

EPREUVE:Mathématique**Contexte**

Bio est un enseignant de mathématiques à la retraite . Il a mis en place à côté de sa maison un jardin potager. Dans ce jardin , Bio produit des tomates , carottes, salade, persil et du basilic.

Dans le jardin chaque produit a un emplacement bien déterminé . Pour identifier ces emplacements dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, Bio tire successivement avec remise deux jetons d'une urne et note x et y les nombres lus respectivement sur le premier jeton et le deuxième jeton tirés. Ensuite le produit est placé au point M d'affixe $z = lnx + ilny$. L'urne contient quatre jetons qui portent le nombre 1, deux portent le nombre e et six portent le nombre $\frac{1}{e}$.

Dans le jardin , Bio a réalisé p puits où p est le plus petit entier naturel supérieur à 3 de l'ensemble des entiers naturels n tels que 13 divise $5^{2n} + 5^n$. Pour l'arrosage de ses plants , Bio utilise un raccord dont l'allure est assimilable à la courbe $(\mathcal{C})$ d'une fonction f_1 , dans un repère orthonormé $(\Omega; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ d'unité graphique 3cm.

Gniré , fille de Monsieur Bio et élève en classe de terminale scientifique s'intéresse aux activités de jardinage de son père et cherche à comprendre les principes mathématiques qui s'y trouvent.

Tâche: Tu es invité à résoudre les problèmes suivants pour apprécier l'implication des mathématiques dans les activités de jardinage de Bio.

Problème 1

1. Détermine la probabilité de chacun des événements suivants :

A: "M appartient à l'axe des abscisses";

B: "M appartient à l'axe des ordonnées";

C: "M appartient aux deux axes";

D: "l'angle $(\overrightarrow{OM}, \vec{i})$ est égal $-\frac{\pi}{4}$ ".

2. Soit X la variable aléatoire réelle qui à chaque tirage associe la distance OM .

a) Détermine la loi de probabilité de X .

b) Détermine la fonction de répartition de X

3. Détermine suivant les valeurs de l'entier naturel n le reste de la division euclidienne de 5^n par 13.

4. a) Démontre que si deux entiers x et y sont premiers entre eux alors x et y^n sont premiers entre eux.

b) Détermine les entiers naturels n tels que 13 divise $5^{2n} + 5^n$.

c) Détermine le nombre de puits réalisé par Bio.

Problème 2

Le domaine réservé pour l'implantation du jardin est un losange $ABCD$ de centre O tel que $AB = BC = CD = DA$ et $mes(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}}) = \frac{\pi}{3}$. L'une des applications du plan ayant aidé Bio à aménager le jardin est l'application g définie par: $g = t_{\vec{u}} \circ f$, où $t_{\vec{u}}$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{BA}$ et f une isométrie du plan ($\mathcal{P}$) telle que $f(A) = B$, $f(B) = D$ et $f(D) = C$.

5. a) Détermine les images par g des points A et D .

b) Construis l'image E du point B par g .

c) Déduis-en que g est un antidéplacement dont on précisera la nature et les éléments caractéristiques.

6. a) Démontre que f n'admet pas de point invariant. (tu pourras considérer le repère (A, B, D) et l'application linéaire φ associée à f .)

b) Déduis-en la nature et les éléments caractéristiques de f .

7. Trouve deux droites (Δ) et (Δ') telles que $t_{\frac{1}{2}\vec{u}} = S_{(\Delta)} \circ S_{(\Delta')}$ où $S_{(\Delta)}$ et $S_{(\Delta')}$ sont deux symétries orthogonales.

8. Détermine la nature et les éléments caractéristiques de $S_{(AC)} \circ f$

Problème3

Partie A

En réalité f_1 est la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f_1(x) = -x^{\frac{1}{3}}e^{-x}$

9. Etudie la dérivabilité de f_1 à droite en 0 . Interprète graphiquement le résultat obtenu .
10. Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x)$.
11. Interprète graphiquement le résultat obtenu.
12. a) Démontre que pour réel $x \in]0; +\infty[$, on a : $f_1'(x) = \left(\frac{1-3x}{3x} \right) f_1(x)$.
b) Dresse le tableau de variation de f_1 .
13. Trace ($\mathcal{C}$) , on prendra $f_1\left(\frac{1}{3}\right) = -0,5$.

PartieB

Le domaine occupé par les plants a pour aire en unité d'aire $\int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{x^3} \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx$

14. Détermine les fonctions solution de l'équation différentielle (E) : $y'' + y = 0$.
15. Soit h_0 une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

On définit la fonction h de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}$ par $h_0(x) = xh\left(\frac{1}{x}\right)$

Exprime $h''(x)$ en fonction de $h_0''\left(\frac{1}{x}\right)$ et de x

16. On considère l'équation différentielle (E') : $y'' = -\frac{1}{x^4}y$.

Démontre que la fonction h_0 est solution de (E'), si et seulement si la fonction h définie pour tout réel x non nul par $h(x) = xh_0\left(\frac{1}{x}\right)$ est solution de (E).

17. Déduis-en toutes les solutions de (E') définies sur chacun des intervalles $] -\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$.
18. Soit h_0 une solution de l'équation (E') définie sur $]0; +\infty[$.
 - a) Déduis-en des questions précédentes une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^4}h_0(x)$.
 - b) Calcule en cm^2 l'aire du domaine occupé par les plants.