

Lycée privé (L.P.A.K) de Banankabougou

Année Scolaire :2023-2024

Pré-bac : TSE Sujet N° 1

Exercice 1 : (4 points)

Soit la (u_n) suite définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{3u_n - 2}{2u_n - 1} \end{cases}$

- Calcule u_1 ; u_2 et u_3 .
 - Montre que $u_{n+1} = 1 + \frac{u_n - 1}{2u_n - 1}$.
 - En déduire par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N} \ u_n > 1 > \frac{1}{2}$.
2. Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, la suite définie par $v_n = \frac{1}{u_n - 1}$.
- Montre que la suite (v_n) est une arithmétique dont on précisera la raison et le 1^{er} terme.
 - Ecrire v_n en fonction de n .
 - En déduire l'expression de u_n en fonction de n .

Exercice 2 : (5,5 points)

- Trouve dans le système décimal un entier $N = abcd$ divisible par 45 et tel que le couple $(b; c)$ soit solution de l'équation $x^2 - y^2 = 24$.
- On considère l'équation $(E) : (p; q) \in \mathbb{Z}^2, 11p - 7q = -4$.
 - Vérifie que le couple $(-1; -1)$ est une solution de (E) .
 - Résoudre les équations (f) et (g) suivantes :
 $(f): x \in \mathbb{Z}, 2x \equiv 3[7] \quad (g): x \in \mathbb{Z}, 9x \equiv 4[11]$.
 - Déduire des questions 2) a) et b) la solution du système $\begin{cases} 2x \equiv 3[7] \\ 9x \equiv 4[11] \end{cases}, x \in \mathbb{Z}$.
- Un nombre n s'écrit $2^\alpha 3^\beta$. Le nombre de diviseurs de $12n$ est le double du nombre de diviseurs de n .
 - Montre que l'on a : $\beta(1 - \alpha) = 4$.
 - En déduire n .

Problème : (10,5 points)

I-1. Soit la fonction g définie sur l'intervalle $] 0; + \infty[$ par : $g(x) = x - 1 - \ln x$.

- Calcule $g'(x)$ pour tout $x \in] 0; + \infty[$
 - Montre que pour tout $x \in] 0; + \infty[\ g(x) \geq 0$.
2. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0; + \infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = x^2 - x \ln x, & x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

On désigne par $(\mathcal{T})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(o; \vec{i}; \vec{j})$.

- Justifie que f est continue à droite en 0.

Lycée privé (L.P.A.K) de Banankabougou

Année Scolaire :2023-2024

Pré-bac : TSE-TSI Sujet N° 2

Durée : 4h

Exercice 1 :.....(5 points)

On considère un entier n dont la décomposition en produit de facteurs premier est : $n = 2^\alpha \times 3 \times 19^\beta$ où α et β sont deux entiers naturels tels que $\alpha < \beta$ et $(\alpha + 1)(\beta + 1) = 8$.

1. Détermine l'entier naturel n .
2. Détermine l'ensemble des diviseurs de 456.
3. On considère l'équation suivante $(E): x^2 - \lambda x = 456$, λ étant un paramètre entier naturel. Détermine l'ensembles des valeurs de λ pour lesquelles (E) a des solutions dans $\mathbb{N}$.
4. Résous dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, l'équation d'inconnue $(x; y)$ définie par : $x^2 + 6x = y^2 + 232$.
5. Soit $(x; y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tels que : $x + y = 651$ et sachant que le quotient de leur PPCM(m) et leur PGCD(d) égal à 108, détermine x et y .
6. Démontre par récurrence la propriété suivante : $\forall \epsilon \in \mathbb{N}, 2^n > n$.

Exercice :.....(5 points)

1. Résoudre $\mathbb{R}$ dans l'inéquation suivante : $x - \ln(2e^x + 1) \leq 0$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système : $\begin{cases} e^x - 2e^y = 1 \\ x - y = \ln 3 \end{cases}$.
3. a. Vérifie que la fonction $G: x \mapsto \cos x + x \sin x$ est une primitive de la fonction $g: x \mapsto x \cos x$ sur $\mathbb{R}$.
b. Montre que : $\frac{x}{1+x \tan x} = \frac{x \cos x}{\cos x + x \sin x}$ pour $x \in [-1; 1]$.
c. En déduire la valeur de l'intégrale $\int_0^1 \frac{x}{1+x \tan x} dx$.
4. On considère l'évènement A " Tirer deux cartes concernant la langue Bambara et l'évènement B " Tirer deux cartes concernant deux matières, différentes ".
a. Montre que $P(A) = \frac{1}{45}$ et $P(B) = \frac{16}{45}$.
b. Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le nombre de cartes tirées concernant la langue Bambara. Vérifie que les valeurs prises par la variable aléatoire X sont : 0, 1 et 2.
c. Montre que $P(X = 0) = \frac{28}{45}$ puis donne la loi de probabilité de la variable aléatoire X .

Problème :(10 points)

Partie A :

On considère la fonction numérique g de la variable réelle x définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x + e^{-x}$.

1. Calcule $g'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et donne les variations de la fonction g sur chacun des intervalles $] -\infty; 0]$ et $[0; +\infty[$ (le calcul de limite n'est pas demandé)
2. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R} : g(x) > 0$.

Partie B :

Exercice 1 :(05points)

On considère le nombres complexe : $u = 1 + (2 - \sqrt{3})i$

1. a. Ecrire sous forme exponentielle les nombres complexes suivantes : $1 - i$ et $1 + i\sqrt{3}$.

b. Montre que : $\frac{(1-i)(1+i\sqrt{3})}{2\sqrt{2}} = e^{i\frac{\pi}{12}}$ puis en déduire que : $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = 2 - \sqrt{3}$.

c. Montre que : $u = (\sqrt{6} - \sqrt{2})e^{i\frac{\pi}{12}}$.

2. On considère les deux suites numériques $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par :

$$x_0 = 1, y_0 = 0 \text{ et } (\forall n \in \mathbb{N}) ; \begin{cases} x_{n+1} = x_n - (2 - \sqrt{3})y_n \\ y_{n+1} = (2 - \sqrt{3})x_n + y_n \end{cases}$$

a. Montre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n + iy_n = u^n$.

b. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $x_n = \frac{\cos(\frac{n\pi}{12})}{\cos(\frac{\pi}{12})^n}$ et $y_n = \frac{\sin(\frac{n\pi}{12})}{\sin(\frac{\pi}{12})^n}$.

3. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{e}_1; \vec{e}_2)$. $\forall n \in \mathbb{N}$ On note A_n le point d'affixe u^n .

a. Détermine les entiers naturels n pour les quels les points O, A_0 et A_n sont alignés.

b. Montre que pour tout entier naturel n , le triangle OA_nA_{n+1} est rectangle en A_n .

4. Une urne contient : $\begin{cases} 5 \text{ boules blanches numérotées : } 1, 2, 2, 3, 3 \\ 5 \text{ boules noires numérotées : } 3, 3, 3, 4, 4 \end{cases}$ toutes les boules sont indiscernables au

Toucher. On tire simultanément trois boules de l'urne. On définit les événements suivants :

A : « Obtenir trois boules de même couleurs » et B : « le produit des numérotés obtenus est pair »

a. Calcule $P(A)$ et $P(B)$.

b. Montre que $P(A \cup B) = \frac{17}{20}$ et que $P(B/A) = \frac{9}{10}$.

c. Les événements A et B sont-ils indépendants ? Justifie ta réponse.

Exercice 2 :(4,5points)

Soit la suite $(U_n)_{n \geq 0}$ définie par : $\begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{n+1} = \sqrt{\frac{1}{2}U_n^2 + 2} \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}.$

1.a. Démontre, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n \geq 2$.

b. Démontre que pour tout $n \in \mathbb{N}$; $U_{n+1} - U_n = \frac{\frac{1}{2}(4 - U_n^2)}{U_{n+1} + U_n}$.

c. En déduire que la suite $(U_n)_{n \geq 0}$ est strictement décroissante.

2. Soit la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $V_n = U_n^2 - 4$ pour tout $n \geq 0$.

- a. Montre que (V_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ dont on déterminera le premier terme.
 - b. Exprime V_n en fonction de n . En déduire la limite de (U_n) quand n tend vers $+\infty$.
 - c. Montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = \sqrt{4 + 5 \left(\frac{1}{2}\right)^n}$.
 - d. En déduire la limite de (U_n) quand n tend vers $+\infty$.
3. a. Soit $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} U_k^2$. Montre que $S_n = 10 \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right] + 4n$.
 - b. Calcule $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{n}$.

Problème :(10points)

1. Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = \frac{1}{x} - 1 - 2\ln x$
 - a. Dresse le tableau de variation de g .
 - b. Calcul $g(1)$ et en déduire le signe de $g(x)$ pour tout $x \in]0; +\infty[$.
2. Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = \begin{cases} x - x^2 \ln x & \text{si } x \in]0; +\infty[\\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$
 Et on désigne par (C_f) la représentation graphique de f dans le plan muni d'un repère orthogonal $(o; \vec{i}; \vec{j})$.
 - a. Montre que f est continue à droite en 0.
 - b. Calcule $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x}$ puis interprète graphiquement cette limite.
 - c. Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interprète graphiquement les résultats obtenus.
2. a. Montre que pour $x \in]0; +\infty[$, on a : $f'(x) = x \times g'(x)$ puis dresse le tableau de variation de f .
 - b. Justifie que l'équation $f(x) = 0$ admet dans $]0; +\infty[$ une solution unique solution α et $1,7 < \alpha < 1,8$.
 - c. En déduire que $\ln \alpha = \frac{1}{\alpha}$.
4. a. Etudie la position relative de (C_f) par rapport à la droite $(\Delta) : y = x$.
 - b. Trace la droite (Δ) et la courbe (C_f) .
5. Soit $I_\alpha = \int_1^\alpha x^2 \ln x \, dx$.
 - a. Interprète géométriquement l'intégrale I_α .
 - b. A l'aide d'une intégration par parties, montre que : $I_\alpha = \frac{-\alpha^3 + 3\alpha^2 + 1}{9}$.
6. On considère la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} U_0 = \frac{1}{2} \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$.
 - a. Montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $0 < U_n < 1$.
 - b. Prouve que la suite (U_n) est croissante.
 - c. En déduire que la suite (U_n) est convergente et calcule sa limite

« Bonne chance dans la rigueur et l'effort personnel »

f est la fonction numérique de la variable réelle x par : $f(x) = \ln(x + e^{-x})$.

1. Vérifie que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.
2. a. Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
 b. Vérifie que pour tout $x \in \mathbb{R} : \frac{f(x)}{x} = \frac{\ln(g(x))}{g(x)} \left(\frac{1}{xe^x} + 1 \right)$.
 c. En déduire que (C_f) admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique dont on déterminera la direction.
3. a. Vérifie que pour tout $x \in \mathbb{R} f(x) = -x + \ln(1 + xe^x)$.
 b. Calcule $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, puis montre que la droite $(\Delta) : y = -x$ est une asymptote oblique de (C_f) en $-\infty$.
 c. Etudie la position relative de (C_f) par rapport à la droite (Δ) sur chacun des intervalles $] -\infty; 0]$ et $[0; +\infty[$.
4. a. Vérifie que pour tout $x \in \mathbb{R} : f'(x) \times g(x) = g'(x)$.
 b. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x)$ et $g'(x)$ ont le même signe ; puis dresse le tableau de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
5. On admet que (C_f) admet deux points d'inflexion d'abscisses respectives α et β ($\alpha < \beta$) et que f'' est continue sur $\mathbb{R}$.

En utilisant le tableau ci-dessous des valeurs $f''(x)$, donne un encadrement de α et β d'amplitude 0,5(justifier).

x	-2,5	-2	-1,5	-1	0,5	0	0,5	1	1,5	2
$f''(x)$	-0,07	-0,03	0,14	0,58	1,11	1	0,41	0,05	-0,07	-0,01

6. Trace (C_f) et (Δ) .
7. Montre graphiquement que l'équation $(1 - 2x)e^x = 2$ n'a pas solution dans $\mathbb{R}$.

« Bonne chance dans la rigueur et l'effort personnelle !!! »

- b. Etudie la dérivabilité de f à droite en 0. Interprète graphiquement le résultat.
3. Montre que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$. Interprète graphiquement les résultats
4. a. Montre que pour tout réel $x > 0$, $f'(x) = x + g(x)$.
 b. En déduire que f est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.
 c. Dresse le tableau de variation de f .
5. a. Montre que la droite $(\mathfrak{D}): y = x$ est la tangente à $(\mathcal{T})$ au point d'abscisse 1.
 b. Vérifie que pour tout $x > 0$, $f(x) - x = xg(x)$. En déduire la position relative de $(\mathcal{T})$ et $(\mathfrak{D})$.
 c. Trace la courbe $(\mathcal{T})$ dans le repère $(o; \vec{i}; \vec{j})$.
- II- 1. Montre que pour tout réel $x > 0$, $\int_1^x t \ln t dt = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{4} x^2 + \frac{1}{4}$
2. Soit n un entier supérieur ou égal à 2.
 On désigne par $\mathcal{A}_n$ l'aire, en (u, a) , de la partie du plan limitée par la courbe $(\mathcal{T})$ et les droites d'équations $x = \frac{1}{n}$; $x = 1$ et $y = 0$.
 a. Montre que $\mathcal{A}_n = \frac{7}{12} - \frac{\ln(n)}{2n^2} - \frac{1}{4n^2} - \frac{1}{3n^3}$.
 b. Calcule $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{A}_n$.
3. a. Montre que f réalise une bijection de $[0; +\infty[$ vers un intervalle J que l'on précisera.
 b. Justifie que pour $n \geq 2$, il existe un unique réel $a_n > 0$ tel que $f(a_n) = \mathcal{A}_n$
 c. Montre que la suite $(a_n)_{n \geq 2}$ converge vers un réel α et vérifie que $0,4 < \alpha < 0,5$.