

SERIE : TSE DUREE : 4 Heures COEFF :4	BACCALAUREAT BLANC EPREUVE DE MATHEMATIQUE	GROUPE SCOLAIRE CLAIRE FONTAINE ANNEE SCOLAIRE :2024-2025
--	---	--

Le sujet est composé de deux exercices et un problème tous obligatoires. Vérifier que vous avez toutes les parties du sujet. La qualité de la rédaction, la clarté et précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies. Les calculatrices non programmables sont autorisées.

Exercice 1 : (5 points)

Soit f la fonction numérique définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = e^{1-x} - \ln x$

1)a) Etudier le sens de variation de f . **(0,5 pt)**

b) Calculer la limite de $xf(x)$ quand x tend vers 0. **(0,25 pt)**

c) Pour $x \in]0 ; 1[$, calculer $F(x) = \int_x^1 f(t)dt$. Et montrer que $\lim_{x \rightarrow 0} F(x) = e$. **(0,75 pt)**

2) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2, on pose : $S_n = \frac{1}{n} \sum_{p=1}^n f\left(\frac{p}{n}\right)$.

a) Montrer que pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq n-1$, on a :

$$\frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)dt \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right). \text{ (0,5 pt)}$$

b) En déduire que : $S_n - \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) \leq F\left(\frac{1}{n}\right) \leq S_n - \frac{1}{n}$ puis que,

$$F\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} \leq S_n \leq F\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right). \text{ (1 pt)}$$

3)a) Déduire des questions précédentes que S_n admet une limite lorsque n tend vers $+\infty$ et calculer cette limite. **(0,25 pt)**

b) Etablir les égalités : $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{\left(1-\frac{k}{n}\right)} = \frac{e-1}{n\left(\frac{1}{e^n}-1\right)}$ et : $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n} \ln\left(\frac{n!}{n^n}\right)$. **(1 pt)**

c) Utiliser ces résultats pour démontrer que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln\left(\frac{n!}{n^n}\right) = -1$ et en déduire la limite de $\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$ quand n tend vers $+\infty$. **(0,75 pt)**

Exercice 2 (5 points)

A- On considère l'équation $(E) : 4x - y = 2$ où les inconnues x et y sont des entiers relatifs.

1)a) Démontrer que si un couple (x_0, y_0) est solution de (E) , alors y_0 est un nombre pair. **(0,25 pt)**

b) Déterminer les valeurs possibles du PGCD (x_0, y_0) . **(0,5 pt)**

2)a) Vérifie que le couple $(1,2)$ est une solution de (E) . **(0,25 pt)**

b) Résous alors l'équation (E) . **(0,5 pt)**

3) Déterminer l'ensemble des couples (x, y) solutions de (E) tels que x et y soient étrangers entre eux. **(0,5pt)**

4) $\overline{ac2}^3$ et $\overline{baa}^4$ sont deux écritures du même entier naturel N écrits respectivement en base 3 et en base 4

a) Justifier que $3c + 2$ est multiple de 4. **(0,5 pt)**

b) Déduis-en que $c = 2$. **(0,25 pt)**

c) Détermine les valeurs de a et b . **(0,5 pt)**

d) Ecris le nombre dans le système binaire. **(0,25 pt)**

B- On considère l'application g de E dans E qui à tout point $M(x, y)$ associe le point

$$M'(x', y') \text{ tel que } \begin{cases} x' = x + y \\ y' = -y + 2 \end{cases}$$

1) Montrer que g est une application affine sans point invariant et que son endomorphisme associé est involutif. **(0,5 pt)**

2)a) Démontrer que $g \circ g$ est une translation. **(0,5 pt)**

b) Soit $\vec{u}$ le vecteur de cette translation et t la translation de vecteur $\frac{\vec{u}}{2}$. Préciser la nature de l'application s telle que $g = t \circ s$. Prouver que $t \circ s = s \circ t$. **(0,5 pt)**

Problème (10 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Unité graphique 2cm.

Partie A

considère la fonction f définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - 4 + \frac{1}{4}\ln[x]$.

1)a) Déterminer le domaine de définition de f . (0,25 pt)

b) Calculer les limites aux bornes du domaine de définition de f . (0,75 pt)

c) f' désigne la fonction dérivée de f . Calculer $f'(x)$ puis en déduire le sens de variation de f . (0,75 pt)

d) Dresser le tableau de variation de f . (0,5 pt)

2) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α telle que ;

$3 < \alpha < 4$. (0,5 pt)

3) En déduire le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x . (0,25 pt)

Partie B

On considère la fonction h dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} \forall x \neq 0, h(x) = x + 1 - \frac{31}{16}x^2 - \frac{1}{8}x^2 \ln|x| \\ h(0) = 1 \end{cases}$$

1)a) Démontrer que h est dérivable en 0. **(0,25 pt)**

b) Démontrer que $\forall x \neq 0, h'(x) = xf\left(\frac{1}{x}\right)$. **(0,25 pt)**

c) Démontrer en utilisant la **partie A** que $\forall x \in]-\infty; 0[\cup]0; \frac{1}{\alpha}[, h'(x) > 0$

$\forall x \in]\frac{1}{\alpha}; +\infty[, h'(x) > 0$. **(0,5 pt)**

2) On note (Γ) la courbe représentative de la restriction de h à l'intervalle $\left[-1; \frac{3}{2}\right]$ dans le plan muni du repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

a) Tracer la tangente à (Γ) au point d'abscisse 0. **(0,5 pt)**

b) Construire la courbe (Γ) . (On prendra $\alpha = 3,6$). **(0,75 pt)**

3) Soit λ un nombre réel appartenant à l'intervalle $]0; 1[$.

a) En utilisant une intégration par parties, démontrer que :

$$\int_{\lambda}^1 x^2 \ln x \, dx = -\frac{1}{9} + \frac{1}{9}\lambda^3 - \frac{1}{3}\lambda^3 \ln \lambda. \quad \textbf{(0,5 pt)}$$

b) On note $f(\lambda)$ l'aire en cm^2 de la partie du plan délimitée par la courbe (Γ) , l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = \lambda$ et $x = 1$.

Déduire de la question précédente que :

$$f(\lambda) = \left(\frac{125}{36} - 4\lambda - 2\lambda^2 + \frac{91}{36}\lambda^3 + \frac{1}{6}\lambda^3 \ln \lambda \right) \text{cm}^2. \quad \textbf{(0,5 pt)}$$

c) Calculer $\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} f(\lambda)$. **(0,25 pt)**

Partie C

On se propose de Calculer une valeur approchée de α à 0,01 près.

1) Soit g la fonction dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $g(x) = 4 - \frac{1}{4} \ln x$.

a) Etudier les variations de g . **(0,75 pt)**

b) Démontrer que $g([3; 4]) \subset [3; 4]$. **(0,25 pt)**

c) Démontrer que α est l'unique solution de l'équation $g(x) = x$ pour $x \in]0; +\infty[$. **(0,25 pt)**

2) On considère la suite (U_n) définie par : $\begin{cases} U_0 = 3 \\ \forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = g(U_n) \end{cases}$

a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $3 \leq U_n \leq 4$. **(0,25 pt)**

b) Démontrer que pour tout entier naturel n , $(U_n - \alpha)$ et $(U_{n+1} - \alpha)$ sont de signe contraires. **(0,25 pt)**

c) Démontrer que, pour tout $x \in [3 ; 4]$ on a $|g'(x)| \leq \frac{1}{12}$. **(0,25 pt)**

En déduire que, pour tout entier naturel n , $|U_{n+2} - U_{n+1}| \leq \frac{1}{12} |U_{n+1} - U_n|$ puis que ,

$$|U_{n+1} - U_n| \leq \frac{1}{12^n}. \text{ **(0,5 pt)**}$$

d) Démontrer que pour tout entier naturel n , $|U_n - \alpha| \leq \frac{1}{12^n}$. **(0,5 pt)**

En déduire une valeur approchée de α à 0,01 près. **(0,5 pt)**