



Aucun brouillon ne sera corrigé. La clarté et la précision seront prises en compte dans la correction.

Exercice1 : — — — — — 6pts

A. Soit $ABCD$ un carré du plan.

1. Détermine et construis le barycentre G du système : $\{(A, 2) ; (B, -1) ; (C, 1)\}$. **(0,75pt)**

2. Détermine et construis l'ensemble (E) des points M du plan P tels que :

$$\|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{AB}\|. \text{ (0,75pt)}$$

3. Reconnais l'application f de P dans P qui, à tout point M , associe le point M' tels que :

$$\overrightarrow{GM'} = 2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}. \text{ (0,5pt)}$$

B. Le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$.

On considère l'application f qui au point M d'affixe z fait correspondre le point M' d'affixe z' tel que : $z' = \frac{3+4i}{5}z + \frac{1-2i}{5}$.

1. On note par x et y , et y et y' les parties réelles respectivement les parties imaginaires de z et z' .

Démontre que :
$$\begin{cases} x' = \frac{3x+4y+1}{5} \\ y' = \frac{4x-3y-2}{5} \end{cases} \text{ (0,5pt)}$$

2. a. Montre que l'ensemble des points invariants par f est la droite (D) d'équation :

$$2x - 4y - 1 = 0. \text{ (0,5pt)}$$

b. Démontre que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ a une direction fixe et que la droite (D) est médiatrice du segment $[MM']$. **(0,75pt)**

c. Quelle est alors la nature de l'application f ?

3. Détermine l'ensemble (Γ) des points M d'affixe z tels que z' soit un réel. **(0,5pt)**

4. On cherche à déterminer les points de (Γ) dont les coordonnées sont des entières.

a. Donne une solution $(x_0 ; y_0)$ appartenant à $\mathbb{Z}^2$ de l'équation : $4x - 3y = 2$. **(0,25pt)**

b. Détermine l'ensemble des solutions appartenant à $\mathbb{Z}^2$ de l'équation : $4x - 3y = 2$. **(0,75pt)**

5. On considère les points M d'affixe $z = x + iy$ tel que $x = 1$ et $y \in \mathbb{Z}$.

Le point $M' = f(M)$ a pour affixe z' . Détermine les entiers y tels que $\text{Re}(z)$ et $\text{Im}(z')$ soient entières. **(0,75pt)**

Exercice2 : — — — — — 4pts

Un fermier possède dans sa ferme des chevaux, des vaches, des moutons et des chèvres.

On désigne par x, y, z, t respectivement le nombre de chevaux, vaches, moutons et chèvres.

On suppose que les nombres x, y, z, t sont dans cet ordre, les termes consécutifs d'une suite arithmétique.

1. Sachant qu'il y a 5 chevaux et que le nombre total des animaux de la ferme est 56, détermine les nombres x, y, z, t . **(1pt)**
2. Un voleur s'infiltré dans la ferme et emporte 3 des animaux. Sachant que le prix de la vente des animaux est 250 000F pour un cheval, 200 000F pour une vache, 75 000F pour un mouton et 37 500F pour une chèvre, détermine :
 - a. La perte minimale du fermier et la probabilité de cette perte. **(1pt)**
 - b. La perte maximale du fermier et la probabilité de cette perte. **(1pt)**
 - c. La probabilité que le fermier perde 150 000F. **(1pt)**

Problème : — — — — — 10pts

Partie A :

On considère la fonction h définie sur $]0, +\infty[$ par : $h(x) = 1 + \frac{1}{x^2} - 2 \ln x$.

1. Calcule les limites de h en $+\infty$ et à droite en 0. **(0,5pt)**
2. On note h' la fonction dérivée de h , démontre que pour tout $x > 0$, $h'(x) = \frac{-2(1+x^2)}{x^3}$. **(0,5pt)**
3. Démontre que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique x_0 dans $]1, +\infty[$. **(0,25pt)**
4. En déduis le signe de h . **(0,25pt)**

Partie B :

On considère la fonction g définie sur $]0, +\infty[$ par : $g(x) = x^2(1 - \ln x) + 1 + \ln x$.

1. Calcule les limites de g en $+\infty$ et à droite en 0. **(0,5pt)**
2. On note g' la fonction dérivée de g , démontre que pour tout $x > 0$, $g'(x) = xh(x)$. **(0,5pt)**
3. Démontre que $g(x_0) > 0$. **(0,25pt)**
4. Démontre que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution x_1 dans $]0, 1[$. **(0,25pt)**
5. On admet que l'équation $g(x) = 0$ a une solution unique x_2 dans $]x_0, +\infty[$.
 - a. Détermine le signe de g . **(0,25pt)**
 - b. Démontre que $x_1 \in]0,3 ; 0,4[$ et $x_2 \in]3,3 ; 3,4[$. **(0,25pt)**

Partie C :

On considère la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par : $f(0) = 0$ et $f(x) = \frac{x \ln x}{1+x^2}$.

1. Etudie la continuité et la dérivabilité de f à droite en 0. **(0,5pt)**
2. Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, puis interprète graphiquement ce résultat. **(0,5pt)**
3. On note f' la fonction dérivée de f , démontre que pour tout $x > 0$, $f'(x) = \frac{g(x)}{(1+x^2)^2}$. **(0,5pt)**
4. Dresse le tableau de variation de f . **(0,75pt)**
5. Démontre que, si α est une solution de l'équation $g(x) = 0$, alors $\ln \alpha = \frac{\alpha^2+1}{\alpha^2-1}$. **(0,25pt)**
6. En déduis que : $f(x_1) < 0$ et $f(x_2) > 0$. **(0,5pt)**
7. Vérifie que $f(1) = 0$, puis en déduis le signe de f . **(0,5pt)**
8. Construis la courbe représentative (C_f) de f dans le plan muni du repère orthogonal $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$. **(0,75pt)**

Partie D :

On considère la fonction F définie sur $]0, +\infty[$ par : $F(x) = \int_1^x f(t) dt$.

1. a. Démontre que pour tout $t \in]1, +\infty[$, $\frac{1}{2t^2} < \frac{1}{1+t^2} < \frac{1}{t^2}$. **(0,75pt)**
 b. En déduis $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$. **(0,5pt)**
2. Détermine la fonction dérivée F' de F . **(0,25pt)**
3. Dresse le tableau de variation de F . **(0,75pt)**

Bonne chance !!!!