



LYCEE PRIVE SCIENTIFIQUE ET TECHNOLOGIQUE (LSBA)

| <b>Baccalauréat Blanc 2021-2022</b> |           |                         |                  |
|-------------------------------------|-----------|-------------------------|------------------|
| Classe : <b>TSE</b>                 | Juin 2022 | Durée : <b>4 heures</b> | Coef : <b>05</b> |
| <b>EPREUVE DE : MATHEMATIQUES</b>   |           |                         |                  |

- Le sujet est composé de deux exercices et d'un problème tous obligatoires. Il comprend trois pages.
- La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- L'usage de la calculatrice non programmable est autorisé.

**Exercice 1 : -----[5 points]**

**A.** Dans un établissement le résultat du baccalauréat blanc est un repère pour l'administration depuis un certain temps. En effet, une analyse a prouvé qu'un élève sérieux de terminale de leur école a 60% de chance d'être admis au Bac s'il réussit son Bac blanc et 30% sinon. On admet que la probabilité de réussir son Bac blanc est 80%.

Notons A l'événement "l'élève réussit son Bac blanc" et B l'événement " l'élève réussit son Bac".

- Quelle est la probabilité que l'élève réussisse son Bac blanc et son Bac ? **(0, 5 pt)**
- Quelle est la probabilité que l'élève ne réussisse pas son Bac Blanc et réussit son Bac ? **(0, 5 pt)**
- Montre que la probabilité que l'élève réussisse son bac est  $\frac{27}{50}$ . **(0, 5 pt)**
- Un élève admis au Bac est un succès pour l'établissement. L'établissement sélectionne huit (8) candidats sérieux. On admet que ces huit élèves vérifient les mêmes conditions. On désigne par  $X$  le nombre d'élèves admis au bac.
  - Détermine la loi de  $X$ , son espérance mathématique et sa variance. **(1, 5 pts)**
  - Détermine  $P(X \geq 4)$  puis interprète ce résultat. **(0, 5 pt)**

**B.** M. TOURÉ a déposé à la BDM-SA en épargne une somme d'argent de 146777 écrit en base treize, en FCFA, aux taux d'intérêt de 7,5% l'an dans le but de délimiter son champ.

Après une année d'épargne, il décide de retirer la totalité de son argent, afin de délimiter par des poteaux son champ, à la forme d'un trapèze, dont les deux bases mesurent respectivement 119m, 91m et les deux autres côtés mesurent 56m, 35m.

Pour la délimitation, M. DEMBELE a besoin des poteaux à égale distance mesurée en nombre entier de mètre pour un nombre minimum de poteaux, avec un poteau à chaque sommet.

Prix unitaire du poteau 9434, écrit en base onze, en FCFA.

Aide M. DEMBELE à vérifier si le montant dont il dispose lui permet de délimiter son champ. **(1, 5 pts)**

**Exercice 2 : -----[5 points]**

A. Dans le plan euclidien  $P$  on considère ABC un triangle équilatéral de côté  $a$  ( $a > 0$ ). Soit  $I$  le barycentre des points pondérés  $(A, 1)$ ,  $(B, 2)$  et  $(C, -2)$ .

1. Construis le barycentre  $I$ . (0, 5 pt).

2. Calcule  $IA^2, IB^2$  et  $IC^2$  en fonction de  $a$ . (0, 75 pt)

3. Soit  $k$  un nombre réel.

a. Détermine en fonction de  $k$ , l'ensemble  $(E_k)$  des points  $M$  du plan tels que :

$$MA^2 + 2MB^2 - 2MC^2 = ka^2 \quad (0, 75 \text{ pt})$$

b. Existe-t-il une valeur de  $k$  pour laquelle  $B$  appartient à  $(E_k)$ ? Construis  $(E_k)$ . (0, 5 pt)

c. Montre que  $(E_{-1})$  est un cercle tangente à la droite  $(AB)$ . Construis  $(E_{-1})$  (0, 5 pt)

B. Soient  $z_1$  et  $z_2$  deux nombres complexes. On se propose de démontrer l'inégalité triangulaire c'est-à-dire que :  $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ .

1. On pose  $z_1 = r_1 e^{i\alpha_1}$  et  $z_2 = r_2 e^{i\alpha_2}$ . Démonstre que  $|Re(z_1 \bar{z}_2)| \leq r_1 r_2$ . (0, 75 pt)

2. Dédus-en que  $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ . (0, 75 pt)

(Indication : On pourra utiliser  $|z_1 + z_2|^2$ ).

3. Trouve une relation entre  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  pour qu'on ait  $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$ . (0, 5 pt)

**Problème : -----[10 points]****Partie A : (2 points)**

Soit  $\varphi$  une application dérivable de  $\mathbb{R}_+^*$  dans  $\mathbb{R}$ , et soit  $g$  l'application numérique définie sur  $\mathbb{R}_+^*$  par  $g(x) = \varphi(x)e^x$ .

1. Résous l'équation différentielle :  $y' + y = 0$ . (0,25 pt)

2. a. Vérifie que  $g$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$  et démontre que, pour que  $\varphi$  vérifie :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \varphi'(x) + \varphi(x) = -\frac{1}{x} - \ln x \quad (1)$$

il faut et il suffit que  $g$  soit une primitive de l'application  $x \mapsto -e^x \ln x - \frac{e^x}{x}$  (0,75 pt)

b. Quel est l'ensemble des primitives de la fonction  $x \mapsto -e^x \ln x - \frac{e^x}{x}$  ? (0,5 pt)

3. Dédus-en que l'ensemble des applications dérivables de  $\mathbb{R}_+^*$  dans  $\mathbb{R}$  vérifiant (1) est l'ensemble des applications  $x \mapsto ae^{-x} - \ln x$  où  $a$  désigne une constante réelle. (0,5 pt)

**Partie B : (5,25 points)**

Soit  $f$  l'application de  $\mathbb{R}_+^*$  dans  $\mathbb{R}$  définie par :  $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(x) = e^{1-x} - \ln x$

1. a. Etudie les variations de  $f$  et montre que l'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution  $c$  et que  $c \in ]1; 2[$ . (0,75+0,5 pts)

b. Construis sa représentation graphique dans un repère orthonormé  $(o; \vec{i}; \vec{j})$ . (0,5 pt)

c. Calcule  $\lim_{x \rightarrow 0^+} xf(x)$ . (0,25 pt)

d. Soit  $x$  un élément de l'intervalle  $]0; 1]$

Calcule l'intégrale  $F(x) = \int_x^1 f(t) dt$  en fonction de  $x$  et montre que  $\lim_{x \rightarrow 0} F(x) = e$ . (0,75 pt)

2. Soit  $n$  un entier naturel supérieur ou égal à 2 et  $w_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$

a. Montre que, pour tout entier  $k$  tel que :  $1 \leq k \leq n-1$  et pour tout réel  $t$  tel que

$$\frac{k}{n} \leq t \leq \frac{k+1}{n}; \quad \text{on a: } f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq f(t) \leq f\left(\frac{k}{n}\right) \quad (0, 25 \text{ pt})$$

b. Montre alors que :  $\frac{1}{n} \sum_{k=2}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \leq F\left(\frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \quad (0, 5 \text{ pt})$

c. Déduis – en que  $F\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} \leq w_n \leq F\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) \quad (0, 25 \text{ pt})$

d. Déduis-en que la suite  $(w_n)$  est convergente et calcule sa limite. (0,5 pt)

3. a. Etablis les égalités :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{\left(1-\frac{k}{n}\right)} = (e-1) \frac{1}{n \left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right)} \quad (0, 25 \text{ pt}) \quad \text{et} \quad \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n} \ln\left(\frac{n!}{n^n}\right) \quad (0, 25 \text{ pt})$$

b. Utilise les résultats précédents pour démontrer que les deux suites définies par :

$$u_n = \frac{1}{n} \ln\left(\frac{n!}{n^n}\right) \quad \text{et} \quad v_n = \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$$

sont convergentes et calcule leur limite. ( $2 \times 0, 25 \text{ pt}$ )

### Partie C : (2,75 points)

Soit  $P$  l'application de  $\mathbb{R}_+^*$  dans  $\mathbb{R}$  définie par :  $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad P(x) = x - \frac{f(x)}{f'(1)}$

1. a. Détermine le sens de variation de  $f'$  dans l'intervalle  $[1; 2]$ . (0, 5 pt)

b. Etudie les variations de  $P$  dans l'intervalle  $[1; 2]$ . Montre que  $P$  réalise une bijection de  $[1; c]$  sur un intervalle  $J$  contenu dans  $[1; c]$ . (0, 75 pt)

c. Montre par récurrence que l'on définit bien une suite  $(c_n)$  d'éléments de  $[1; c]$  en posant  $c_0 = 1$  et pour tout entier naturel  $n$ ,  $c_{n+1} = P(c_n)$ . (0, 25 pt)

2. a. Montre que pour tout  $x \in [1; c]$ ,  $0 \leq P'(x) \leq P'(2) \leq \frac{7}{12}$ . (0, 25 pt)

b. En utilisant le théorème des accroissements finis, vérifie que pour tout entier  $n$ ,

$$|c_{n+1} - c_n| \leq \frac{7}{12} |c_n - c| \quad (0, 5 \text{ pt})$$

Déduis-en que la suite  $(c_n)$  est convergente et détermine sa limite (0, 25 pt)

c. Quelle valeur suffit-il de donner à  $n$  pour que  $c_n$  soit une valeur approchée de  $c$  à  $10^{-2}$  près ? (0, 25 pt)