



EXAMEN DE BACCALAURÉAT BLANC

SESSION DE MAI 2024

Épreuve : Mathématiques

Série : TSE

Durée : 4 heures

Coefficient : 4

EXERCICE 1

(5 points)

I- On considère dans $\mathbb{Z}$, le système $(S) : \begin{cases} X \equiv 7[21] \\ X \equiv 11[13] \end{cases}$

1- Vérifie que $x_0 = 154$ est solution particulière de (S) **0.5pt**

2- Résous alors le système (S) . **1pt**

3- **Situation** : Une marchandise est emballée dans des cartons de **21 pièces**, le dernier carton ne contient que **7 pièces** et si elle est emballée dans des cartons de **13 pièces**, le dernier carton contiendra seulement **11 pièces**.

Tâche : Détermine tous les nombres possibles de pièces de cette marchandise sachant que ce nombre est inférieur à **1000**. **0.75pt**

II- On se place dans le plan $(\mathcal{P})$, soit $ABCD$ un Carré de côté **4 cm**

Pour tout point M du plan on considère le nombre réel $f(M) = MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2$

1- Détermine le signe de $f(M)$ **0.25pt**

2- Soit le point G barycentre du système $\{(A, 1); (B, 1); (C, 1); (D, 1)\}$

Recopie et remplis le tableau ci-dessous : **0.5pt**

G existe t-il ? Pourquoi ?	Comment appelle t-on G techniquement ?	G obéit-il à quelle relation vectorielle ?

3- Construis le point G . **0.5pt**

4- a- Montre que pour tout point M du plan $f(M) = 4MG^2 + 32$ **1pt**

b- Détermine et construis l'ensemble (E) des points M du plan tels que $f(M) = 48$ **0.5pt**

EXERCICE 2

(5 points)

I- On considère le complexe $a = 2 + \sqrt{2} + i\sqrt{2}$

1- Montre que $|a| = 2\sqrt{2 + \sqrt{2}}$ **0.5pt**

2- a- Montre que $a = 2\left(1 + \cos\frac{\pi}{4}\right) + 2i\sin\frac{\pi}{4}$ **0.25pt**

b- En déduire que $a = 4\cos^2\frac{\pi}{4} + 4i\left(\sin\frac{\pi}{8}\right)\left(\cos\frac{\pi}{8}\right)$ **0.5pt**

c- Prouve par déduction que l'écriture complexe de $a = 4\cos\frac{\pi}{8}\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\right)$ **0.25pt**

3- Montre que $a^4 = i\left(2\sqrt{2 + \sqrt{2}}\right)^4 = 16i(6 + 4\sqrt{2})$ **0.5pt**

II- On considère le plan (p) rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit l'application f qui à tout

point $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ associe $M' \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ tel que $f(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} x' = \frac{1}{13}(10x - 24y - 18) \\ y' = \frac{1}{13}(-24x - 10y + 25) \end{cases}$

1- Montre que f est bijective. **0.25pt**

2- Détermine l'ensemble des points invariants par f . **0.5pt**

3- On pose dans $\mathbb{C}$, $Z = x + iy$ et $Z' = x' + iy'$

a- Exprime Z' en fonction de $\bar{Z}$ **0.5pt**

b- En déduire la nature de f . **0.25pt**

4- Soit l'homothétie h et S la symétrie orthogonale définie respectivement par

$$h(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} x' = 2x - 2 \\ y' = 2y + 1 \end{cases} \quad S(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} x' = \frac{1}{13}(5x - 12y + 4) \\ y' = \frac{1}{13}(-12x - 5y + 6) \end{cases}$$

a- Montre que pour tout point M du plan, $So h(M) = f(M)$ **0.75pt**

b- Déduire des questions précédentes les éléments caractéristiques de f . **0.75pt**

PROBLEME

----- (10 points)

PARTIE A

----- (5 points)

Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on définit sur $\mathbb{R}$ la fonction numérique f_n par : $f_n(x) = \frac{(1-x)^n e^x}{n!}$

On note (C_n) sa courbe représentative dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ orthonormé. Unité graphique 2 cm

1- Détermine le domaine de définition Df_n et calcule les limites en fonction de la parité de n . **1pt**

2- a- Montre que $\forall x \in Df_n, f'_n(x) = \frac{(1-x-n)(1-x)^{n-1} e^x}{n!}$ **0.5pt**

b- En déduire le tableau de variations de f_n selon la parité de n . **1pt**

3- Dresse le tableau de variation de f_1 et f_2 **0.5pt**

4- Précise les positions relatives des courbes (C_2) et (C_1)

5- Construis dans le même repère les courbes (C_2) et (C_1) . **1pt**

6- a- Vérifie que pour tout réel x on a : $f'_2(x) = f_2(x) - f_1(x)$ **0.5pt**

b- En déduire l'aire du domaine limité par (C_1) ; (C_2) et les droites $x = -1$ et $x = 1$ **0.5pt**

PARTIE B

----- (5 points)

I- Pour $n \in \mathbb{N}$, On pose $V_n = \int_1^2 f_n(x) dx = \frac{1}{n!} \int_1^2 (1-x)^n e^x dx = \frac{(-1)^n}{n!} \int_1^2 (x-1)^n e^x dx$

1- Calcule V_1 par parties **0.75pt**

2- Etablis que $0 \leq \int_1^2 (x-1)^n e^x dx \leq e^2$ **0.5pt**

3- En déduire que pour tout $n \geq 1$, $|V_n| \leq \frac{e^2}{n!}$ puis détermine $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n$ **0.75pt**

4- Démontre que pour tout $n \geq 1$ on a : $f'_n(x) = f_n(x) - f_{n-1}(x)$ **0.5pt**

5- En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout réel, $f_n(x) = f_0(x) + f'_1(x) + \dots + f'_n(x)$ **0.5pt**

II- Pour $n \in \mathbb{N}$, On désigne par (I_n) la suite définie par $I_n = \int_a^1 f_n(x) dx$ $0 \leq a < 1$

1- Démontre que $\forall n \in \mathbb{N}$, on a : $0 \leq I_n \leq \frac{(1-a)^{n+1}}{n!} e^a$ puis en déduire que la suite (I_n) . **0.75pt**

2- A l'aide d'une intégration par parties, montre que pour $n \geq 0$, $I_{n+1} = I_n - \frac{(1-a)^{n+1}}{(n+1)!} e^a$ **0.75pt**

3- En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = I_0 - \left[\frac{(1-a)^1}{1!} + \frac{(1-a)^2}{2!} + \dots + \frac{(1-a)^n}{n!} \right] e^a$ **0.5pt**