

COURS DE SOUTIEN DE MATHÉMATIQUES

Prof : Abdoulaye Drissa Dembélé (ADD)

Classe : TSE

2014 - 2015

Lycée Ba Nissou de Laglabougou (LBNL) BKO

« Le but de ce cours de soutien est de préparer l'élève psychologiquement pour le Bac »

Sujet n°1 :

Exercice 1

1) On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \frac{1}{n!} \int_0^1 (1-x)^n e^{-x} dx$.

a) A l'aide d'une intégration par parties, calcule I_1 .

b) Prouve que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n!} \int_0^1 e^{-x} dx$. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.

c) Montre, en utilisant une intégration par parties, que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$I_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} - I_n.$$

2) On considère la suite réelle (a_n) , définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$a_1 = 0 \text{ et } a_{n+1} = a_n + \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

a) Démontre par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \frac{1}{e} + (-1)^n I_n$.

b) Déduis en $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$.

Exercice 2 :

Soit $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par : $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x dx$.

1) Démontre que la suite (I_n) est positive et décroissante.

2) a) $\forall n \in \mathbb{N}$; détermine la dérivée de la fonction $x \mapsto \tan^{n+1} x$.

b) Déduis en que :

$$i_1) \forall n \in \mathbb{N}^*, I_n + I_{n+2} = \frac{1}{n+1} ; \quad i_2) \forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{2n+2} \leq I_n \leq \frac{1}{n+1} ; \quad i_3) \lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0.$$

c) On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f(n) = I_{n+4} - I_n$. Utilise i_1 pour démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f(n) = \frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+1}.$$

3) a) Calcule I_2 .

b) Démontre que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f(2) + f(6) + f(10) + \dots + f(4n-2) = I_{4n+2} - I_2$.