

Exercice 1 : Nombres complexes et suites

Soient trois nombres complexes $z_1; z_2; z_3$ dans cet ordre en progression géométrique de raison $\frac{1}{2}$. Ces trois nombres complexes admettent pour modules respectifs $r_1; r_2$ et r_3 et pour arguments respectifs $\theta_1; \theta_2$ et θ_3 . En plus $\theta_1; \theta_2; \theta_3$ sont dans cet ordre en progression arithmétique de raison $\frac{\pi}{3}$.

Sachant que : $z_1 \times z_2 \times z_3 = -i$ et $\theta_1 \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right]$, déterminer ces trois nombres complexes sous forme exponentielle, trigonométrique et algébrique.

Exercice 2 : Arithmétique

I-) Trouver un nombre de trois chiffres sachant que le chiffre des centaines est égal aux $\frac{3}{5}$ de celui des unités et que celui des dizaines est égal à la demi somme des deux autres. Enfin, si l'on ajoute 198 au nombre cherché, on obtient le nombre renversé.

II-) Trouver les nombres de deux chiffres qui sont multiples du produit de leurs chiffres.

Exercice 3 : Primitives et intégrales

On considère la fonction F définie sur $] -1; 1[$ par : $F(x) = \int_0^x \frac{t^2}{1-t^2} dx$

1°) Ecrire : $\frac{t^2}{1-t^2}$ sous forme $a + \frac{b}{1-t} + \frac{c}{1+t}$ où a, b et c sont des réels.

2°) Calculer $F(x)$ puis $F'(x)$.

3°) Pour tout réel $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, on pose : $f(\alpha) = F(\sin \alpha)$.

a) Calculer $f'(\alpha)$ puis en déduire la valeur exacte de l'intégrale $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(\sin \alpha)^2}{\cos \alpha} d\alpha$.

b) En intégrant par parties, calculer l'intégrale : $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos \alpha \ln(\cos \alpha) d\alpha$.

Problème :

Partie A :

I-) Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par : $f(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right)$ et (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormal d'unité graphique 2cm.

1°) Déterminer D_f le domaine de définition de f puis montrer que la courbe (C) de f admet deux asymptotes dont on donnera les équations.

2°) a) Dresser le tableau de variation de f .

b) Construire la courbe (C) .

c) A l'aide d'une intégration par parties, calculer l'aire A de la portion du plan située dans le premier quadrant et limitée par (C) , l'axe des abscisses et la droite d'équation $x = \frac{1}{2}$.

3°) a) Déterminer f^{-1} la fonction réciproque de f .

b) Préciser l'ensemble de définition de f^{-1} .

c) Construire la courbe (c^{-1}) de f^{-1} dans le même plan que (C) .

II-)

On considère la fonction g définie sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ par: $g(x) = f(\sin x)$ où f est la fonction définie dans I-)

1°) On considère ensuite la fonction h définie sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ par : $h(x) = \frac{1}{\cos x}$

a) Démontrer que g est une primitive de h sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

b) Calculer l'intégrale $J_2 = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos t} dt$. On donnera le résultat sous forme $\ln a$ où a est un nombre réel strictement positif.

2°) On considère la suite $I_n, n \in \mathbb{N}$ définie par: $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos t} dt$ et $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{(\sin t)^{2n}}{\cos t} dt$ pour $n \geq 1$

Explique brièvement pourquoi $I_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

3°) Pour tout entier naturel n , on pose : $K_n = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \left(\frac{1}{4^n \cos t} - \frac{(\sin t)^{2n}}{\cos t} \right) dt$.

a) Montrer que pour tout entier naturel n , $K_n \geq 0$.

b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}: 0 \leq I_n \leq \frac{\ln b}{c^n}$, où b et c sont des réels positifs à déterminer.

c) Pour tout entier naturel n , déterminer la limite de la suite (I_n) .

Partie B :

Pour tout entier naturel n , on considère la fonction F_n définie sur l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ par :

$$F_n(t) = \sin t + \frac{\sin^3 t}{3} + \frac{\sin^5 t}{5} + \dots + \frac{\sin^{2n-1} t}{2n-1}$$

1°) Soit q un réel et $n \geq 1$.

a) Calculer en fonction de q et n la somme: $T_n = 1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^{n-1}$.

b) En déduire pour tout $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ une expression simplifiée de la somme :

$$S_n(t) = 1 + \sin^2 t + \sin^4 t + \dots + \sin^{2n-2} t$$

c) Soit F'_n la fonction dérivée de F_n . Calculer $F'_n(t)$.

On établira que pour tout $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, on a: $F'_n(t) = \frac{1 - \sin^{2n} t}{\cos t}$.

d) Calculer $F_n(0)$.

2°) a) Exprimer l'intégrale $L_n = \int_0^{\frac{\pi}{6}} F'_n(t) dt$ en fonction de J_2 et I_n .

c) En déduire que : $F_n\left(\frac{\pi}{6}\right) = \alpha g\left(\frac{\pi}{6}\right) + \beta I_n$ où α et β sont des constantes réelles à déterminer.

d) En déduire la limite de la suite $(U_n), n \in \mathbb{N}$ définie par :

$$U_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{3 \times 2^3} + \frac{1}{5 \times 2^5} + \dots + \frac{1}{(2n-1)2^{2n-1}}$$

« La mathématique est la mère des sciences »