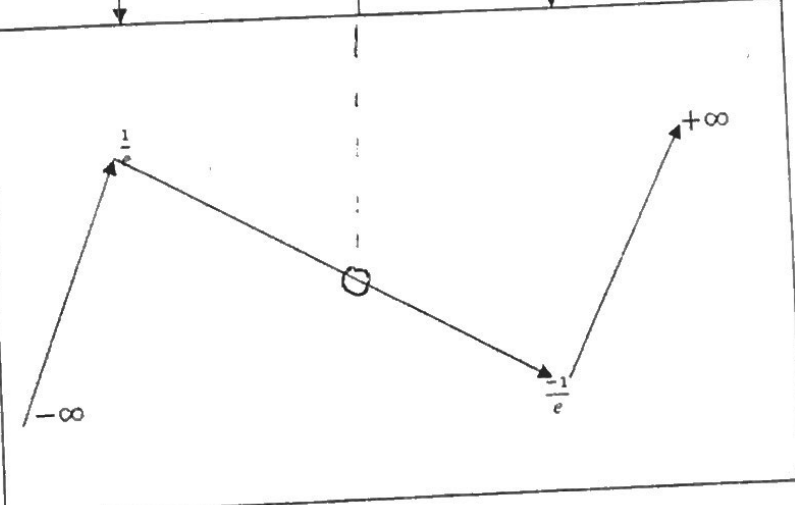


BACCALAUREAT BLANC : SESSION D'AOUT 2020
 EPREUVE DE MATHÉMATIQUES
 SERIE : TSE
 DUREE : 4 heures / COEFF : 4

Exercice 1 :
 f est une fonction définie par son tableau de variation ci dessous

x	$-\infty$	$-1 - \frac{1}{e}$	-1	$-1 + \frac{1}{e}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	-	+
$f(x)$					

- Donne Df
- Donne *limite de f aux bornes* de ce Df
- Donne une équation de la tangente en fonction en $x_0 = -1 + \frac{1}{e}$

Exercice 2 :

- Trouver le reste de la division euclidienne de 17^{1997} par 7
- Un entier naturel qui s'écrit $\overline{5531}^t$ et $\overline{3676}^{t+1}$ déterminer t .
- Résoudre dans $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ $x^2 + x + 1 = 0$
- Résoudre dans $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^2$ $\begin{cases} 2x - y - 2 = 0 \\ 3x + 2y - 1 = 0 \end{cases}$
- a) Résoudre $\mathbb{C} : z^5 = 1$
 b) $z^2 = -i$
- Mettre sous forme trigonométrique $-8\sqrt{3} + 8i$

Problème :

Partie A

Soit f la fonction définie par : $f(0) = 0$ et pour tout réel strictement positif x par $f(x) = \frac{x \ln x}{x+1}$

1. Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0
2. Soit q la fonction dérivable sur $]0, +\infty[$ et définie par : $q(x) = \ln(x) + x + 1$
 - a) Etudier le sens de variation de q .
 - b) Démontrer que l'équation $Q(x) = 0$ admet une solution unique β telle que $0,27 \leq \beta \leq 0,28$ donner le signe $q(x)$
3. a) Exprimer $f'(x)$ en fonction de $Q(x)$. En déduire les variations de f .
 - a) Vérifier que : $f(\beta) = -\beta$
 - c) Calculer la limite de f $+\infty$
 - d) Dresser le tableau de variation de f .
4. Tracer la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$.
On placera en particulier les points d'abscisses 1 ; 3 ; 4 ; e^2 ; 12. On prendra $\ln(0,27) \approx -1,31$; $\ln(0,28) \approx \ln(2) \approx 0,7$; $e \approx 2,7$; $\ln(5) \approx 1,6$

Partie B

1. Démontrer l'équation $f(x) = 1$ admet une solution unique α dans $[3,4]$.
Démontrer que les équations $f(x) = 1$ et $e^1 + \frac{1}{x} = x$ sont équivalentes.
2. Soit g la fonction dérivable sur $]0, +\infty[$ et définie pour tout réel strictement positif x par $g(x) = e^1 + \frac{1}{x}$
 - a. Etudier le sens de variation de g
 - b. Démontrer que pour tout x élément de $[3; 4]$ $g(x)$ est un élément de $[3,4]$
 - c. Démontrer que $\forall x \in [3; 4] ; |g'(x)| \leq \frac{1}{2}$. On prendra $e^{\frac{4}{3}} \approx 3,8$ $e^{\frac{5}{4}} \approx 3,49$
- 3) Soit (U_n) la suite définie par $U_0 = 3$ et la relation de récurrence $U_{n+1} = g(U_n)$
 - a. Démontrer que par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}. U_n \in [3; 4]$
 - b. Démontrer que pour tout entier n positif ou nul $|U_{n+1-a} - U_{n-a}| \leq \frac{1}{2^n}$ En déduire que $|U_{n-a}| \leq \frac{1}{2^n}$
 - c. Démontrer que la suite (U_n) est convergente. Calculer sa limite.
 - d. Pour quelles valeurs de n , U_n est une valeur approchée de a à 10^{-2} près ?