

GROUPE SCOLAIRE LA CLAIRE FONTAINE SERIE : TSE	BACCALAUREAT BLANC EPREUVE DE MATHÉMATIQUE	COEF : 4 DUREE : 4 H	ANNEE SCOLAIRE : 2021-2022
---	---	---------------------------------	---------------------------------------

Le sujet est composé de deux exercices et un problème tous obligatoires. (Vérifier que vous avez toutes les parties du sujet). La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies. Les calculatrices non programmables sont autorisées.

Exercice 1 (5 points)

- 1) Pour tout nombre complexe z , on pose : $P(z) = z^3 - 3z^2 + 3z + 7$.
 - a) Vérifier que -1 est une racine de P . Déduisez-en une factorisation de $P(z)$. **(0.5 pt)**
 - b) Résoudre dans l'équation $P(z) = 0$. **(0.5 pt)**
- 2) Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ (unité 2 cm). A, B, C et G sont les points du plan d'affixes respectives : $Z_A = -1$; $Z_B = 2 + i\sqrt{3}$; $Z_C = 2 - i\sqrt{3}$; $Z_G = 3$.
 - a) Placez les points A, B, C et G dans le plan. **(0.5 pt)**
 - b) Quelle est la nature du triangle ABC ? Justifier votre réponse. **(0.5 pt)**
 - c) Ecrire sous forme exponentielle le complexe $\frac{Z_A - Z_C}{Z_G - Z_C}$. En déduire la nature du triangle GAC. **(0.75 pt)**
- 3) On désigne par (Γ) l'ensemble des points M du plan tels que :

$$(-\vec{MA} + 2\vec{MB} + 2\vec{MC}) \cdot \vec{CG} = 12. (1)$$
 - a) Démontrer que G est le barycentre des points pondérés (A; -1), (B; 2), (C; 2). **(0.5 pt)**
 - b) Démontrer que la relation (1) équivaut à : $\vec{GM} \cdot \vec{CG} = -4$. (2) **(0.75 pt)**
 - c) Démontrer que la relation (2) équivaut à : $\vec{AM} \cdot \vec{GC} = 0$. Déterminer alors l'ensemble des points (Γ) . **(0.75 pt)**
 - d) Vérifier que le point A appartient à (Γ) . **(0.25 pt)**

Exercice 1 6 points

I- Pour tout entier naturel non nul, on considère les nombres : $a_n = 4 \times 10^n - 1$, $b_n = 2 \times 10^n - 1$ et $c_n = 2 \times 10^n + 1$.

- 1)a) Calculer $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, a_3, b_3$ et c_3 . **(0.75 pt)**
 - b) Démontrer que a_n et c_n sont divisibles par 3. **(0.5 pt)**
 - c) Démontrer que b_2 est premier. **(0.25 pt)**
 - c) Démontrer que, pour tout entier naturel non nul, $b_n \times c_n = a_{2n}$. **(0.25 pt)**
- En déduire la décomposition en produit de facteurs premiers de a_4 . **(0.25 pt)**
- e) Démontrer que : $\text{PGCD}(b_n; c_n) = \text{PGCD}(c_n; 2)$. En déduire que b_n et c_n sont premiers entre eux. **(0.5 pt)**
 - 2) On considère l'équation : $(E): b_3x + c_3y = 1$ d'inconnue x et y éléments de $\mathbb{Z}$.
 - a) Justifier le fait que (E) possède au moins une solution. **(0.25 pt)**
 - b) En utilisant l'algorithme d'Euclide trouver une solution particulière de (E) . **(0.5 pt)**
 - c) Résoudre l'équation (E) . **(0.5 pt)**

II- Le Plan affine euclidien est rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ direct. f et g sont les applications affines du plan qui associent à tout point $M(x; y)$ le point $M'(x'; y')$ telles que

$$f: \begin{cases} x' = 2x + 1 \\ y' = 2y + 1 \end{cases} \text{ et } g: \begin{cases} x' = -y + 2 \\ y' = x - 1 \end{cases}$$

- 1) Pour chacune des applications f et g :
 - a) Déterminer l'ensemble des points invariants, préciser celles qui sont bijective. **(1 pt)**
 - b) Préciser la nature et les éléments caractéristiques. **(0.75 pt)**
- 2) Déterminer analytiquement la réflexion d'axe Δ d'équation : $y = x + 2$. **(0.5 pt)**

Problème (9 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$; unité graphique 2 cm. Pour tout entier naturel n , on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = \frac{e^x}{e^{nx}(1+e^x)}.$$

On désigne par (C_n) la courbe représentative de f_n dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Partie A

Dans cette partie, on s'intéresse seulement à la fonction f_0 .

- 1)a) Déterminer la limite de $f_0(x)$ quand x tend vers $-\infty$. **(0.25 pt)**
 b) Déterminer la limite de $f_0(x)$ quand x tend vers $+\infty$. **(0.25 pt)**
 c) En déduire les asymptotes de (C_0) . **(0.25 pt)**
- 2) Montrer que le point $K \left(0; \frac{1}{2}\right)$ est un centre de symétrie de (C_0) . **(0.5 pt)**
- 3) Etudier les variations de f_0 . **(1 pt)**
- 4)a) Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe (C_0) au point K . **(0.25 pt)**
 b) Justifier que, pour étudier la position de (T) par rapport à la courbe (C_0) , il suffit d'étudier sur $\mathbb{R}$ le de $g(x)$ où $g(x) = 2e^x - xe^x - 2 - x$. **(0.25 pt)**
 c) Calculer $g'(x)$ et $g''(x)$. **(0.5 pt)**
 d) Déterminer suivant les valeurs de x le signe de $g''(x)$, $g'(x)$ et $g(x)$. **(0.75 pt)**
 e) En déduire la position de la tangente (T) par rapport à la courbe (C_0) . **(0.25 pt)**
- 5) Tracer (C_0) et T . **(1 pt)**

Partie B :

Etude de la suite u définie pour tout entier naturel n par :

$$u_n = \int_0^1 f_n(x) dx.$$

- 1) Montrer que $u_0 = \ln\left(\frac{1+e}{2}\right)$. **(0.25 pt)**
- 2) Calculer $u_0 + u_1$. En déduire la valeur de u_1 . **(0.5 pt)**
- 3) Montrer que la suite u est positive. **(0.25 pt)**
- 4) On pose $k(x) = f_{n+1}(x) - f_n(x)$.
 a) Montrer que pour tout réel x , $k(x) = \frac{1-e^x}{e^{nx}(1+e^x)}$. **(0.5 pt)**
 b) Etudier le signe de $k(x)$ sur l'intervalle $[0; 1]$. **(0.25 pt)**
 c) En déduire le sens de variation de la suite u . **(0.25 pt)**
- 5)a) Montrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on a :
 $u_{n-1} - u_n = \frac{1-e^{-(n-1)}}{n-1}$. **(0.5 pt)**
 b) Calculer u_2 . **(0.25 pt)**
- 6) Soit v la suite définie pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 par :
 $v_n = \frac{u_{n-1} + u_n}{2}$.
 a) Calculer la limite de v_n . **(0.25 pt)**
 b) Montrer, que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 on a :
 $0 \leq u_n \leq v_n$. **(0.5 pt)**
 c) En déduire la limite de la suite u_n . **(0.25 pt)**