u_n \leq v_n$ et montrons que $u_{n+1} \leq v_{n+1}$

$$\text{Comme } u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{2u_n + v_n}{3} - \frac{3u_n + 2v_n}{5} = \frac{u_n - v_n}{15} \leq 0 \quad \text{car } u_n - v_n \leq 0 \quad \text{donc } u_{n+1} \leq v_{n+1}$$

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \leq v_n$.

2) □ $u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n + v_n}{3} - u_n = -\frac{u_n - v_n}{3} \geq 0$ car $u_n - v_n \leq 0$ donc (u_n) est une suite croissante.

□ $v_{n+1} - v_n = \frac{3u_n + 2v_n}{5} - v_n = \frac{3(u_n - v_n)}{5} \leq 0$ car $u_n - v_n \leq 0$ donc (v_n) est une suite décroissante.

3) Première méthode

□ pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$ et (v_n) est une suite décroissante donc (v_n) est majoré par $v_0 = 1$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq 1$.

Ainsi (u_n) est une suite croissante et majoré par 1 donc converge.

□ pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \geq u_n$ et (u_n) est une suite croissante donc (u_n) est minoré par $u_0 = 0$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \geq 0$.

Ainsi (v_n) est une suite décroissante et minoré par 0 donc converge.

□ On pose $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = l$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n) = l'$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = l \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_{n+1}) = l$$

Comme $u_{n+1} = \frac{2u_n + v_n}{3}$ donc les opérations sur les limites des suites donnent $l = \frac{2l + l'}{3}$

D'où $l = l'$

Deuxième méthode

D'après ce qui précède on a : $u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{1}{15}(u_n - v_n)$

Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n - v_n = -\left(\frac{1}{15}\right)^n$

vérification : l'égalité $u_0 - v_0 = -\left(\frac{1}{15}\right)^0$ est vraie (car $u_0 = 0$, $v_0 = 1$ et $-\left(\frac{1}{15}\right)^0 = -1$)

supposons que $u_n - v_n = -\left(\frac{1}{15}\right)^n$

montrons que $u_{n+1} - v_{n+1} = -\left(\frac{1}{15}\right)^{n+1}$

$$\text{on a : } u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{1}{15} \left[-\left(\frac{1}{15}\right)^n \right] = -\left(\frac{1}{15}\right)^{n+1}$$

donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n - v_n = -\left(\frac{1}{15}\right)^n$

Vu que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[-\left(\frac{1}{15}\right)^n \right] = 0$ car $\left(\frac{1}{15}\right) \in]-1, 1[$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = 0$

Compte tenu :

□ pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$.

□ (u_n) est une suite croissante et (v_n) est une suite décroissante.

□ $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = 0$

Les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes et par suite elles convergent vers la même limite

$$4) \text{ a- pour tout } n \in \mathbb{N}, w_{n+1} = 9u_{n+1} + 5v_{n+1} = 3(2u_n + v_n) + (3u_n + 2v_n) = 9u_n + 5v_n = w_n$$

Donc (w_n) est une suite constante.

b- (w_n) est une suite constante donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = w_0 = 9u_0 + 5v_0 = 5$.

Par suite pour tout $n \in \mathbb{N}$, $9u_n + 5v_n = 5$.

Donc si L est la limite commune des suites (u_n) et (v_n) on aura $9L + 5L = 5$

Ce qui donne $L = \frac{5}{14}$ ainsi $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n) = \frac{5}{14}$.

Exercice n°4

De quoi s'agit-il ?

Similitudes-angles inscrits –symétrie orthogonale.

CORRIGÉ

$$1) \text{ a- } (\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}}) [2\pi]$$

$$\equiv \frac{\pi}{2} - (\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) [2\pi]$$

$$\equiv \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} [2\pi] \quad \text{donc } (\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$$

De plus, comme ABC est un triangle rectangle en B donc $\frac{CB}{CA} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$

$$\text{D'où } \begin{cases} \frac{CB}{CA} = \frac{1}{2} \\ (\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi] \end{cases} \quad \text{ce qui justifie que } S(A) = B$$

$$\text{b- } \square \text{ D'une part } (\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AE}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}}) [2\pi]$$

$$\equiv (\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}}) [2\pi]$$

$$\equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$$

$$\text{D'autre part } \left. \begin{array}{l} E = S_{(DC)}(A) \\ D = S_{(DC)}(D) \\ C = S_{(DC)}(C) \end{array} \right\} \quad \text{donc } (\widehat{\overrightarrow{EC}, \overrightarrow{ED}}) \equiv -(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}}) [2\pi]$$

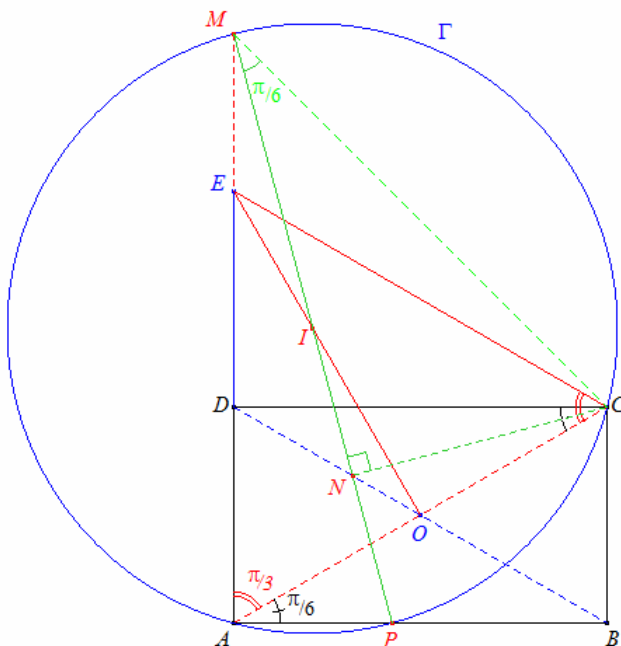
Ainsi $\left\{ \begin{array}{l} (\widehat{AC}, \widehat{AE}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi] \\ (\widehat{EC}, \widehat{EA}) \equiv (\widehat{EC}, \widehat{ED}) [2\pi] \\ \equiv -\frac{\pi}{3} [2\pi] \end{array} \right.$ ce qui prouve que le triangle ACE est équilatéral.

□ On a le triangle ACE est équilatéral et $O = A * C$ donc

$$\begin{cases} \frac{CO}{CE} = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \\ (\widehat{CE, CO}) = \frac{\pi}{3} [2\pi] \end{cases}$$

Conclusion : $S(E) = O$.

2) a-



b- ACE est un triangle équilatéral et $O = A * C$ donc la droite (OE) est la médiatrice du segment $[AC]$

et puisque $I \in [OE] \setminus \{O, E\}$ donc $IA = IC$ or (Γ) est le cercle de centre I et le rayon IA

donc $C \in (\Gamma)$.

3) a- $(\widehat{\overline{MP}, \overline{MC}})$ et $(\widehat{\overline{AP}, \overline{AC}})$ sont deux angles inscrits dans (Γ) interceptant le même arc orienté $\overline{PC}$

Donc $(\overrightarrow{MP}, \overrightarrow{MC}) \equiv (\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AC}) [2\pi]$ or $(\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi]$ donc $(\overrightarrow{MP}, \overrightarrow{MC}) \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi]$.

$$\text{b- Comme } \begin{cases} (\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MC}) \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi] \\ (\overrightarrow{NC}, \overrightarrow{NM}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases} \quad \text{donc } (\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CN}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi] \quad (\text{I})$$

de plus on a $\frac{CN}{CM} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ (II)

d'après (I) et (II) on en déduit $S(M) = N$

$$4) M \in (AD) \text{ et } E \in (AD) \text{ donc } A, E \text{ et } M \text{ sont alignés de plus } \left. \begin{array}{l} S(A) = B \\ S(E) = O \\ S(M) = N \end{array} \right\}$$

et comme toute similitude conserve l'alignement donc B, O et N sont alignés.

D'où $N \in (OB)$ et puisque $D \in (OB)$ on en déduit alors que B, D et N sont alignés.

Exercice n°5

De quoi s'agit-il ?

Résolution dans $\mathbb{Z}^2$ d'une équation du type $ax + by = c$ – détermination des points d'une droite à coordonnées entières

CORRIGÉ

1) a- $3 \times 0 + 4 \times (-2) = -8$ donc $(0, -2)$ est solution de (E).

b- Soit $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ solution de (E).

$$\text{On a : } \left. \begin{array}{l} 3x + 4y = -8 \\ 3 \times 0 + 4 \times (-2) = -8 \end{array} \right\} \text{ donc } 3x = -4 \times (y + 2)$$

$$\text{comme } \left. \begin{array}{l} 3 \nmid -4 \times (y + 2) \\ 3 \wedge (-4) = 1 \end{array} \right\} \text{ alors d'après Gauss } 3 \mid (y + 2) \text{ ainsi } y = 3k - 2 \text{ où } k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{par suite } 3x = -4 \times (3k) \text{ d'où } x = -4k \text{ ainsi } (x, y) = (-4k, 3k - 2) \text{ où } k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{réciproquement : soit } (x, y) = (-4k, 3k - 2) \text{ où } k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{on a : } 3 \times (-4k) + 4 \times (3k - 2) = -8 \text{ donc } (x, y) \text{ est solution de (E).}$$

$$\text{Conclusion : } S_{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}} = \{ (-4k, 3k - 2), k \in \mathbb{Z} \}$$

$$2) \text{ a- } \left\{ \begin{array}{l} M(x, y) \in \Delta \\ (x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \end{array} \right\} \text{ signifie } \left\{ \begin{array}{l} 3x + 4y = -8 \\ (x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \end{array} \right\} \text{ signifie } (x, y) = \{ (-4k, 3k - 2), k \in \mathbb{Z} \}$$

$$\text{Donc } AM = \sqrt{(-4k)^2 + (3k)^2} = 5 \times |k| \text{ où } k \in \mathbb{Z}$$

Par suite AM est un multiple de 5.

b- $N(x, y) \in \Delta$ signifie $3x + 4y = -8$ signifie $y = -\frac{8+3x}{4}$

Donc $AN^2 = x^2 + \left(-\frac{3x}{4}\right)^2 = \frac{25}{16}x^2$ par suite $AN = \frac{5}{4}|x|$.

c- Si AN est un multiple de 5 alors il s'écrit sous la forme $AN = 5|k|$ où $k \in \mathbb{Z}$

Donc $\frac{5}{4}|x| = 5|k|$ où $k \in \mathbb{Z}$ ainsi $|x| = 4|k|$ où $k \in \mathbb{Z}$ d'où x est un entier

Comme $y = -\frac{8+3x}{4} = -2 - \frac{3x}{4}$ donc $y = -2+3k$ où $k \in \mathbb{Z}$ d'où y est un entier

Conclusion : Si AN est un multiple de 5 alors x et y sont des entiers.

REPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTERE DE L'EDUCATION ET DE LA FORMATION EXAMEN DU BACCALAUREAT SESSION DE JUIN 2008		NOUVEAU REGIME SESSION PRINCIPALE	
SECTION :	MATHEMATIQUES		
EPREUVE :	MATHEMATIQUES	DUREE : 4 h	COEFFICIENT : 4

Le sujet comporte 3 pages numérotées de 1/3 à 3/3. La page 3/3 est à rendre avec la copie.

Exercice n°1 (3 points)

Pour chacune des questions suivantes, une seule des trois réponses proposées est exacte.
 Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.
 Aucune justification n'est demandée.
 Une réponse correcte vaut 1 point, une réponse fausse ou l'absence de réponse vaut 0 point.

- La limite de $(x+1+e^{-x})$ quand x tend vers $-\infty$ est égale à
 a) $-\infty$. b) 0. c) $+\infty$.
- Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{2x} - 1$.
 Alors f est une solution de l'équation différentielle
 a) $2y' = y + 2$. b) $y' = 2y + 2$. c) $y' = -2y - 2$.
- La durée de vie X , exprimée en années, d'une machine automatique suit une loi exponentielle de paramètre 0,4.
 La probabilité que la machine ne tombe pas en panne avant 10 ans est égale à
 a) e^{-4} . b) $1 - 0,4e^{-4}$. c) $1 - e^{-4}$.

Exercice n° 2 (5 points)

- Dans l'annexe ci-jointe (Figure 1 page 3), on a représenté dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ la courbe $(\mathcal{C})$ de la fonction f définie sur $\left[\frac{1}{e}, e\right]$ par $f(x) = \ln^3(x) - 3\ln x$ et les demi-tangentes à la courbe $(\mathcal{C})$ aux points d'abscisses respectives $\frac{1}{e}$ et e .
 a) En utilisant le graphique :
 Montrer que f réalise une bijection de $\left[\frac{1}{e}, e\right]$ sur $[-2, 2]$. (On note f^{-1} la fonction réciproque de f et $(\mathcal{C}')$ la courbe représentative de f^{-1} dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$).
 b) Tracer la courbe $(\mathcal{C}')$ et les demi-tangentes à $(\mathcal{C}')$ aux points d'abscisses respectives -2 et 2 .
- Soit la suite $(a_n)_{n \geq 1}$ définie par $a_n = \int_1^e (\ln x)^n dx$.
 a) Calculer a_1 .
 b) Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que pour tout entier $n \geq 1$: $a_{n+1} = e - (n+1) a_n$.
 c) En déduire que $a_3 = 6 - 2e$.
- Soit $\mathcal{A}$ l'aire de la partie du plan limitée par la courbe $(\mathcal{C}')$ et les droites d'équations $x = -2$ et $x = 0$.
 a) Calculer $\int_1^e f(x) dx$.
 b) En déduire $\mathcal{A}$.

Exercice n°3 (4 points)

- 1) Soit dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E) : $3x - 8y = 5$.
Montrer que les solutions de (E) sont les couples (x, y) tels que $x = 8k - 1$ et $y = 3k - 1$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
- 2) a) Soit n, x et y trois entiers tels que

$$\begin{cases} n = 3x + 2 \\ n = 8y + 7 \end{cases}$$
 Montrer que (x, y) est une solution de (E).
 b) On considère le système (S) $\begin{cases} n \equiv 2 \pmod{3} \\ n \equiv 7 \pmod{8} \end{cases}$ où n est un entier.
Montrer que n est solution du système (S) si et seulement si $n \equiv 23 \pmod{24}$.
- 3) a) Soit k un entier naturel.
Déterminer le reste de 2^{2k} modulo 3 et le reste de 7^{2k} modulo 8.
 b) Vérifier que 1991 est une solution de (S) et montrer que l'entier $(1991)^{2008} - 1$ est divisible par 24.

Exercice n°4 (4 points)

Le plan est orienté dans le sens direct.

Dans l'annexe ci-jointe (Figure 2 page 3), OAB est un triangle rectangle isocèle tel que

$$OA = OB \text{ et } (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi].$$

On désigne par I le milieu du segment [AB] et par C et D les symétriques respectifs du point I par rapport à O et à B.

Soit f la similitude directe qui envoie A sur D et O sur C.

- 1) Montrer que f est de rapport 2 et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
- 2) a) Montrer que O est l'orthocentre du triangle ACD.
 b) Soit J le projeté orthogonal du point O sur (AC).
Déterminer les images des droites (OJ) et (AJ) par f et en déduire que J est le centre de la similitude f .
- 3) Soit g la similitude indirecte de centre I, qui envoie A sur D.
 a) Vérifier que g est de rapport 2 et d'axe (IC). En déduire $g(O)$.
 b) Déterminer les images de C et D par gof^{-1} . En déduire la nature de gof^{-1} .
- 4) Soit $I' = f(I)$ et $J' = g(J)$
 a) Déterminer les images des points J et I' par gof^{-1} .
 b) Montrer que les droites (IJ), (I'J') et (CD) sont concourantes.

Exercice n°5 (4 points)

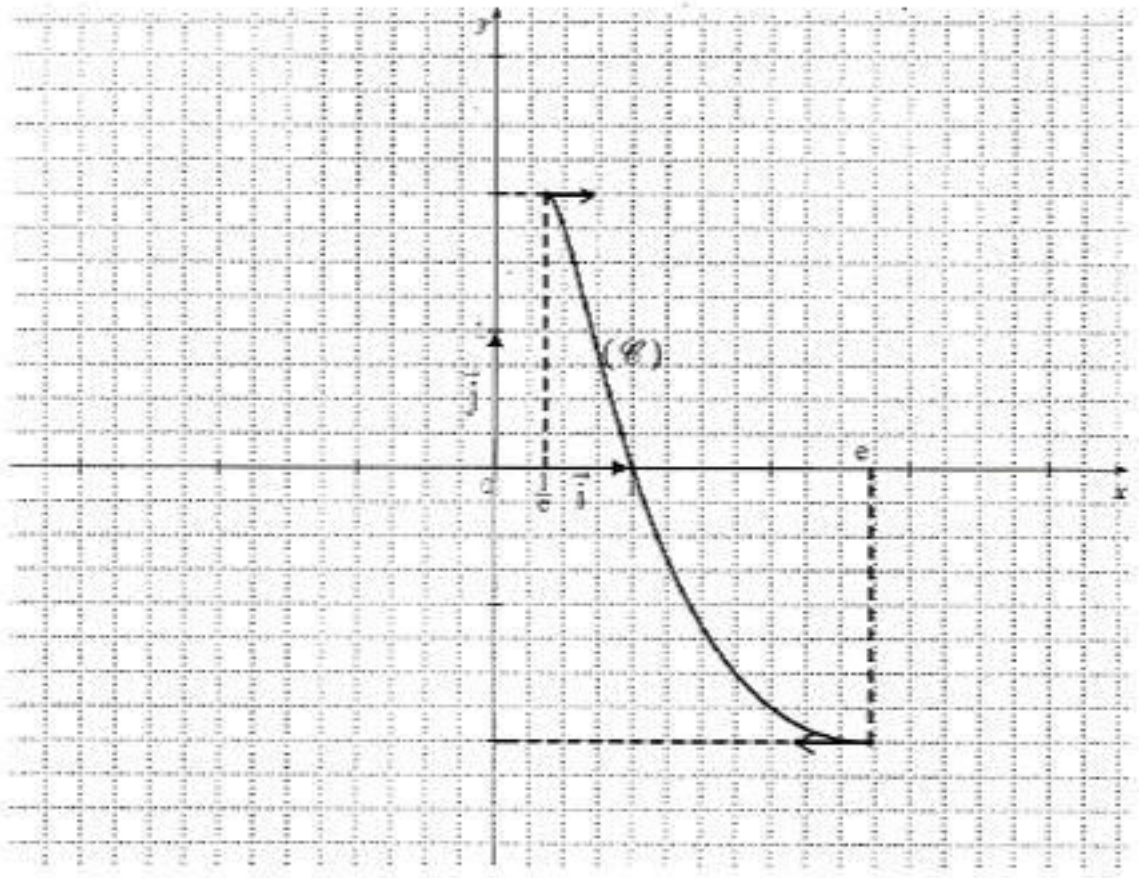
L'espace $\mathcal{E}$ est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère le tétraèdre ABCE tel que $A(1, 0, 2)$, $B(0, 0, 1)$, $C(0, -1, 3)$ et $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.

- 1) a) Vérifier que E a pour coordonnées $(0, 2, 3)$.
 b) Calculer le volume du tétraèdre ABCE.
- 2) a) Soit $\mathcal{P}$ le plan d'équation : $x - 2y - z + 5 = 0$. Montrer que $\mathcal{P}$ est parallèle au plan (ABC).
 b) Soit K le point défini par $2\overrightarrow{KE} + \overrightarrow{KC} = \vec{0}$. Calculer les coordonnées du point K et vérifier que K appartient au plan $\mathcal{P}$.
- 3) Soit h l'homothétie de centre E qui transforme le point C en K.
 a) Déterminer le rapport de h .
 b) Le plan $\mathcal{P}$ coupe les arêtes [EA] et [EB] respectivement en I et J.
Calculer le volume du tétraèdre EIJK.

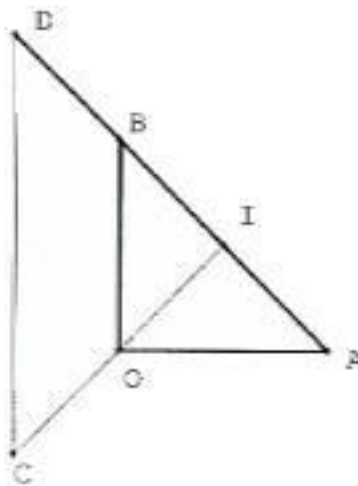
Exercise 2

Figure 1



Exercise 4

Figure 2



Session PRINCIPALE 2008

Section : Math

Epreuve : Mathématiques

Durée : 4 heures

Coefficient : 4

Exercice n°1

A-CONTENU

Limites-Equations différentielles-Probabilité

B-REPONSES

1) Réponse - c -

2) Réponse - b -

3) Réponse - a -

Exercice n°2

A-CONTENU

-fonction logarithme népérien-Fonction réciproque d'une fonction continue et strictement monotone-

Exploitation d'un graphique-Traçage d'une courbe à partir d'une autre- Calcul intégral-Calcul d'aire

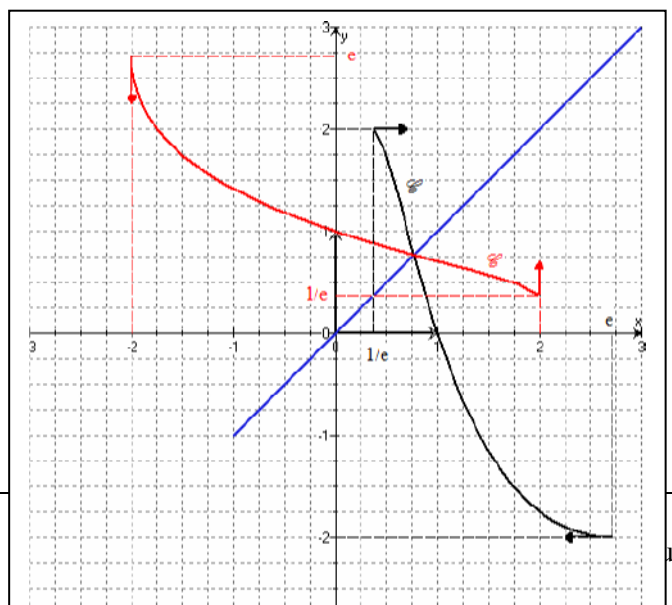
B-SOLUTION

- 1) a- D'après la courbe la fonction f est continue
strictement décroissante sur $[e^{-1}, e]$ donc réalise
une bijection de $[e^{-1}, e]$ sur $f([e^{-1}, e]) = [-2, 2]$.

b- Voir courbe ci-jointe.

2) a- $a_1 = \int_1^e \ln x \cdot dx = [x \ln x - x]_1^e = 1$.

b- $a_{n+1} = \int_1^e (\ln x)^{n+1} dx$. On intègre par parties,



on pose :
$$\begin{cases} u(x) = (\ln x)^{n+1} \rightarrow u'(x) = \frac{n+1}{x} (\ln x)^n \\ v'(x) = 1 \rightarrow v(x) = x \end{cases}$$

Donc : $a_{n+1} = \left[x (\ln x)^{n+1} \right]_1^e - (n+1) \int_1^e (\ln x)^n dx$

Ainsi : $a_{n+1} = e - (n+1)a_n$.

c- Comme $a_2 = e - 2a_1 = e - 2$ donc $a_3 = e - 3a_2 = e - 3e + 6$ ainsi $a_3 = 6 - 2e$.

3) a- $\int_1^e f(x).dx = \int_1^e ((\ln x)^3 - 3 \ln x) dx = \int_1^e (\ln x)^3 dx - 3 \int_1^e \ln x dx = a_3 - 3a_1$ donc

$$\int_1^e f(x).dx = 6 - 2e - 3 = 3 - 2e.$$

b- l'aire demandée est égale à la différence entre l'aire du rectangle de dimensions e et 2 et le réel $(\int_1^e -f(x) dx)$

Ainsi $\mathcal{A} = 2e + \int_1^e f(x) dx = 2e + (3 - 2e) = 3$ ua

Exercice n°3

A-CONTENU

Congruence – Divisibilité – Résolution, dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, d'une équation du type $ax + by = c$

B-SOLUTION

1) $(-1, -1)$ est une solution particulière de (E) : $3x - 8y = 5$.

Donc $3(x+1) = 8(y+1)$ or : $\begin{cases} 3 \wedge 8 = 1 \\ 8/3(x+1) \end{cases}$ donc d'après le lemme de Gauss $8/(x+1)$ par suite

Il existe un entier k tel que $x = 8k - 1$ ($k \in \mathbb{Z}$). Remplaçons x par sa valeur on obtient

$8(y+1) = 3 - 8k$ ($k \in \mathbb{Z}$) par suite $y = 3k - 1$ ($k \in \mathbb{Z}$).

Pour la réciproque, il suffit de vérifier que tout entier k le couple $(8k - 1, 3k - 1)$ est solution de l'équation (E) . D'où

$$S_{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}} = \{(8k - 1, 3k - 1) ; k \in \mathbb{Z}\}.$$

2) a- On a : $\begin{cases} 3x = n - 2 \\ 8y = n - 7 \end{cases}$ donc $3x - 8y = (n - 2) - (n - 7) = 5$ d'où (x, y) est solution de (E)

b- si n est solution (S) alors $\begin{cases} n = 3x + 2 & (x \in \mathbb{Z}) \\ n = 8y + 7 & (y \in \mathbb{Z}) \end{cases}$ donc (x, y) est solution de (E) d'où

$$\begin{cases} x = 8k - 1 \\ y = 3k - 1 \end{cases} (k \in \mathbb{Z}) \text{ et par suite } n = 3(8k - 1) + 2 = 24k - 1 \text{ ainsi } n \equiv -1 \pmod{24} \text{ donc}$$

$$n \equiv 23 \pmod{24}.$$

Réciproquement, soit n un entier vérifiant $n \equiv 23 \pmod{24}$ donc $n = 24K + 23$ ($K \in \mathbb{Z}$) d'où

Epreuve : Mathématiques

- b- • $g \circ f^{-1}(C) = g(O) = C$ par suite $g \circ f^{-1}(C) = C$.
- $g \circ f^{-1}(D) = g(A) = D$ par suite $g \circ f^{-1}(D) = D$.
- $g \circ f^{-1}$ est la composée d'une similitude indirecte g de rapport 2 et d'une similitude directe f^{-1} de rapport $\frac{1}{2}$ donc $g \circ f^{-1}$ est une similitude indirecte de rapport $2 \cdot \frac{1}{2} = 1$ donc c'est un antidéplacement. Comme $g \circ f^{-1}$ fixe les points C et D on a alors $g \circ f^{-1} = S_{(CD)}$.
- 4) a- • $g \circ f^{-1}(J) = g(J) = J'$ par suite $g \circ f^{-1}(J) = J'$.
- $g \circ f^{-1}(I') = g(I) = I$ par suite $g \circ f^{-1}(I') = I$.
- b- Comme $g \circ f^{-1}(J) = J'$ et $g \circ f^{-1}(I') = I$ donc $S_{(CD)}(J) = J'$ et $S_{(CD)}(I) = I'$ d'où
- $$S_{(CD)}((IJ)) = (I'J')$$

Montrons que les droites (IJ) et (CD) sont sécantes.

Supposons qu'elles sont parallèles. On a : $S_{(CD)}(J) = J'$ donc $(CD) \perp (JJ')$ ce qui donne $(JI) \perp (JJ')$

D'autre part, $f(I) = I'$ donc $(JI) \perp (JI')$ car f est de centre J et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Ainsi, $(JI') \perp (JJ')$

par suite les points J, J' et I' sont alignés ce qui est absurde.

les droites (IJ) et (CD) sont sécantes et $S_{(CD)}((IJ)) = (I'J')$ Donc les droites $(IJ), (I'J')$ et (CD) sont concourantes

Exercice n°5

A-CONTENU

Produit vectoriel - Homothétie - Image d'un plan par une homothétie - Plans parallèles - Image d'un tétraèdre par une homothétie - Calcul de volumes.

B-SOLUTION

1) a- Comme $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AE} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ainsi $\begin{cases} x_E = -1 + 1 = 0 \\ y_E = 2 + 0 = 2 \\ z_E = 1 + 2 = 3 \end{cases}$ d'où $E(0, 2, 3)$

b- $\mathcal{V}_{ABCE} = \frac{1}{6} |(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AE}| = \frac{1}{6} |\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AE}| = \frac{1}{6} AE^2 = 1$ uv.

2) a- $\overrightarrow{AE} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et à $\overrightarrow{AC}$ donc il est normal au plan (ABC) et

$\overrightarrow{N_{\mathcal{P}}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}$ et colinéaire à $\overrightarrow{AE}$ donc $\mathcal{P}$ est parallèle au plan (ABC) .

b- • à partir de la relation $2\overrightarrow{KE} + \overrightarrow{KC} = \vec{0}$ on obtient $K(0, 1, 3)$

• les coordonnées du point K vérifient : $0 - 2 - 3 + 5 = 0$ donc $K \in \mathcal{P}$.

3) a- On sait que $2\overrightarrow{KE} + \overrightarrow{KC} = \vec{0}$ donc $2\overrightarrow{KE} + \overrightarrow{KE} + \overrightarrow{EC} = \vec{0}$ d'où $\overrightarrow{EK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{EC}$ ainsi h est de rapport $\frac{1}{3}$.

b- On sait que $\mathcal{V}_{EJK} = \frac{1}{6} |(\overrightarrow{IJ} \wedge \overrightarrow{IK}) \cdot \overrightarrow{IE}|$ or on a :

$h((ABC))$ est un plan parallèle à (ABC) passant par $h(C) = K$ donc $h((ABC)) = \mathcal{S}$.

Par suite comme A est un point de (ABC) donc $h(A)$ est un point de $\mathcal{S}$ vérifiant A , $h(A)$ et E alignés. Donc $h(A) = I$.

De même comme B est un point de (ABC) donc $h(B)$ est un point de $\mathcal{S}$ vérifiant B , $h(B)$ et E alignés. Donc $h(B) = J$ de plus, vu que $h(C) = K$ et $h(E) = E$ on aura

$$\mathcal{V}_{EJK} = \frac{1}{6} |(\overrightarrow{IJ} \wedge \overrightarrow{IK}) \cdot \overrightarrow{IE}| = \frac{1}{6} \left| \left(\frac{1}{3} \overrightarrow{AB} \wedge \frac{1}{3} \overrightarrow{AC} \right) \cdot \frac{1}{3} \overrightarrow{AE} \right| = \frac{1}{27} \left(\frac{1}{6} |(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AE}| \right) = \frac{1}{27} \mathcal{V}_{ABCE} = \frac{1}{27}.$$

Donc le volume du tétraèdre EJK est $\mathcal{V}_{EJK} = \frac{1}{27}$.

FIN.

REPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTRE DE L'EDUCATION ET DE LA FORMATION EXAMEN DU BACCALAUREAT SESSION DE JUIN 2008		NOUVEAU REGIME	
SECTION : MATHEMATIQUES		SESSION DE CONTROLE	
EPREUVE :	MATHEMATIQUES	DUREE : 4 h	COEFFICIENT : 4

Le sujet comporte 4 pages numérotées de 1/4 à 4/4. La page 4/4 est à rendre avec la copie.

Exercice n°1 : (3 points)

Pour chacune des questions suivantes, une seule des trois réponses proposées est exacte.

Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.

Aucune justification n'est demandée.

Une réponse correcte vaut 1 point, une réponse fausse ou l'absence de réponse vaut 0 point.

1) Soit $I = \int_1^e \frac{(\ln x)^3}{x} dx$.

Alors I est égale à

- a) 3 . b) $\frac{1}{4}$. c) $-\frac{1}{4}$.

2) Soit $\ell = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left[\ln(1-x) + \frac{1}{1-x} \right]$, alors

- a) $\ell = 1$. b) $\ell = 0$. c) $\ell = +\infty$.

3) Soit n un entier non nul tel que $(5n) \wedge (3^2 \times 5^3 \times 7) = 35$.

Alors

- a) $n \equiv 0 \pmod{3}$. b) $n \equiv 0 \pmod{5}$. c) $n \equiv 0 \pmod{7}$.

Exercice 2 : (4 points)

Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, on considère l'équation

$$(E) : z^3 + (5+i)z^2 + (10+2i)z + 8 = 0.$$

- a) Montrer que l'équation (E) admet une solution réelle que l'on déterminera.

b) Résoudre l'équation (E).
- Dans le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère l'application f qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = (1+i)z$.

 - Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f.
 - Soit M un point du plan distinct de O et soit M' son image par f.
Montrer que le triangle OMM' est rectangle isocèle et en déduire un procédé de construction du point M'.
- On considère les points A_n définis par :

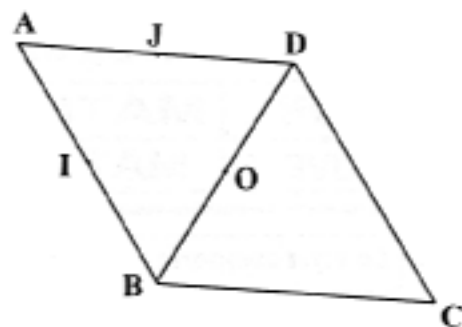
A_0 le point d'affixe $(-1+i)$ et pour tout entier naturel n, $A_{n+1} = f(A_n)$.

 - Placer les points A_0, A_1, A_2, A_3 et A_4 .
 - Pour quelles valeurs de n, les points O, A_0 et A_n sont-ils alignés ?

Exercice 3 : (4 points)

Le plan est orienté dans le sens direct. Dans la figure ci-contre, ABCD est un losange de centre O, I est le milieu du segment [AB], J est le milieu du segment [AD]

et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$.



- 1) a) Montrer qu'il existe un unique antidéplacement f qui transforme A en B et B en D.
b) caractériser f .
- c) Déterminer l'image du triangle ABD par f .
- 2) Soit s un antidéplacement qui transforme l'ensemble $\{A, B, D\}$ en l'ensemble $\{B, C, D\}$ et tel que $s(A) = C$.
a) Déterminer l'image du segment [BD] par s .
b) En déduire que s est la symétrie orthogonale d'axe (BD).
- 3) Soit g un antidéplacement qui transforme l'ensemble $\{A, B, D\}$ en l'ensemble $\{B, C, D\}$ et tel que $g(A) = D$.
a) Montrer que $g(D) = B$.
b) Caractériser alors g .

Exercice 4 : (5 points)

- 1) Soit f la fonction définie sur $[-2, 2]$ par
$$\begin{cases} f(x) = (x+2)\ln(x+2) & \text{si } x \neq -2 \\ f(-2) = 0. \end{cases}$$

et $(\mathcal{C})$ sa représentation graphique dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- a) Montrer que f est continue à droite en (-2) .
- b) Etudier la dérivabilité de f à droite en (-2) .
- c) Donner le tableau de variation de f .
- 2) Soit g la fonction définie sur $[-2, 2]$ par $g(x) = f(x) - x\sqrt{4-x^2}$
et $(\mathcal{C}')$ sa courbe représentative dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
a) Déterminer la position relative des courbes $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$.
b) Dans l'annexe ci-jointe (page 4), on a tracé la courbe $(\mathcal{C}')$ de g .
Tracer la courbe $(\mathcal{C})$ dans le même repère.
- 3) Soit α un réel non nul appartenant à $[-2, 2]$.
On désigne par $\mathcal{A}_\alpha$ l'aire de la partie du plan limitée par les courbes $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$ et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = \alpha$.
a) Montrer que $\mathcal{A}_\alpha = \int_0^\alpha x\sqrt{4-x^2} dx$. (On distinguera les deux cas $\alpha > 0$ et $\alpha < 0$).
b) Calculer $\mathcal{A}_\alpha$.
c) Calculer l'aire de la partie du plan limitée par les deux courbes $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$.

Exercice 5 : (4 points)

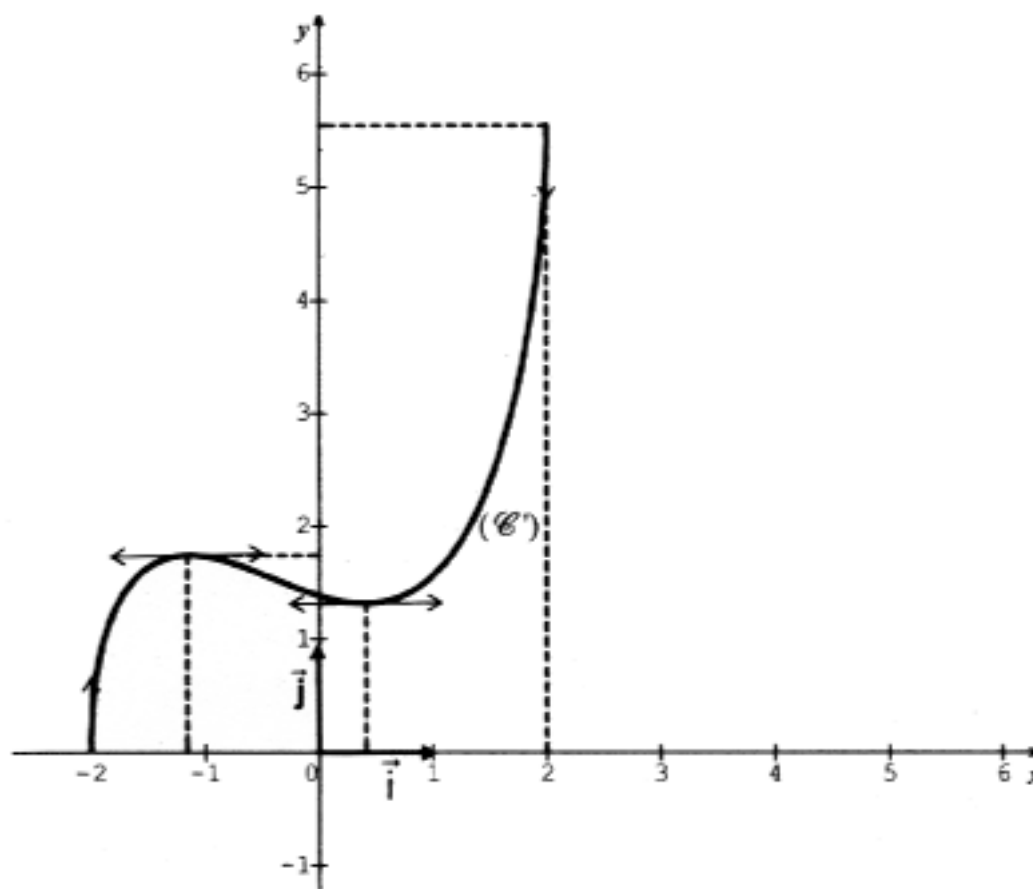
Pour tout entier naturel non nul n , on considère la fonction f_n définie sur $[0,1]$ par $f_n(x) = e^{-x} - x^{2n+1}$

- 1) Etudier les variations de f_n .
- 2) Montrer que pour tout entier naturel non nul n , l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution u_n et que $u_n \in]0,1[$.

On définit ainsi sur $\mathbb{N}^*$, une suite (u_n) .

- 3) a) Soit n un entier naturel non nul et x un réel de l'intervalle $]0,1[$. Comparer les réels $f_{n+1}(x)$ et $f_n(x)$.
b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(u_{n+1}) < 0$.
c) Montrer que la suite (u_n) est croissante et en déduire qu'elle est convergente.
- 4) a) Montrer que pour $n \geq 1$, $\ln(u_n) = -\frac{u_n}{2n+1}$.
b) Calculer la limite de la suite u_n .

Exercise 4



Session de CONTROLE 2008

Section : Math

Epreuve : Mathématiques

Durée : 4 heures

Coefficient : 4

Exercice n°1

A-CONTENU

Calcul intégral-limites –Congruences

B-REPONSES

1) Réponse - b -

2) Réponse - c -

3) Réponse - c -

Exercice n°2

A-Contenu

-Résolution dans $\mathbb{C}$ d'une équation du troisième degré admettant une racine réelle .

-Similitude directe.

B- SOLUTION

$$(E) : z^3 + (5+i)z^2 + (10+2i)z + 8 = 0$$

1) a- Soit $z_0 = x$ ($x \in \mathbb{R}$) une solution réelle de (E) . Alors :

$$x^3 + (5+i)x^2 + (10+2i)x + 8 = 0 \text{ donc } (x^3 + 5x^2 + 10x + 8) + i(x^2 + 2x) = 0 \text{ par suite}$$

$$\begin{cases} x^3 + 5x^2 + 10x + 8 = 0 \\ x^2 + 2x = 0 \end{cases} \text{ d'où } \begin{cases} x^3 + 5x^2 + 10x + 8 = 0 \\ x = 0 \text{ ou } x = -2 \end{cases} \text{ ainsi } \boxed{z_0 = -2}$$

(car $z = 0$ n'est pas une solution de (E))

b- comme $z_0 = -2$ est une solution de (E) , donc il existe deux nombres complexes b et c tels que

$$z^3 + (5+i)z^2 + (10+2i)z + 8 = (z+2)(z^2 + bz + c)$$

par identification ,on obtient : $b=3+i$ et $c=4$.

Par suite (E) : $(z+2)(z^2 + (3+i)z + 4) = 0$ donc $\begin{cases} z = -2 \\ z^2 + (3+i)z + 4 = 0 \end{cases}$

Réolvons l'équation $z^2 + (3+i)z + 4 = 0$

$$\Delta = (3+i)^2 - 16 = -8 + 6i = (1+3i)^2 \text{ ce qui donne } \begin{cases} z' = \frac{1}{2}(-3-i-1-3i) = -2-2i \\ z'' = \frac{1}{2}(-3-i+1+3i) = -1+i \end{cases}$$

Conclusion : les solutions de l'équation (E) sont donc -2 , $-2-2i$ et $-1+i$

2) a- L'écriture complexe de f est de la forme $z' = az + b$ où $a = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ (complexe non nul) et $b = 0$ donc f est une similitude directe de rapport $k = \sqrt{2}$, de centre O et dont une mesure de l'angle est $\frac{\pi}{4}$.

b- On a $MM' = |(1+i)z - z| = |iz| = |z| = OM$

D'autre part , $M' = f(M)$ donc $OM'^2 = 2OM^2$

par suite $MM'^2 + OM^2 = 2OM^2 = OM'^2$

Ainsi OMM' est un triangle rectangle et isocèle en M .

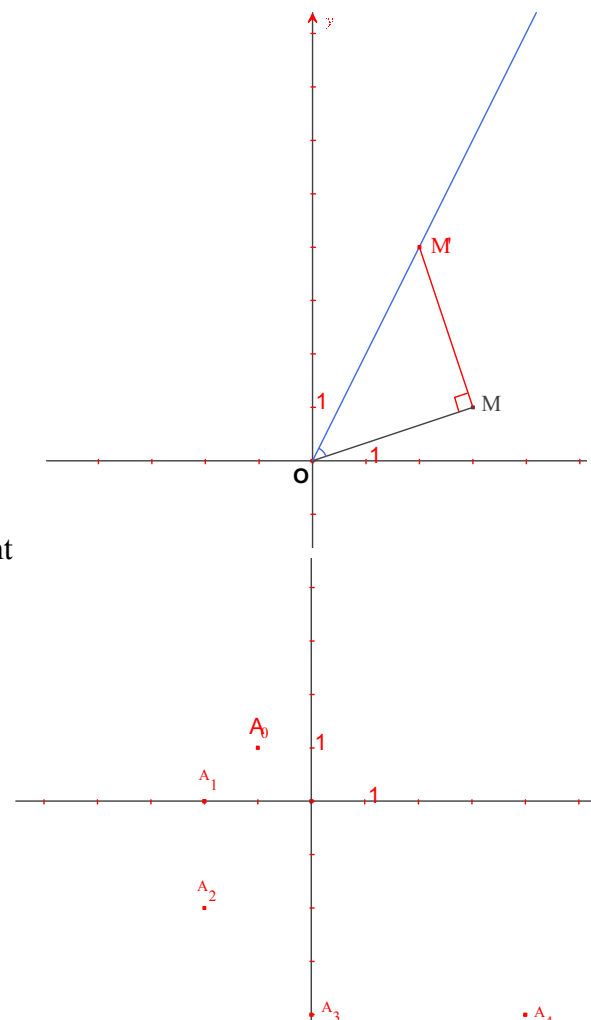
Construction :

On construit la demi-droite $[Ot)$

tel que $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{Ot}) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$

La perpendiculaire à (OM) issue de M coupe $[Ot)$

en M' d'où la construction.



3) a- pour tout $n \in \mathbb{N}$, désignons par z_n l'affixe du point

A_n . comme $A_{n+1} = f(A_n)$ alors $z_{n+1} = (1+i)z_n$.

Par suite $A_0(-1+i)$; $A_1(-2)$; $A_2(-2-2i)$

$A_3(-4i)$ et $A_4(4-4i)$.

b- On a : $z_n = (1+i)z_{n-1}$

On établit par récurrence que pour tout entier naturel

non nul n on a $z_n = (1+i)^n z_0$

Les points O , A_0 et A_n sont alignés si et seulement si $\overrightarrow{OA_0}$ et $\overrightarrow{OA_n}$ sont colinéaires.

$\overrightarrow{OA_0}$ et $\overrightarrow{OA_n}$ sont colinéaires si et seulement si $\frac{z_n}{z_0}$ est réel

$\frac{z_n}{z_0}$ est réel si et seulement si $\arg(1+i)^n = k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) si et seulement si $n \equiv 0 \pmod{4}$ et n non nul.

Exercice n°3

A-CONTENU

-Antidépagement : symétrie, symétrie glissante.

B-SOLUTION

1) a- $AB \neq 0$ et $AB = BD$ car ABD est équilatéral

alors il existe un unique antidépagement f qui envoie A sur B et B sur D .

b- On a $f \circ f(A) = D \neq A$

donc f est une symétrie glissante de vecteur

$$\frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AJ} \text{ (car } f \circ f = t_{\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}}) \text{ et d'axe la droite passant par le point } I = A * B \text{ et par le point } O = B * D$$

.donc l'axe de cette symétrie glissante est la droite (OI) .

c- L'image du triangle direct ABD est un triangle indirect qui lui est isométrique

dont $f(A) = B$ et $f(B) = D$ sont deux sommets par suite l'image par f du triangle ABD est le triangle BDC

$$2) a- \left. \begin{array}{l} s(\{A, B, D\}) = \{B, C, D\} \\ s(A) = C \\ s \text{ est une bijection} \end{array} \right\} \text{ donc } s(\{B, D\}) = \{B, D\} \text{ ainsi } s([BD]) = [BD].$$

b- d'après ce qui précède on a

$s([BD]) = [BD]$ et comme $O = B * D$ donc $s(O) = O$ par suite s est un antidépagement

Qui fixe le point O d'où il s'agit d'une symétrie orthogonale d'axe (BD)

$$3) \text{ a- } \left. \begin{array}{l} g(\{A, B, D\}) = \{B, C, D\} \\ g(A) = D \\ g \text{ est une bijection} \end{array} \right\} \text{ donc } g(\{B, D\}) = \{B, C\} \text{ par suite on obtient : } g(D) = B \text{ ou } g(D) = C$$

or si $g(D) = C$ on aura $g(B) = B$ par suite g est une symétrie orthogonale ce qui n'est pas le cas car $g \circ g(A) = C \neq A$ donc $g(D) = B$.

b- on a déjà $g(A) = D$, $g(D) = B$ et g n'est pas une symétrie orthogonale car $g \circ g(A) = B \neq A$ donc g est une symétrie glissante donc de vecteur $\frac{1}{2} \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AI}$

(car $g \circ g = t_{\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}}$) et d'axe la droite passant par $J = A * D$ et par $O = B * D$ donc l'axe de la symétrie glissante g est la droite (OJ) .

Exercice n°4

A- CONTENU

- Fonction Logarithme.
- Continuité, dérivabilité, positions relatives de deux courbes.
- Calcul intégral, calcul d'aire.

B- SOLUTION

1) posons $t = x + 2$

$$\text{a- } \lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-2)^+} (x+2) \ln(x+2) = \lim_{t \rightarrow 0^+} t \ln t = 0 = f(-2)$$

Donc f est continue à droite en (-2) .

$$\text{b- } \lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{f(x) - f(-2)}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow (-2)^+} \ln(x+2) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \ln t = -\infty$$

c- f est dérivable sur $]-2, 2]$ et on a :

$$f'(x) = 1 + \ln(x+2). \quad f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq e^{-1} - 2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+2) \ln(x+2) = \lim_{t \rightarrow +\infty} t \ln t = +\infty$$

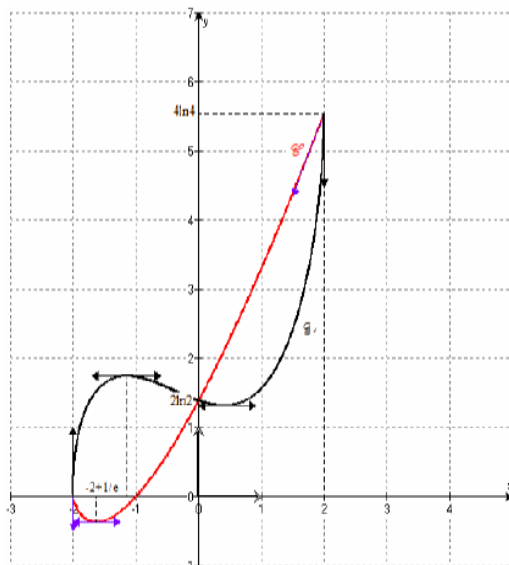
$$2) \text{ a- } g(x) - f(x) = -x\sqrt{4-x^2}$$

x	-2	0	2
$g(x) - f(x)$		+	-
position	C Au dessous De C'		

x	-2	$e^{-1} - 2$	2
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	0	$-e^{-1}$	$+\infty$

Pour $x \in [-2, 0]$ la courbe C est au dessus de la courbe C' et pour $x \in [0, 2]$ la courbe C est au dessous de la courbe C'

b-



- 3) a- $\left\{ \begin{array}{l} \bullet \text{ Si } \alpha < 0 \text{ on obtient } \mathcal{A}_\alpha = \int_\alpha^0 (g(x) - f(x)) dx = \int_\alpha^0 x\sqrt{4-x^2} dx \\ \bullet \text{ Si } \alpha > 0 \text{ on obtient } \mathcal{A}_\alpha = \int_0^\alpha (f(x) - g(x)) dx = \int_0^\alpha x\sqrt{4-x^2} dx \end{array} \right\}$ Ainsi pour tout $\alpha \in [-2, 2] \setminus \{0\}$

b- $\mathcal{A}_\alpha = -\frac{1}{2} \int_0^\alpha -2x\sqrt{4-x^2} dx = -\frac{1}{3} [(4-x^2)\sqrt{4-x^2}]_0^\alpha = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} (4-\alpha^2)\sqrt{4-\alpha^2}.$

c- $\mathcal{A} = \mathcal{A}_{-2} + \mathcal{A}_2 = \frac{16}{3} \text{ u.a.}$

Exercice n°5

A-CONTENU

-Suite de fonctions ; suites numériques ; convergences de suites

B-SOLUTION

- 1) $f_n'(x) = -e^{-x} - (2n+1)x^{2n} < 0$ sur $[0, 1]$ donc f_n est strictement décroissante sur $[0, 1]$.

x	0	1
$f_n'(x)$	—	
$f_n(x)$	1	$e^{-1} - 1$

2) f_n est continue, strictement décroissante sur $[0,1]$ donc elle réalise une bijection de $[0,1]$

sur $f([0,1]) = [e^{-1}-1, 1]$ et comme $0 \in]e^{-1}-1, 1[$ alors l'équation $f_n(x) = 0$ admet une solution unique $u_n \in]0, 1[$

3) a- Pour tout $x \in]0, 1[$, on a : $f_{n+1}(x) - f_n(x) = x^{2n+1}(1-x^2) > 0$

donc pour tout $(n, x) \in \mathbb{N} \times]0, 1[$ on a : $f_{n+1}(x) > f_n(x)$.

b- Pour tout $(n, x) \in \mathbb{N}^* \times]0, 1[$ on a : $f_{n+1}(x) > f_n(x)$ pour $x = u_{n+1}$ on aura $\boxed{f_n(u_{n+1}) < 0}$.

c- • $f_n(u_{n+1}) < 0$ donc $f_n(u_{n+1}) < f_n(u_n)$ et comme f_n est strictement décroissante alors sa réciproque l'est aussi et par suite $u_{n+1} > u_n$ ainsi (u_n) est une suite croissante.

• (u_n) est une suite croissante et majoré par 1 donc elle est convergente.

4) a- $f_n(u_n) = 0$ donc $e^{-u_n} = (u_n)^{2n+1}$ ainsi $\boxed{\ln u_n = -\frac{u_n}{2n+1}}$.

b- Soit $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ alors on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\frac{u_n}{2n+1}\right)$ donc $\ln \ell = 0$ par suite $\boxed{\ell = 1}$.

FIN.