

Exercice 1 :

Le plan euclidien est rapporté à un repère orthonormé $(0; \vec{i}; \vec{j})$. On donne les points $A(3; 1)$ et $B(0; 2)$. Soit a un nombre réel strictement positif.

Trouver les coordonnées du point M tel que : $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \frac{3}{\ln a} \vec{i} + 3a \ln(\frac{1}{a}) \vec{j}$.

Exercice 2 :

I-) 1°) Déterminer l'ensemble des entiers naturels n tels que $n + 2$ divise $2n - 1$.

2°) Démontrer que pour tout entier relatif n , $n + 2$ et $2n^2 + 3n - 1$ sont premiers entre eux.

3°) En déduire les entiers relatifs n pour lesquels $A = \frac{(2n-1)(2n^2+3n-1)}{(n+2)(n^2-2)} \in \mathbb{Z}$.

II-) 1°) Quel est le plus petit entier naturel ayant 15 diviseurs positifs ?

2°) Déterminer l'entier naturel n écrit avec 4 chiffres tel que les restes des divisions euclidiennes de 39818 et 62566 par n sont respectivement 37 et 53.

III-) Déterminer les entiers n tels que : $\text{PPCM}(n; 72) = 216$

Exercice 3 :

I-) Résoudre les équations différentielles suivantes

1°) $x^2 + y^2 - 2x^2y' = 0$; 2°) $3y' + 2y = 6$; 3°) $y'' = 1 + \tan^2 x$; 4°) $y' = \frac{1}{1+\cos x}$

II-) Soit l'équation différentielle (E): $9y'' + ay' + 4y = 0$, où $a \in \mathbb{R}$.

1°) Pour quelle(s) valeur(s) de a l'équation différentielle (E) admet-elle une solution générale de la forme : $e^{rx}(A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x))$, où A et B sont des réels.

2°) Résoudre l'équation différentielle (E) pour a nul.

3°) Déterminer la solution particulière f de (E) dont la courbe représentative passe par le point $A(\frac{\pi}{2}; \sqrt{3})$ et admet en ce point une tangente de pente $-\frac{2}{3}$.

4°) En déduire une écriture de f sous la forme: $f(x) = k\cos(k_1x + k_2)$, où k, k_1 et k_2 sont des réels à déterminer.

Exercice 4 :

I-) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la suite : $I_n = \int_1^e (\ln x)^n dx$

1°) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [1; e]$, montrer (I_n) est décroissante.

2°) a) Calculer : I_1

b) Démontrer que : $I_{n+1} = e - (n+1)I_n$ puis en déduire les valeurs exactes de I_2 et I_3 .

3°) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n > 0$.

4°) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(n+1)I_n \leq e$

5°) En déduire des questions 3) et 4) la limite de la suite I_n .

6°) Déterminer la valeur exacte de : $nI_n + (I_n + I_{n+1})$ puis en déduire la limite de nI_n .

II-) Pour tout $n \geq 1$, on pose: $j_n = \frac{(-1)^n}{n!} \int_1^e (\ln t)^n dt$

1°) Montrer que : $j_1 = -1$

2°) A l'aide d'une intégration par parties montrer que $\forall n \geq 1$: $j_{n+1} = j_n + \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} e$

3°) Démontrer par récurrence que $\forall n \geq 1$: $j_n = \left(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \dots + \frac{(-1)^n}{n!} \right) e - 1$

4°) a) Montrer que pour tout $n \geq 1$ et $x \in [1; e]$, on a: $0 \leq \int_1^e (\ln t)^n dt \leq e - 1$

b) En déduire que : $|j_n| \leq \frac{e-1}{n!}$

5°) Pour tout $n \geq 0$, on pose: $S_n = \frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \dots + \frac{(-1)^n}{n!}$.

Déduire des questions précédentes la limite de la suite (S_n) .

III-) 1°) Résoudre l'équation différentielle : $\frac{y''}{y'} = -\ln 2$.

2°) On considère la fonction numérique u à variable réelle t définie par : $u(t) = e^{-t \ln 2}$.

Déterminer la primitive U de u qui prend la valeur 1 en 0.

3°) Soit V_n la suite définie pour tout $n \geq 1$ par: $V_n = \int_{n-1}^n u(t) dt$. On pose : $S_n = \sum_{k=1}^n V_k$

a) Montrer que V_n est une suite géométrique à caractériser.

b) Calculer S_n puis en déduire sa limite.

Problème :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par:
$$\begin{cases} f(x) = x - x \ln(-x) ; \text{ si } x < 0 \\ f(x) = x e^{-\frac{1}{x}} ; \text{ si } x > 0 \end{cases} \quad \text{et } f(0) = 0$$

On note (C_f) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$, unité graphique 2 cm.

Partie A :

1°) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

2°) Etudier les limites de f sur $\mathbb{R}$.

3°) Etudier la dérivabilité de f en 0 puis interpréter graphiquement.

4°) Etudier les variations de f .

5°) Calculer : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$ puis interpréter graphiquement le résultat ;

6°) Montrer que la droite (D) d'équation $y = x - 1$ est asymptote à (C_f) en $+\infty$.

7°) Construire la courbe (C_f) , la droite (D) et les tangentes ou demi tangentes obtenues aux points d'abscisses $-e$; -1 et 0 dans le même repère.

Partie B :

Pour tout $n \geq 1$, on pose: $U_n = \int_{-\frac{1}{n}}^{-e} f(x)dx$.

1°) En utilisant le signe de f sur $\left[-e; -\frac{1}{n}\right]$, montrer que $\forall n \geq 1, U_n \geq 0$.

2°) Sans calculer explicitement U_n , Déterminer le signe de $U_{n+1} - U_n$ puis en déduire le sens de variation de la suite U_n .

3°) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que : $\int_{-\frac{1}{n}}^{-e} x \ln(-x) dx = \frac{e^2}{4} + \frac{1}{n^2} + \frac{\ln(n)}{2n^2}$.

En déduire l'expression de U_n en fonction de n puis donner une interprétation graphique.

4°) Calculer la limite (si elle existe) de U_n puis conclure.

Partie C :

On considère le mouvement d'un mobile M dont les coordonnées en fonction du temps

$$\text{sont : } \begin{cases} x(t) = \frac{1}{t} \\ y(t) = \frac{e^{-t}}{t} \end{cases}, \text{ où } t > 0$$

1°) Déterminer l'équation de la trajectoire du mobile M .

2°) Construire en pointillés dans le même repère précédent la trajectoire du mobile M .

« La mathématique est la mère des sciences »