

BAC BLANC 2023-2024

Epreuve de : MATHEMATIQUES

SERIE : TSE

Durée : 4h

*La clarté et la rédaction de la copie seront prises en compte !!!*Exercice 1 :

- 1.) Détermine le module et un argument de chacun des nombres complexes ci-dessous ; puis les écrire sous la forme trigonométrique $\rho(\cos \theta + i \sin \theta)$ avec $\rho \in \mathbb{R}$; $\theta \in \mathbb{R}$.

$$Z_1 = -2(\sin x + i \cos x) ; Z_2 = -3e^{-i\frac{2\pi}{3}} ; Z_3 = \frac{-\cos 2x + i \sin 2x}{2 \cos 3x - 2i \sin 3x}$$

- 2.) Déterminer les suites d'entier rationnels de raison 6 dont le produit des 4 premiers termes est 385.
- 3.) Un lot à usage d'habitation a la forme d'un trapèze dont les deux bases mesurent respectivement 30m et 21m ; les deux autres côtés mesurent 18m et 12m. pour la clôture, le propriétaire a besoin des poteaux de support à égale distance mesurée en nombre entier de mètres pour un nombre minimum de poteaux, avec un poteau à chaque sommet.
- Quelle est la distance entre deux poteaux ?
 - Déterminer le nombre de poteaux nécessaire à la clôture.

Exercice 2 :

- 1.) Soit (U_n) la suite numérique définie par $U_0 = 0$ et pour $n \geq 1$. $U_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$.
- Montrer que pour tout entier naturel n : $\frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) + \ln(n) \leq \frac{1}{n}$

(On pourra appliquer l'inégalité des accroissements finis à la fonction qui à x associe $\ln x$ sur l'intervalle $[n ; n+1]$).

- En déduire que pour tout entier naturel non nul n on a : $U_n \geq \ln(n+1)$ puis calculer la limite de (U_n) quand n tend vers $+\infty$.
- Le plan affine euclidien $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormé et $\mathbb{C}$ est le corps des nombres complexes. A tout points $M(x ; y)$ d'affixe z l'application f associe le point $M'(x' ; y')$ d'affixe z' tel que :

$$\begin{cases} x' = x - y - 1 \\ y' = x + y - 1 \end{cases}$$
 - f est-elle bijective ? si oui, pourquoi ?
 - f est-elle une isométrie ? si oui, f est-elle un déplacement ou un antidéplacement ?
 - Exprime z' en fonction de z puis détermine les éléments caractéristiques de f .
 - Soit A le point d'affixe $3+i$, détermine l'affixe du point $A' = f(A)$.

PROBLEME

Pour tout entier naturel n , on considère la fonction $f_n(x) = \frac{e^{-nx}}{e^x + 1}$. On désigne par (C_n) la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique 2cm). On considère en outre la suite (U_n) définie par $U_n = \int_0^1 f_n(x) dx$.

PARTIE A

Etude de la fonction f_n .

- 1.) Existe-t-il au moins un point par lequel toutes les courbes de f_n passent ? si oui, pourquoi ? puis détermine le(s).
- 2.) On suppose $n=0$
 - a.) Détermine Df_0 puis étudie les limites aux bornes de Df_0 ;
 - b.) Etudies les variations de f_0 puis dresser son tableau de variations.
 - c.) Montre que le point $I(0; \frac{1}{2})$ est centre de symétrie de (C_0) ;
 - d.) Trace la courbe (C_0) , en précisant sa tangente en I .
 - e.) Hachure la partie U_0 .
- 3.) On suppose que $n>0$;
 - a.) Etudie les limites de f_n en $+\infty$ et en $-\infty$;
 - ☒ b.) Montre que f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifie que ; pour tout x , on a :
$$f'_n(x) = \frac{-e^{-nx}(n+(n+1)e^x)}{(e^x+1)^2}$$
 - c.) Etudie le sens de variations de f_n puis dresse son tableau de variations.
 - d.) Vérifie que le point I appartient à toutes les courbes (C_n) .
 - e.) Trace (C_1) dans le même repère que (C_0) , en précisant sa tangente en I .
- 4.) Interprète géométriquement U_n puis démontre que $U_0 = \ln\left(\frac{2e}{e+1}\right)$
(On remarquera que $\frac{1}{e^x+1} = \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$)

PARTIE B

Etude de la suite (U_n)

Dans cette partie, n et p désignent des entiers naturels non nuls.

- 1.) Etude d'une suite auxiliaire (V_n)
Pour tout n , on pose $V_n = \int_0^1 e^{-nx} dx$
 - a.) Calcule V_n ;
 - b.) Détermine les limites de V_n et nV_n .
- 2.) Comparaison de (U_n) à (V_n)
 - ☒ a.) Etablir que, pour tout x appartenant à $[0; 1]$, on a : $2 \leq e^x + 1 \leq 2e^x$
 - ☒ b.) En déduis que pour tout n , on a : $\frac{1}{2}V_{n+1} \leq U_n \leq \frac{1}{2}V_n$
 - c.) Détermine $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$ puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} nU_n$

PARTIE C

Etude d'une suite associée à (U_n)

On pose : $S_n = \sum_{p=1}^n U_p$ et $t_n = \sum_{p=1}^n V_p$

-) Montre que : $0 \leq \sum_{p=1}^n \frac{e^{-p}}{p} \leq \frac{1}{e-1}$ (On observera que, pour tout p , on a : $\frac{e^{-p}}{p} \leq e^{-p}$)
-) En utilisant l'inégalité de la moyenne sur l'intervalle $[p ; p+1]$, montre qu'on a :
- $$\frac{1}{p+1} \leq \int_p^{p+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{p} \text{ et par suite } \frac{1}{p+1} \leq \ln(p+1) - \ln p \leq \frac{1}{p}.$$
-) En déduis que, pour tout n , on a : $\ln(n+1) \leq \sum_{p=1}^n \frac{1}{p} \leq \ln n + 1.$
-) Montre, en utilisant a. et c. que $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = +\infty$, puis détermine $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{t_n}{\ln n}.$
- Que peut-on déduis pour S_n ?