

EXERCICE N°1 : (6 points)

I

1. Démontre que pour tout entier naturel n , $2^{3n} - 1$ est un multiple de 7. En déduis que $2^{3n+1} - 2$ et $3^{3n+2} - 4$ sont des multiples de 7.
2. Détermine les restes de la division par 7 des puissances de 2.
3. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on considère le nombre $A_p = 2^p + 2^{2p} + 2^{3p}$.
 - a. Si $p = 3n$, quel est le reste de la division de A_p par 7 ?
 - b. Démontre que si $p = 3n + 1$ alors A_p est divisible par 7.
 - c. Etudie le cas où $p = 3n + 2$.

II

- 1) Soient les points $A; B$; d'affixes respectives $Z_A = -1 + i\sqrt{3}$; $Z_B = -\sqrt{3} - i$
 - a) Ecrire Z_A , Z_B et $Z_A Z_B$ sous forme trigonométrique.
 - b) Montr que Z_A^3 est réel et Z_B^3 est imaginaire pur.
- 2) Soit r la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{2}$
 - a) On pose $r(A) = C$. Calculer Z_C de C
 - b) On pose $r(C) = D$. Calculer Z_D de D
 - c) Placer les points $A; B; C; D$
- 3)
 - a) Montrer que O est le milieu de $[AD]$ et $[BC]$
 - b) Calculer le module et l'argument de $\frac{Z_A}{Z_B}$
 - c) En déduire la nature du quadrilatère $ABDC$

EXERCICE N°2 : (5 points)

- 1) Calculer les intégral suivantes :
 $A = \int_1^{\frac{e^{\ln x}}{2x}} dx$ (0,5 pt) $B = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{3x^2+1}} dx$ (0,5 pt)
- 2) Calculer au moyen d'une intégration par parties le réel $K = \int_1^2 x \ln x dx$ (1 pt)
- 3) On donne les fonctions $f(x) = x e^{\frac{-1}{x}}$ et $g(x) = \frac{x+1}{x} e^{\frac{-1}{x}}$
 - a) Montrer que f est une primitive de g sur $\mathbb{R}^*$. (0,5 pt)
 - b) En déduire le calcul intégrale $J = \int_1^2 \frac{x+1}{x} e^{\frac{-1}{x}} dx$ (0,5 pt)
- 4) Déterminer les réels a et b tels que : $\frac{x^2-1}{x^3+x} = \frac{a}{x^2+1} + \frac{b}{x}$. (1 pt)

En déduire le calcul de l'intégrale $I = \int_1^2 \frac{x^2-1}{x^3+x} dx$ (1 pt)

- 5) Calculer la valeur moyenne de la fonction h définie par
 $h(x) = x e^{x^2}$ sur l'intervalle $I = [2; 4]$

PROBLEME : (9 points)

A Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 1 + (x + 2)e^x$.

- 1) Dresser le tableau de variation de g . (le calcul des limites n'est pas demandé) (2 pts)
- 2) Préciser l'extremum de g sur $\mathbb{R}$. (0, 5 pt)
- 3) En déduire le signe de g sur $\mathbb{R}$. (0, 5 pt).

B. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - 1 + (x + 3)e^x$.

On désigne par (Cf) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

- 1) Etudier la limite de f en $-\infty$ et en $+\infty$. (0, 5 pt)
- 2) Montrer que la droite (D) d'équation $y = x - 1$ est asymptote à la courbe (Cf) . (0, 5 pt)

Etudier la position de (Cf) par rapport à (D) . (0, 5 pt)

- 3) Montrer que $f'(x)$ a la même signe $g(x)$. (0, 5 pt).

Dresser le tableau de variation de f . (1 pt)

- 4) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[-1 ; 0]$. Justifier que $-0,29 \leq \alpha \leq -0,28$. (1 pt)

- 5) a) Montrer que f admet une réciproque. On notera f^{-1} cette réciproque. (0, 5 pt)

- b) Montrer que $(f^{-1})'(0) = -\frac{\alpha+2}{\alpha^2+\alpha-5}$. (0, 5 pt)

- 6) Tracer la courbe (Cf) et la droite (D) dans le repère. (1 pt)

7) on désigne par A_m l'aire de la partie du plan limitée par (Cf) , la droite (D) et les droites d'équation $x = m$ et $x = 0$ avec $m < 0$.

- a) Calculer A_m . (0, 5 pt)
- b) Calculer la limite de A_m lorsque m tend vers $-\infty$. (0, 5 pt)