

Exercice :

I-) On considère les suites I_n et J_n définies pour tout entier naturel n respectivement par :

$$I_n = \int_0^1 (1-x)^n \sqrt{1-x^2} dx \text{ et } J_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x^2} dx$$

1°) Montrer que : $I_0 = \frac{\pi}{4}$ (On pourra utiliser l'égalité: $x = \sin \alpha$)

2°) calculer J_1 .

3°) A l'aide des questions 1) et 2) en déduire la valeur de I_1 .

4°) Comparer $(1-x)^{n+1}$ et $(1-x)^n$ puis x^{n+1} et x^n . En déduire le sens de variations des suites I_n et J_n puis montrer qu'elles sont toutes les deux convergentes.

II-) On considère les fonctions f , g et h définies respectivement sur $]1; +\infty[$ par :

$$f(t) = \ln(t-1) ; g(t) = t \ln(t-1) \text{ et } h(t) = t + \ln(t^2-1)$$

1°) Pour tout $t \in]1; +\infty[$ donner une primitive des fonctions f et g .

2°) En s'inspirant de la question 1) déterminer une primitive sur $]1; +\infty[$ de la fonction h .

Problème :

On désigne par f_m la fonction numérique de la variable réelle x définie par :

$$f_m(x) = \ln(x^2 - m), \text{ où } m \in \mathbb{R}.$$

Partie A :

1°) Déterminer l'ensemble de définition de f_m suivant les valeurs de m .

2°) Calculer les limites aux bornes de chaque domaine de définition de f_m .

3°) Etudier la parité de f_m .

4°) a) Etudier les variations de f_m .

b) Dresser les tableaux de variations de f_m suivant les valeurs de m .

5°) Donner la nature des branches infinies des courbes représentatives (C_m) de f_m lorsque x tend vers $-\infty$ et $+\infty$.

6°) Tracer dans le même repère orthonormé (unité : 2cm) les courbes (C_{-1}) ; (C_0) et (C_1) .

On précisera d'abord les points d'intersection avec l'axe des abscisses et les tangentes en ces points.

Partie B :

Dans cette question on pose : $m = -\frac{3}{4}$

1°) On se propose d'étudier la position de la courbe $\left(C_{-\frac{3}{4}}\right)$ par rapport à la demi-droite (D) d'équation : $y = x$, pour x positif seulement. Pour cela, on considère la fonction g définie par : $g(x) = x - \ln\left(x^2 + \frac{3}{4}\right)$

- a) Etudier le sens de variations de $g(x)$; (On ne demande pas de calculer la limite de g lorsque x tend vers $+\infty$).
- b) Calculer une valeur approchée à 10^{-2} près de : $g(0)$ et $g\left(\frac{3}{2}\right)$
- c) En déduire la position de $C_{-\frac{3}{4}}$ par rapport à (D).

2°) a) Montrer que $f_{-\frac{3}{4}}$ est bijection de $\mathbb{R}^+$ vers un intervalle à préciser.

b) Déterminer la fonction réciproque, indiquer son ensemble de définition.

Parie C :

Dans cette question on pose $m = 0$.

1°) Calculer l'aire de l'ensemble des points M dont les coordonnées x et y vérifient:

$$\begin{cases} \alpha \leq x \leq 1, & \alpha \in]0; 1[\\ f_0(x) \leq y \leq 0 \end{cases}$$

2°) Calculer la limite de cette aire lorsque α tend vers 0 par valeurs supérieures.

« La mathématique est la mère des sciences »