

Mini-Bac : N°1
Durée :4H
Classe :T.S.E
Tel :83-55-24-10

Epreuve de : Mathématiques



Coef :4
Date :02-12-2023

Exercice.....(5 Points)

Dans un système de numération de base a , on considère les nombres

$$A = \overline{211}, B = \overline{312}, C = \overline{133032}.$$

1. Explique pourquoi a doit être strictement supérieur à 3.
2. a. Sachant que $C = A \times B$, montre que $a^3 - 3a^2 - 2a - 8 = 0$.
b. En déduis que a divise 8.
c. Détermine alors a .
3. L'écriture d'un nombre dans le système décimal est 214, écris ce nombre dans la base quatre.
4. Dans cette question on suppose que $a = 4$.
a. Ecris A, B et C dans le système décimal.
b. Montre alors que $C = A \times B = \text{PPCM}(A, B)$. En déduis que l'équation :
 $Ax + By = 1$ admet au moins une solution dans $\mathbb{Z}^2$.
5. On considère dans $\mathbb{Z}^2$, l'équation $37x + 54y = 1$.
a. Vérifie que $(19 ; -13)$ est une solution de cette équation. (0,25 pt)
b. Résous cette équation dans $\mathbb{Z}^2$.

Exercice.....(5 Points)

Dans le plan rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$ d'unité 4cm , on donne :

$z_A = a = 1 - i$; $z_B = b = 1 + i$; $z_C = c = -1 + i$. (C) est le cercle de diamètre $[AB]$.

1. a. Faire une figure.
- b. Donner les complexes a ; b et c sous forme trigonométrique.
2. Soit r la rotation de centre $O(0; 0)$ telle que $r(A) = B$.
 - a. Déterminer l'angle et $r(B)$ sans déterminer l'expression complexe de r .
 - b. Déterminer puis construire $r[(C)] = (C')$.
3. On considère un nombre $\theta \in]0; 2\pi[$ distinct de π ; M un point tel que :
 $z_M = 1 + ie^{i\theta}$ et $M' = r(M)$ tel que $z_{M'} = z'$.
 - a. Prouver que M est un point de (C) distinct de A et B .
 - b. Donner l'expression de z' en fonction de z .
 - c. Ecrire $z_{\overrightarrow{BM}} = u$ et $z_{\overrightarrow{BM'}} = u'$ en fonction de θ .
 - d. Prouver que $u = u' \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$.

Problème.....(10 Points)

I. Soit A le point d'affixe $2i$ et f l'application du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z , distinct de A , associe le point M' d'affixe z' telle que :

$$z' = \frac{2iz-5}{z-2i}.$$

1. Démontrer que f admet deux points invariants.
2. Démontrer que f est bijective et déterminer son application réciproque.
3. Démontrer que la droite de repère $(O, \overrightarrow{e_2})$, privée de A , est globalement invariante par f .
4. a. Démontrer que : $|z' - 2i| \times |z - 2i| = 9$.
- b. En déduire l'image par f du cercle (C) de centre A et de rayon R .
- c. Déterminer R pour que (C) soit globalement invariant par f .

II. Soient A et B les points d'affixes respectives 1 et -1 et f l'application du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z non nulle associe le point M' d'affixe z' telle que : $zz' = 1$.

- a. Déterminer et construire l'image par f du point C d'affixe $1 + i$.
- b. Démontrer que pour tout point M et son image M' , la droite (AB) est bissectrice de l'angle $\widehat{MOM'}$ et que $OM \times OM' = OA^2$.

a. Vérifier que : $\forall z \in \mathbb{C}^*, \left(\frac{z+z'}{2} - 1\right) \left(\frac{z+z'}{2} + 1\right) = \left(\frac{z-z'}{2}\right)^2$.

b. Soit I le milieu de $[MM']$. Démontrer que $IA \times IB = IM^2$.

III. Un lot à usage d'habitation a la forme d'un trapèze dont les deux bases mesurent respectivement $30m$ et $21m$; les deux autres cotés mesurent $18m$ et $12m$.

Pour clôturer, le propriétaire a besoin des poteaux, avec un poteau à chaque sommet.

1. Quelle est la distance entre deux poteaux ?
2. Déterminer le nombre de poteaux nécessaires à la clôture.

Bonne chance !

« A cœur vaillant, rien n'est impossible »

Mini-Bac est une évaluation portant sur toutes les leçons précédemment vues permettant aux élèves d'une révision générale graduelle