

**EXAMEN :****BACCALAUREAT BLANC****COMITE : CPREQUAM****SPECIALITE : T.S.E & S.T.I****SESSION DE MAI 2024****EPREUVE : MATHÉMATIQUES | COEFF : 04 | DUREE : 04 HEURES | DATE : 25/05/2024**

Le sujet est composé de deux exercices et un problème tous obligatoires. Il comprend deux pages de 1/2 à 2/2. La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies. Les propriétés ou résultats demandés dans le sujet pourront être utilisés même si le candidat ne réussit pas leur démonstration. Les calculatrices non programmables sont autorisées.

**EXERCICE 1 (5 points)**

- 1) a) Quelle est le nombre de diviseurs positifs de 240 ? (0,25 pt)  
 b) Trouve les diviseurs dans  $\mathbb{N}$  de l'entier 240. (0,5 pt)  
 c) Calcule l'entier naturel  $n$  tel que  $n^2 - 240$  est un carré parfait. (0,5 pt)
- 2) Pour quelles valeurs de l'entier naturel  $n$ , le nombre  $\frac{2n+18}{n+3}$  est-il un entier naturel ? (0,75 pt)
- 3) La division de 900 par un entier naturel  $b$  pour quotient 14 et reste  $r$ . Quelles sont les valeurs possibles de  $b$  et  $r$ . (0,75 pt)
- 4) L'expression d'un entier naturel  $n$  dans une base  $b$  est  $\overline{1254}$ . On sait de plus que l'expression de  $2n$  dans la même base est  $\overline{2541}$ .  
 a) Détermine les valeurs de  $b$  et de  $n$  en base décimale. (0,5 pt)  
 b) Détermine les expressions en base  $b$  de  $3n$  et  $4n$ . (0,75 pt)
- 5) 469 est-il un nombre premier ? (0,25 pt)
- 6) Démontre par récurrence :  $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n (2k+1) = (n+1)^2$  (0,75 pt)

**EXERCICE 2 : (5 pts)**

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ , on donne les points A et B d'affixes respectives 1 et  $1 - \frac{i\sqrt{3}}{2}$

Pour chaque point M du plan, d'affixe Z,  $M_1$  d'affixe  $Z_1$  désigne l'image de M par la rotation de centre O et d'angle  $\frac{\pi}{3}$ , puis M' d'affixe  $Z'$  l'image de  $M_1$  par la translation de vecteur  $-\vec{u}$ .

Enfin on note T la transformation qui à chaque point M associe le point M'.

1. a) Démontrer que  $Z' = e^{i\frac{\pi}{3}}Z - 1$  (0,5 pt)  
 b) Déterminer l'image du point B par T. (0,5 pt)  
 c) Montrer que T admet un unique point invariant dont on précisera l'affixe. (0,5 pt)
2. On pose  $Z = x + iy$ , avec  $x$  et  $y$  des réels.  
 a) Pour Z non nul, calculer la partie réelle du quotient  $\frac{Z'}{Z}$  en fonction de  $x$  et de  $y$ . (0,5 pt)  
 b) Démontrer que l'ensemble (E) des points M du plan tels que le triangle OMM' soit rectangle en O, est un cercle (C), dont on précisera le centre et le rayon, privé de deux points. (0,5 pt)  
 c) Tracer (E). (0,75 pt)
3. Dans cette question on pose  $Z = 1 + i$ .  
 a) Vérifier que M appartient à (E). Placer M et M' sur la figure. (0,5 pt)  
 b) Calculer le module de  $Z'$ . (0,5 pt)  
 c) Calculer l'aire, en  $\text{cm}^2$ , du triangle OMM'. (0,5 pt)

**Problème : (10 pts)**

On considère la fonction numérique f définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = 2x + 1 - xe^{x-1}$

On note C sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

### A) Etude de la fonction f et construction de la courbe C.

- 1) Etudier la limite de la fonction f en  $-\infty$  puis en  $+\infty$  (on pourra écrire  $xe^{x-1} = \frac{1}{e}xe^x$ ). (0,5 pt)
- 2) Démontrer que la droite  $\Delta$  d'équation  $y = 2x + 1$  est asymptote à la courbe C en  $-\infty$  et préciser la position de la courbe C par rapport à la droite  $\Delta$ . (0,5 pt)
- 3) a) Calculer la dérivée f' et la dérivée seconde f'' de la fonction f. (0,5 pt)  
b) Dresser le tableau de variation de la fonction f' en précisant la limite de la fonction f' en  $-\infty$ . (0,75 pt)  
c) Calculer f'(1) et en déduire le signe de f'(x) pour tout réel x. (0,5 pt)  
d) Dresser le tableau de variation de la fonction f. (0,5 pt)
- 4) Soit I l'intervalle  $[1,9 ; 2]$ . Démontrer que, sur I, l'équation  $f(x) = 0$  a une solution unique,  $\alpha$ . (0,5 pt)
- 5) Tracer la droite  $\Delta$  et la courbe C (unité graphique : 2 cm). (1,5 pts)

### B) Recherche d'une approximation de $\alpha$ :

On considère la fonction g définie sur l'intervalle I par :  $g(x) = 1 + \ln\left(2 + \frac{1}{x}\right)$ .

- 1) Démontrer, sur I, l'équation  $f(x) = 0$  équivaut à l'équation  $g(x) = x$ . (0,25 pt)
- 2) Etudier le sens de variation de la fonction g sur I et démontrer que, pour tout x appartenant à I, g(x) appartient à I. (1 pt)
- 3) Démontrer que, pour tout x de l'intervalle I,  $|g'(x)| \leq \frac{1}{9}$  (0,5 pt)
- 4) Soit  $(U_n)$  la suite de nombres réels définie par :  $U_0 = 2$  et, pour tout n de N,  $U_{n+1} = g(U_n)$ .

On déduit de la question B. 2. que tous les termes de cette suite appartiennent à l'intervalle I. On ne demande pas de le démontrer.

- a) Démontrer que, pour tout n de N,  $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{9}|U_n - \alpha|$  (0,5 pt)
- b) En déduire, en raisonnant par récurrence que : Pour tout n de N,  $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{9}\right)^n \times \frac{1}{10}$  (0,5 pt)
- c) En déduire que la suite  $(U_n)$  converge et préciser sa limite. (0,5 pt)

### C) Calcul d'aire :

- 1) En intégrant par parties, calculer l'intégrale  $J = \int_1^{\alpha} xe^{x-1} dx$  (0,5 pt)
- 2) a) Déterminer, en unités d'aire, l'aire A de la portion de plan limitée par la courbe C, l'axe des abscisses, la droite d'équation  $x = 1$  et la droite d'équation  $x = \alpha$ . (0,5 pt)
- a) Démontrer qu'on peut écrire  $A = (\alpha - 1) \left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right)$ . (0,5 pt)