

BACCALAUREAT BLANC			
TSE	Mathématiques	Date : 31-05-2025	Durée : 4 heures

Exercice 1 : Les parties A et B sont indépendantes.**Partie A :****I- Equation avec congruence**

Déterminer les entiers tels que : $\left\{ \begin{array}{l} 4n+4 \equiv 0[5] \\ -3n+2 \equiv 0[5] \end{array} \right\}$

II- Application

Le plan complexe est rapporté a un repère orthonormal $(0; \vec{u}; \vec{v})$.

On considère application f qui au point M d'affixe z fait correspondre le point M' d'affixe z' tel que :

$$Z' = \frac{3+4i}{5} \bar{z} + \frac{1-2i}{5}$$

1. On note par x et x', et y et y' les parties réelles respectivement les parties imaginaires de z et z'.

Démontrer que : $\left\{ \begin{array}{l} x' = \frac{3x+4y+1}{5} \\ y' = \frac{4x-3y-2}{5} \end{array} \right\}$

2. 2.1. Montrer que l'ensemble des points invariants par f est la droite (D) d'équation : $2x - 4y - 1 = 0$.

2.2. Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ a une direction fixe et que la droite (D) est la médiatrice du segment $[MM']$.

2.3. Quelle est alors la nature de l'application f ?

3. Déterminer l'ensemble (Γ) des points M d'affixe z tels que z' soit un réel.

4. On cherche à déterminer les points de (Γ) dont les coordonnées sont des entières.

4.1. Donner une solution $(x_0; y_0)$ appartenant à $\mathbb{Z}^2$ de l'équation $4x - 3y = 2$.

4.2. Déterminer ensemble des solutions appartenant à $\mathbb{Z}^2$ de l'équation $4x - 3y = 2$

5. On considère les points M d'affixe $z = x + iy$ tel que $x=1$ et $y \in \mathbb{Z}$. Le point $M' = f(M)$ a pour affixe z'.

Déterminer les entiers y tels que $\text{Re}(z)$ et $\text{Im}(z')$ soit entières.

Partie B

1-Résoudre dans le corps des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation : $4z^4 + 3z^2 + 1 = 0$. Montrer que les solutions sont conjuguées deux à deux.

2-Ecrire le polynôme $4z^4 + 3z^2 + 1$ sous la forme d'un produit de deux trinômes du second degré à coefficients réels.

3-En déduire que dans tout système de numération de base b supérieure ou égal à cinq, le nombre $\overline{40301}$ est multiple de $\overline{211}$ (ces deux nombres sont écrits en base b).

On prend b égal à neuf ; écrire dans cette base le quotient de $\overline{40301}$ par $\overline{211}$.

Exercice 2 : (4 points)

Un employé se rend à son travail en bus. S'il est à l'heure à l'arrêt, il prend le bus de ramassage gratuit mis à sa disposition par l'entreprise. S'il est en retard, il prend le bus de ville.

On suppose que l'employé n'est pas en retard le premier jour. A partir du deuxième jour :

- si l'employé est à l'heure un jour donné, la probabilité qu'il soit en retard le lendemain est de $\frac{1}{5}$.
- s'il est en retard un jour donné, la probabilité qu'il soit en retard le lendemain est de $\frac{1}{20}$.

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2: on appelle R_n , l'évènement : «l'employé est en retard le jour n ».

On note p_n la probabilité de R_n , et q_n celle de $\overline{R_n}$, l'évènement contraire de R_n .

On suppose que : $p_1 = 0$ et $p_2 = \frac{1}{5}$. On a : $P_{R_n}(R_{n+1}) = \frac{1}{20}$ et $P_{\overline{R_n}}(R_{n+1}) = \frac{1}{5}$.

Dans tout ce qui suit, on prend $n \geq 2$.

1. a) Justifie que: $p(R_n \cap R_{n+1}) = \frac{1}{20}P_n$ et $p(\overline{R_n} \cap R_{n+1}) = \frac{1}{5}q_n$

b) Détermine P_{n+1} en fonction de P_n et q_n .

c) Déduis-en que: $P_{n+1} = \frac{1}{5} - \frac{3}{20}P_n$

2. On pose: $V_n = P_n - \frac{4}{23}$.

a) Démontre que (V_n) est une suite géométrique de raison $\frac{-3}{20}$.

b) Détermine son premier terme V_2 .

3. a) Calcule la limite de la suite (V_n) .

b) Déduis-en la limite de la suite (P_n) .

Problème

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j})$. L'unité graphique est 2 cm.

Soient n un entier naturel non nul et f_n , la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_n(x) = (1-x)^n e^{\frac{x}{2}}$. On désigne par (C_n) la courbe représentative de f_n , dans le plan muni du repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j})$.

Le but de ce problème est de calculer la limite de la suite (S_n) définie par : $S_n = \frac{1}{n!} \int_0^1 f_n(x) dx$

Partie A: Étude de la fonction f_1 et d'une fonction associée.

1. a) Calcule : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_1(x)}{x}$.

b) Interprète graphiquement les résultats précédents.

2. a) Calcule la limite de f_1 en $-\infty$.

b) Interprète graphiquement le résultat précédent.

3. On suppose que f_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$.

a) Démontre que f_1 est strictement croissante sur $] -\infty ; -1[$ et strictement décroissante sur $] -1 ; +\infty [$.

b) Dresse le tableau de variations de f_1 .

c) Trace dans le repère $(0, \vec{i}, \vec{j})$, la courbe (C_1) et sa tangente à l'origine.

Partie B : Étude de la fonction f_n

1. a) Détermine, suivant la parité de n , la limite de f_n , en $+\infty$.

b) Détermine, suivant la parité de n , $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_n(x)}{x}$.

c) Interprète graphiquement les résultats précédents.

2. a) Calcule $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x)$ (On pourra poser : $X = 1-x$).

b) Interprète graphiquement le résultat précédent.

3. On suppose que pour tout entier naturel n non nul, f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$.

a) Démontre que : $\forall x \in \mathbb{R}, f'_n(x) = \frac{1}{2}(-x - 2n + 1)(1-x)^{n-1}e^{\frac{x}{2}}$

b) Étudie, suivant la parité de n , le signe de $f'_n(x)$.

c) Dresse, suivant la parité de n , le tableau de variation de f_n .

4. a) Résous dans $\mathbb{R}$, l'équation: $f_n(x) = f_{n+1}(x)$.

b) Dédus de ce qui précède que toutes les courbes (C_n) passent par deux points fixes que l'on précisera.

c) Étudie, suivant la parité de n , les positions relatives des courbes (C_n) et (C_{n+1}) .

d) Trace la courbe (C_2) dans le repère $(0, \vec{i}, \vec{j})$.

Partie C: Calcul de la limite de la suite (S_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par: $S_n = \frac{1}{n!} \int_0^1 f_n(x) dx$.

1. Justifie que la fonction f_n est décroissante sur $[0; 1]$.

2. Démontre que: $\forall x \in [0; 1], f_n(x) \in [0; 1]$.

3. Dédus de ce qui précède que: $\forall x \in \mathbb{N}, 0 \leq S_n \leq \frac{1}{n}$.

4. Détermine $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.