

EXERCICE 1:.....5pts

1. On considère les intégrales I_n et J_n définies par :

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos x} dx \text{ et, pour tout entier naturel } n \text{ non nul, par : } I_n = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{(\sin x)^n}{\cos x} dx,$$

$$J_0 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos x dx \text{ et, pour tout entier naturel } n \text{ non nul, par : } J_n = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sin x)^n \cos x dx.$$

a. Calculer J_n pour tout entier naturel n .

b. En déduire que, pour tout entier naturel n : $I_{n+2} - I_n = \frac{-1}{n+1} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1}$.

2. a. Calculer I_1 .

b. En déduire I_3 .

3. Soit f la fonction définie sur $\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$ par : $f(x) = \frac{1}{\cos x}$

a. Démontrer que, pour tout réel x : $\cos x = 2 \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$.

b. On pose, pour tout x élément de $\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$: $u(x) = \tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$. Calculer $\frac{u'(x)}{u(x)}$.

En déduire une primitive de f sur $\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$.

c. Calculer I_0 puis I_2 et I_4 .

EXERCICE 2 :.....5pts

1. On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2-u_n} \end{cases}$

a. Calculer u_1, u_2, u_3 sous forme de fractions irréductibles.

b. Formuler une conjecture sur l'expression de u_n en fonction de n .

c. Démontrer cette conjecture à l'aide d'un raisonnement par récurrence.

2. Dans le plan P, on considère le triangle équilatéral ABC de côté a

a. Construire le barycentre du système : $\{(A, 2); (B, 1); (C, 1)\}$.

b. Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tels que :

$$2\overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = \frac{3a^2}{2}.$$

3. a. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle d'inconnue f : $x^2 f'(x) + 2x f(x) - 1 = 0$.

b. Soit l'équation (E): $x^2 f'(x) - 2x f(x) + f^2(x) = 0$. On pose $g(x) = \frac{1}{f(x)}$. Montrer que

l'équation (E) est équivalente à $x^2 g'(x) + 2x g(x) = 1$. Déduisez-en la résolution de l'équation (E).

Problème: 10pts

Les buts du problème sont l'étude de la fonction f définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{\ln(e^{2x}-1)}{e^x}, \text{ puis la recherche de primitives de cette fonction.}$$

Partie A – Etude de fonctions auxiliaires.

1. On définit la fonction g sur l'intervalle $]1; +\infty[$ par : $g(x) = 2x - (x-1) \ln(x-1)$.

- Déterminer la limite de $g(x)$ lorsque x tend vers 1.
 - calculer $g'(x)$ pour tout x appartenant à l'intervalle $]1; +\infty[$.
 - résoudre, dans $]1; +\infty[$, l'équation $1 - \ln(x - 1) > 0$.
 - étudier les variations de g sur l'intervalle $]1; +\infty[$.
 - Montrer que l'équation $g(x) = 0$ a une solution unique, notée α , dans l'intervalle $[e + 1; e^3 + 1]$, et étudier le signe de $g(x)$ sur chacun des intervalles $]1; \alpha[$ et $]\alpha; +\infty[$.
2. Soit φ la fonction définie sur l'intervalle $]1; +\infty[$ par $\varphi(x) = \frac{\ln(x^2 - 1)}{x}$.
- Déterminer $\lim_{x \rightarrow 1} \varphi(x)$ puis prouver que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = 0$.
 - Calculer $\varphi'(x)$ puis montrer que $\varphi'(x)$ est du signe de $g(x^2)$ sur l'intervalle $]1; +\infty[$.
 - Montrer que φ est croissante sur l'intervalle $]1; \sqrt{\alpha}[$ et décroissante sur l'intervalle $]\sqrt{\alpha}; +\infty[$.

Partie B - Etude de la fonction f .

- Vérifier que, pour tout x appartenant à l'intervalle $]0; +\infty[$, on a $f(x) = \varphi(e^x)$.
- En déduire :
 - la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 0.
 - la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
 - Le sens de variation de f sur l'intervalle $]0; +\infty[$ puis montrer que f admet un maximum en $\ln \sqrt{\alpha}$.
- Montrer que, pour tout x de $]0; +\infty[$ $f(x) \leq \frac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha - 1}$.
- Représenter graphiquement f dans un repère orthogonal, d'unité 5cm en abscisse et 10cm en ordonnée. On prendra 10 pour valeur approchée de α .

Partie c - Recherche de primitives de f .

- Vérifier que f est solution de l'équation différentielle $y' + y = \frac{e^x}{e^x - 1} - \frac{e^x}{e^x + 1}$.
- On pose $h(x) = \frac{e^x}{e^x - 1} - \frac{e^x}{e^x + 1}$.
 - Trouver une primitive H de h sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
 - En déduire les primitives F de f sur l'intervalle $]0; +\infty[$.