



Comité Pédagogique Des Cours En Ligne (C.P.C.E.L)

EXAMEN BLANC : Baccalauréat blanc BAC 2025
SÉRIE : TSE SESSION : Avril 2025
ÉPREUVE DE : MATHÉMATIQUES DURÉE : 4 heures COEF : 4

Exercice 1 : 4 points

Soit l'intégrale I_n définie par :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^{2n+1} x}$$

- 1) Détermine le seul réel a tel que : $\forall x \left[0 ; \frac{\pi}{4} \right]$ on a :

$$\frac{1}{\cos x} = \frac{a \cos x}{1 - \sin x} + \frac{a \cos x}{1 + \sin x}.$$

- 2) Calcule la valeur de I_0 .

- 3) Démontre à l'aide d'une intégration par parties que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$2nI_n = (2n-1)I_{n-1} + \frac{2^n}{\sqrt{2}} \left(\text{On pourra poser : } \frac{1}{\cos^{2n+1} x} = \frac{1}{\cos^{2n-1} x} \times \frac{1}{\cos^2 x} \right)$$

Exercice 2 : 6 points

- I- Soit t un entier naturel supérieur ou égale 5, on considère dans le système de base $(t+1)$ les entiers $n_1 = \overline{100t}$ et $n_2 = \overline{t001}$.

- 1) Ecrire n_1 et n_2 dans le système de base t .
- 2) Ecrire $n_1 + n_2$ dans le système de base t et vérifier que $n_1 + n_2$ est divisible par $(t+1)$ puis donner le quotient q de cette division en base t .
- 3) Déterminer les entiers a et b tel que : $q = \overline{ab}^t \times \overline{aaa}^t$.

- II- Soit A, B, C trois points du plan P tel que $AB = AC = 5 \text{ cm}$ et $BC = 6 \text{ cm}$.

- 1) Construis le triangle ABC puis calcule $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$
- 2) Soit G le barycentre des points pondérés $\{(A, 2); (B, 3); (C, 3)\}$. Construis G puis calcule AG .
- 3) Soit $f : P \rightarrow \mathbb{R}$

$$M \mapsto 2\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$$

- a) Exprimer $f(M)$ en fonction de $f(G)$ et MG
- b) Calculer la valeur de $f(A)$ puis en déduire celle de $f(G)$.
- 4) Déterminer puis construire l'ensemble des points M du plan tels que : $f(M) = f(A)$.

Problème : 10 points

Partie I :

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{1}{1+x} - \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

- 1) Calculer : $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$
- 2) Calculer $g'(x) \forall x \in]0; +\infty[$, puis dresser le tableau de variation de g .

- 3) En-déduire que $\forall x \in]0 ; +\infty[, \frac{1}{1+x} < \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$.
- 4) Montrer que $\forall x \in]0 ; +\infty[, \frac{1}{1+x} < \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x}$.

Partie II :

On considère la fonction f définie sur un intervalle $I =]0 ; +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) ; \forall x \in]0 ; +\infty[\\ f(0) = 0 \end{cases}$$

Et soit $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(o ; \vec{i} ; \vec{j})$ (on prendra $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1 \text{ cm}$).

- 1) Montrer que la fonction f est continue et dérivable à droite en 0 et interpréter le résultat géométriquement.
- 2) Montrer que la courbe $(\mathcal{C}_f)$ admet une branche parabolique dont on précisera la direction.
- 3) a) justifier que la fonction f est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et que :

$$\forall x \in]0 ; +\infty[; f'(x) = 3x^2 \left(\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{3(1+x)} \right)$$

- b) En-déduire que la fonction f est strictement croissante sur I .
- c) Dresser le tableau de variation de f .

Partie III :

Pour tout x de $]0 ; +\infty[$; on pose : $h(x) = \frac{f(x)}{x}$

- 1) Montrer que

$$\forall x \in]0 ; +\infty[; h'(x) = 2x \left(\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{2(1+x)} \right)$$

- 2) En-déduire que la fonction h est strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$.
- 3) Montrer que l'équation $h(x) = 1$ admet sur $]0 ; +\infty[$, une unique solution notée α , puis vérifier que $\alpha \in]1 ; 2[$ (on prendra $\ln 2 = 0,7$ et $\ln\left(\frac{3}{2}\right) = 1,5$)
- 4) En déduire que les solutions de l'équation $f(x) = x$ sont 0 et α .
- 5) Représenter graphiquement la courbe $(\mathcal{C}_f)$.
- 6) a) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.
- b) Construire la courbe $(\mathcal{C}_{f^{-1}})$ de f^{-1} dans le même repère orthonormé $(o ; \vec{i} ; \vec{j})$.
- 7) a) En utilisant la méthode d'intégration par parties, montre que :

$$\int_{\alpha}^1 f(x) dx = \frac{\ln 2}{4} - \frac{\alpha^4}{4} \ln\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) + \frac{1}{4} \int_{\alpha}^1 \frac{x^3}{x+1} dx$$

- b) Décomposer $\frac{x^3}{x+1}$ en éléments simples, puis en-déduire en fonction de α la valeur de l'intégrale : $\int_{\alpha}^1 \frac{x^3}{x+1} dx$.
- c) Déterminer en cm^2 et en fonction de α l'aire délimitée par la courbe $(\mathcal{C}_f)$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \alpha$.