

EXAMEN DE BACCALAUREAT BLANC

Séssion :
Mai 2025

Classe :
TSE

Epreuve de :
MATHEMATIQUES

Durée : 4 Heures

Coef : 04

EXERCICE 1

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$. On prendra 1 cm pour l'unité graphique. On considère l'application f du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que : $z' = -(\sqrt{3} + i)z - 1 + i(1 + \sqrt{3})$.

1. Montre que f est une similitude directe dont le centre Ω a pour affixe i puis détermine le rapport et l'angle.
2. Soit M_0 le point d'affixe $z_0 = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3}{4}i$.
 - a) Calcule ΩM_0 .
 - b) Donne une mesure en radians de l'angle $(\vec{u}; \overrightarrow{\Omega M_0})$.
3. On considère la suite de points $(M_n)_{n \geq 0}$, définie pour tout entier naturel n par $M_{n+1} = f(M_n)$. On note z_n l'affixe du point M_n .
 - a) Détermine les affixes des points M_1, M_2, M_3 et M_4 .
 - b) Montre par récurrence, pour tout entier naturel n , l'égalité : $z_n - i = 2^n e^{i\frac{7n\pi}{6}}(z_0 - i)$.
 - c) Pour tout entier naturel n , Calcule ΩM_n puis détermine le plus petit entier n tel que $\Omega M_n \geq 10^2$.

EXERCICE 2

1. On considère l'équation (1) d'inconnue $(n; m)$ d'élément de $\mathbb{Z}^2$: $11n - 24m = 1$.
 - a) Justifie, à l'aide de l'énoncé d'un théorème, que cette équation admet au moins une solution.
 - b) En utilisant l'algorithme d'Euclide, détermine une solution particulière de l'équation (1).
 - c) Détermine l'ensemble des solutions de l'équation (1).
2. Recherche du P.G.C.D de $10^{11} - 1$ et $10^{24} - 1$
 - a) Justifie que 9 divise $10^{11} - 1$ et $10^{24} - 1$
 - b) $(n; m)$ désignant un couple quelconque d'entiers naturels solutions de (1). Montre que l'on peut écrire : $(10^{11n} - 1) - 10(10^{24m} - 1) = 9$
 - c) Montre que $10^{11} - 1$ divise $10^{11n} - 1$
(on rappelle l'égalité $a^n - 1 = (a - 1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + a^0)$, valable pour tout entier naturel n non nul).
 - d) Dédus de la question précédente l'existence de deux entiers N et M tels que : $(10^{11} - 1)N - (10^{24} - 1)M = 9$
 - e) Montre que tout diviseur commun à $10^{24} - 1$ et $10^{11} - 1$ divise 9.
 - f) Dédus des questions précédentes le P.G.C.D de $10^{24} - 1$ et $10^{11} - 1$.

PROBLÈME

Partie A

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = (x^2 + 2x)e^{-x}$ et (C_h) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ d'unité graphique 1 cm.

1.
 - a) Etudie les variations de h .
 - b) Construis la courbe (C_h)
 - c) Calcule $I = \int_0^1 h(x)dx$ puis donne l'aire de la position délimitée par la courbe (C_h) ; l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$
2. On pose, pour tout entier naturel non nul n ($n \geq 1$), $J_n = \int_0^1 x^n e^{-2x} dx$.
 - a) Calcule J_1 .
 - b) Montre que $\forall n \geq 1, J_{n+1} = \frac{n+1}{2} J_n - \frac{1}{2e^2}$.
 - c) Détermine J_2 ; J_3 et J_4 .
 - d) Déduis-en $K = \int_0^1 \pi[h(x)]^2 dx$

Partie B

On considère la fonction g définie sur $] -\infty; 0[$ par $g(x) = 1 - x + x \ln|x|$

1. Etudie les variations de g .
2. Montre que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in] -4; -3[$
3. Déduis-en le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .

Partie C

Soit f la fonction numérique définie par $f(x) = \begin{cases} 1 + \frac{x-1}{\ln|x|}, & x < 0 \\ h(x) + e^{-x}, & x \geq 0 \end{cases}$ et (C_f) sa courbe représentative

dans un repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

1. Détermine le domaine de définition de f .
2. Etudie la continuité et la dérivabilité de f en 0.
3. Etudie les variations de f puis dresse son tableau de variation (On pourra utiliser les parties A et B).
4. Etudie les branches infinies de la courbe (C_f)
5. Vérifie que : $f(\alpha) = 1 + \alpha$
6. Trace la courbe (C_f) (On prendra $\alpha = -3,6$).

Partie D

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n non nul par : $u_n = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n (k+n)^2 e^{-\frac{k}{n}}$.

1. Montre que pour tout entier naturel n non nul et pour tout entier k tel que :

$$0 \leq k \leq n-1, \text{ on a : } \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t) dt \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right)$$

2. Déduis-en que pour tout entier naturel n non nul, on a : $u_n + \frac{e-4}{ne} \leq \int_0^1 f(t) dt \leq u_n$ et que $\left(1 + \frac{e-1}{e}\right) \leq u_n \leq \left(1 + \frac{e-1}{e} + \frac{4-e}{ne}\right)$.
3. Montre que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente et donne sa limite.

NB : Les Parties A, B, C et D sont indépendantes.