

Prebac n°2

Classe : TSE

Année : 2022 - 2023

Exercice 1 : -----□

- 1) On considère dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, l'équation (E) : $5x - 16y = 12$
 - a) Vérifier que $(-4 ; -2)$ est solution de (E).
 - b) Résoudre alors l'équation (E).
- 2) Pour tout entier, on pose $a = 3k + 2$ et $b = 4k + 1$
Montre que $a \wedge b = 5 \Leftrightarrow k \equiv 1[5]$
- 3) Soit $n \in \mathbb{N}$, Montrer que $\begin{cases} n \equiv 13[16] \\ n \equiv 1[5] \end{cases} \Leftrightarrow n \equiv 61[80]$
- 4) a) Vérifier que 13 est un inverse de 5 modulo 16.
b) Montrer que $5u \equiv 1[16] \Leftrightarrow u \equiv 13[16]$
- 5) Déterminer l'ensemble des entiers k tels que : $\begin{cases} a \wedge b = 5 \\ b^2 - a \equiv 0[16] \end{cases}$

Exercice 2 : -----□

- A. 1) Démontre par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N} : 5^{3n} - 3^{3n}$ est divisible par 49.
2) Dédus-en que si l'entier n n'est pas multiple de 3 alors $\forall n \in \mathbb{N} : 5^{2n} + 15^n + 3^{2n}$ est divisible par 49.

B. Démontre par récurrence que :

$$a) (n+1)! \geq \sum_{i=1}^n i! ; \quad b) \sum_{i=1}^n i \times i! = (n+1)! - 1$$

C. Résous dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $3u - 7v = 1$. (1 pt)

1. Résous dans $\mathbb{Z}$ le système : $\begin{cases} t \equiv 1[3] \\ t \equiv 2[7] \end{cases}$ (0,5 pt)

2. Fatoumata dit qu'elle a entre 200 et 210 bâtonnets.

Si elle fait des tas de 3 bâtonnets, il lui en reste 1.

Si elle fait des tas de 7 bâtonnets, il lui en reste 2.

Trouve le nombre de bâtonnets de Fatoumata. (0,75 pt)

Problème : -----[10 points]

Dans cette activité, n un entier naturel non nul et on considère la famille de fonctions f_n définie sur $\mathbb{R}$

$$\text{par : } \begin{cases} f_n(x) = \frac{(x+1)^{2n}}{1-e^{x+1}}, x \neq -1 \\ f_n(-1) = 0 \end{cases}$$

Pour les représentations graphiques, le plan est muni d'un repère orthonormé d'unité graphique 2cm, et on note $(\mathcal{C}_n)$ la courbe représentative de la fonction f_n .

Partie A

Pour tout entier n différent de zéro, on considère la fonction g_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g_n(x) = (-2n + x + 1)e^{x+1} + 2n.$$

1. a) Calcule $\lim_{x \rightarrow -\infty} g_n(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g_n(x)$.

b) Donne le sens de variation de g_n puis dresse son tableau de variation.

2. a) Calcule $g_n(-1)$ et déduis-en que : $2n - e^{2n-1} < 0$ pour tout n différent de zéro.

- b) Démontre que l'équation $g_n(x) = 0$ admet une solution unique α_n appartenant à l'intervalle $]2n - 2; +\infty[$.
- c) Démontre que l'équation α_n admet une solution unique α_n appartenant à l'intervalle $]2n - 2; 2n - 1[$ puis déduis-en que la suite $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ est décroissante.

3. a) Détermine le signe de g_n suivant les valeurs de x .
- b) Détermine les coordonnées du point M_n ou la courbe représentative de la fonction g_n admet un extremum et déduis-en que le point M_n appartient à une courbe dont on donnera une équation.

Partie B

- 1) a) Etudie la continuité de f_n en -1 .
- b) Etudie la dérivabilité de f_n en -1 . (On distinguera deux cas : $n = 1$ et $n > 1$).
- 2) a) Calcule les limites de f_n en $-\infty$ et en $+\infty$.
- b) Calcule la dérivée de f_n et vérifie que pour tout réel x différent de -1 , on a :
- $$f'_n(x) = \left[\frac{(x+1)^{n-1}}{1 - e^{x+1}} \right]^2 \times (x+1)g_n(x)$$
- c) Donne le sens de variations de f_n puis dresse son tableau de variation pour $n > 1$.
- 3) a) Démontre que les courbes (C_2) et (C_3) ont trois points communs A, B et C que l'on déterminera.
- b) Etudie les positions relatives des courbes (C_2) et (C_3) puis les construis sur un même graphique.

Partie C

p est un entier naturel fixé, supérieur ou égal à 1.

Soit h_p la fonction définie sur l'intervalle $I_p = [2p - 2; 2p - 1]$ par :

$$h_p(x) = 2p - 1 - \frac{2p}{e^{x+1}}$$

On considère la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2p - 2 \\ u_{n+1} = h_p(u_n) \end{cases} \text{ pour tout entier } n \text{ et on pose pour tout entier naturel } n \text{ non nul : } v_n = \int_{-1}^{-1+\frac{1}{n}} f_n(x) dx.$$

- 1.) Démontre que pour tout x de I_p , les équation $g_p(x) = 0$ et $h_p(x) = x$ sont équivalentes.
- 2.) En utilisant la partie A, 2.a), montre que pour tout $x \in I_p$, on a :
- $$h_p(x) \in I_p \text{ et } |h'_p(x)| \leq \frac{2p}{e^{2p-1}} < 1.$$
- 3.) On pose : $k_p = \frac{2p}{e^{2p-1}}$
- a) Démontre que pour tout $n, u_n \in I_p$.
- b) Démontre que tout n , on a :
- $$|u_{n+1} - \alpha_p| \leq k_p |u_n - \alpha_p|.$$
- Puis déduis-en que $|u_n - \alpha_p| \leq (k_p)^n$ et que la suite (u_n) est convergente. Quelle est sa limite ?
- 4.) a) Justifie l'existence de (v_n) .
- b) Montre que pour tout $n \geq 1, v_n \leq 0$.
- c) Montre que (v_n) est croissante ; que peut-on en déduire ?
- 5.) a) En utilisant les variations de f_n sur l'intervalle $[-1; 0]$, montre que : $\frac{1}{1-e} \leq f_n(x) \leq 0$.
- b) Déduis-en que pour tout $n \geq 1, \frac{1}{1-e} \times \frac{1}{n} \leq v_n \leq 0$.
- c) Etudie la convergence de (v_n) .