

EXAMEN : Baccalauréat Blanc
ÉPREUVE DE : Mathématiques

SERIES : TSE
DUREE : 04 heures

SESSION : Mai 2023
COEF : 4

Exercice 1 6,5 points

Partie A : 3,5 points

- Etant donné un nombre réel θ .
Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation à variable t , $(E_\theta) : t^2 - 2t \cos\theta + 1 = 0$. (0,5 pt)
En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation à variable complexe z , $(E_\theta)' : z^4 - 2z^2 \cos\theta + 1 = 0$. (0,75 pt)
- On désigne par A, B, C et D les images des solutions de l'équation $(E_{\frac{\pi}{3}})$ telles que :
 $\operatorname{Re}(Z_A) < 0; \operatorname{Im}(Z_B) < 0$ avec $Z_B = -Z_A; Z_D = \bar{Z}_A$ et $Z_C = \bar{Z}_B$ ou Z_A, Z_B, Z_C et Z_D sont les affixes respectives des points A, B, C, et D.
a. Place les points A, B, C, et D sur le cercle trigonométrique d'unité 3 cm. (0,5 pt)
b. Pour quelle valeur de θ les points A, B, C, et D sont-ils les sommets d'un carré ? (0,25 pt)
- A, B, C, et D étant les sommets du rectangle défini dans la question 2°-a) et λ un réel tel que $\lambda \in [-1; 1]$. On appelle G_λ le barycentre du système des points pondérés
 $S_\lambda = \{(A; \lambda^2 + 1); (B; \lambda); (D; -\lambda)\}$
a) Exprime $\overrightarrow{AG_\lambda}$ en fonction de $\overrightarrow{BD}$. (0,5 pt)
b) On pose $(E) = \{M \in P \text{ tel que } \|\overrightarrow{2MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MD}\| = \|\overrightarrow{2MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}\|\}$
Déterminer et construire (E). (1 pt)

Partie B : 1,5 Point

On considère le système suivant, d'équations différentielles du 1^{er} ordre tel que : $\begin{cases} y' + 4z = 2e^{2x} \\ z' - y = e^{2x} \end{cases}$ où y et z désignent deux fonctions inconnues de variables x.

- Former l'équation différentielle du second ordre (E) à laquelle satisfait y(x). (0,75 pt)
- Intégrer l'équation (E) et en déduire la solution générale du système. (0,5 pt)
- Préciser la solution particulière pour laquelle on a : $y = 1$ et $z = -1$ pour $x = 0$. (0,25 pt)

Partie C : 1,5 point

Dans le plan affine euclidien rapporté au repère orthonormé, on considère l'application affine f définie par :

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{5}(-3x + 4y + 4) \\ y' = \frac{1}{5}(4x + 3y - 2) \end{cases}$$

- Démontre que f est une isométrie. (0,5 pt)
- Trouve l'ensemble des points invariants par f. (0,5 pt)
- Caractérise géométriquement l'application f. (0,5 pt)

Exercice 2 : 4,5 Points

Un sac contient dix boules indiscernables au toucher. Cinq boules sont blanches dont une porte le numéro 0, une le numéro 1 et trois le numéro 2. Cinq boules sont noires dont quatre portent le numéro 2 et une le numéro 3.

1. On tire au hasard simultanément trois boules du sac. Calculer les probabilités des événements suivants :
 - A : « Toutes les boules sont blanches » (0,5 pt)
 - B : « Les boules sont de couleurs différentes » (0,5 pt)
 - C : « On obtient la boule numérotée 0 » (0,5 pt)
 - D : « Les numéros des boules sont pairs » (0,5 pt)
2. Dans cette partie, on enlève du sac la boule numérotée 0. L'épreuve est maintenant la suivante : du sac contenant les neuf boules restantes, on tire au hasard, successivement et avec remise deux boules. On note par a le numéro apparu sur la boule, b le numéro apparu sur la deuxième et $d = \text{PGCD}(a, b)$ le plus grand commun diviseur de a et b .
 - a. Démontre que l'ensemble des valeurs prise par d est $D = \{1, 2, 3\}$. (0,5 pt)
 - b. Pour tout $k \in D$, on désigne par E_k l'ensemble des couples (a, b) tel que $d = k$, c'est-à-dire :
 $E_k = \{(a, b) / \text{PGCD}(a, b) = k\}$.
 On note par P_k la probabilité de E_k .
 Montrer que $P_1 = \frac{31}{81}$, puis détermine P_2 et P_3 . (1 pt)
 - c. Calculer la probabilité de l'événement E : « l'équation $ax + by = 2$, d'inconnues (x, y) de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ admet des solutions ». (0,5 pt)
 - d. Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation : $3x + 2y = 2$. (0,5 pt)

PROBLEME 09 Points

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :
$$\begin{cases} f(x) = x^2 + 1 - 2\ln x & \text{si } x \in]0; 1[\\ f(x) = (3x - 3)e^{-x} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

On note par (C) sa courbe dans un repère orthonormé d'unité graphique 4 cm.

Partie A 5,25 points

1. a) Démontrer que f est contenue au point d'abscisse 1. (0,5 pt)
 b) Etudier la dérivabilité de f au point d'abscisse 1. (0,75 pt)
2. a) Etudier, suivant les valeurs de x , le sens de variation de f . (0,75 pt)
 b) Dresser alors le tableau de variation de f . (0,5 pt)
3. a) Démontrer que f admet un unique point d'inflexion I que l'on précisera. (0,75 pt)
 b) Déterminer l'équation de la tangente (T) à (C) au point I . (0,5 pt)
 c) Tracer (T) et (C) dans le même repère en précisant les demi-tangentes au point d'abscisse 1. (1,5 pt)

Partie B 3,75 points

Pour tout réel λ tel que $0 < \lambda < 1$, on pose $I(\lambda) = \int_{\lambda}^1 f(t) dt$.

Quels que soient les entiers n et k tels que : $n \geq 2$ et $1 \leq k \leq n - 1$; on pose $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$

1. a) A l'aide d'une intégration par parties, $I(\lambda)$ en fonction de λ . (0,5 pt)
 b) Calcule alors $\lim_{\lambda \rightarrow 0} I(\lambda)$. (0,25 pt)
2. a) Démontrer que $\frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t) dt \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$. (1 pt)
 b) En déduire que $\frac{1}{n} \sum_{k=2}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_{\frac{1}{n}}^1 f(t) dt \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$. (0,5 pt)
 c) Démontrer alors que $I\left(\frac{1}{n}\right) \leq S_n \leq I\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right)$. (0,75 pt)

d) Détermine $\lim_{t \rightarrow 0} tf(t)$.

(0,25 pt)

e) Calculer ainsi $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$.

(0,5 pt)

NB : Pour la construction, on prend $e^{-1} = 0,4$; $e^{-2} = 0,2$ et $e^{-3} = 0,05$.