

Mini Bac			
Epreuve de mathématiques			
Classe : TSE	2025 – 2026	Durée : 4 heures	Coef : 05
Académie d'Enseignement de Gao (Lycée privé les Elites-Gao)			

Lis attentivement :

- Le sujet est composé de deux exercices et un problème tous obligatoires. Il comprend deux pages.
- La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 -----(4, 5 points)

I/ 1- Soient a et n deux entiers naturels non nuls, on pose $x_n = (a + 1)^n - na - 1$

- a- Calcule x_1 ; x_2 et x_3 **(0, 75 pt)**
- b- Démontre par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, x_n est divisible par a^2 . **(0, 75 pt)**

2- Un entier naturel non nul N s'écrit $\overline{xyz}$ en base 7 et $\overline{zyx}$ en base 9.

- a- Montre que $y = 24x - 40z$ **(0, 5 pt)**
- b- En déduis que $y = 0$ **(0, 5 pt)**
- c- Détermine x et y **(0, 5 pt)**

II/ Une association composée de 10 hommes et 8 femmes désire former un comité de 5 personnes dans lequel doivent se trouver au moins 2 hommes et 2 femmes.

Détermine le nombre de façons de former ce comité dans chacun des cas suivants :

- 1) Chaque membre de l'association accepte de faire partie du comité. **(0, 5 pt)**
- 2) Trois des hommes refusent d'en faire partie. **(0, 5 pt)**
- 3) Monsieur x et madame y refusent de siéger ensemble. **(0, 5 pt)**

Exercice 2 -----(5 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(A; \vec{u}; \vec{v})$, unité graphique 1cm.

On considère les points B , D et C définis par : $\overrightarrow{AB} = 2\vec{u}$, $\overrightarrow{AD} = 2\vec{v}$ tel que $ABCD$ soit un rectangle.

- 1°) Faire une figure qui sera complétée au fur et à mesure de l'exercice. **(0,5pt)**
- 2°) Soit E l'image de B par la translation de vecteur $\overrightarrow{DB}$. Détermine l'afixe Z_E de E .
Construis E . **(1pt)**
- 3°) Détermine les réels a et b tels que le point F d'afixe $Z_F = 6 - 4i$ soit le barycentre des points A , B et C affectés respectivement des coefficients a , b et 1. **(1pt)**
- 4°) On considère la similitude directe S qui transforme A en E et B en F .
 - a) Exprime Z' en fonction de Z où Z' est l'afixe du point M' image de M par S . **(0,5pt)**
 - b) Détermine le centre Ω , l'angle θ et le rapport k de la similitude S . **(1pt)**
 - c) Détermine les images de C et D par S . **(0,5pt)**
 - d) Calcule l'aire de l'image par S du rectangle $ABCD$. **(0,5pt)**

Problème -----(10, 5 points)

Partie I

A tout entier naturel non nul, on associe la fonction f_n définie sur $]-\frac{1}{2}; +\infty[$ par

$$f_n(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^n \ln\left(x + \frac{1}{2}\right).$$

On désigne par (C_n) la courbe représentative de f_n dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ unité graphique 2 cm ; on notera f'_n la dérivée de f_n .

1- Soit g_n la fonction définie $]-\frac{1}{2}; +\infty[$ par $g_n(x) = n \ln\left(x + \frac{1}{2}\right) + \frac{2x-1}{2x+1}$

a. Etudie les variations de la fonction g_n . **(0, 75 pt)**

b. Calcule $g_n\left(\frac{1}{2}\right)$ et détermine le signe de g_n sur $]-\frac{1}{2}; +\infty[$. **(1 pt)**

2. a- Pour tout $x \in]-\frac{1}{2}; +\infty[$; montrer que :

(i) $f'_1(x) = g_1(x)$. **(0, 5 pt)**

(ii) $f'_n(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^{n-1} g_n(x)$; **(0, 5 pt)**

b) On suppose que n est impair.

Etudie les variations de f_n et dresse son tableau de variation. **(1 pt)**

c) On suppose que n est pair.

Etudie les variations de f_n et dresse son tableau de variation. **(1 pt)**

3) a) Etudie les positions relatives de (C_1) et (C_2) . **(0, 5 pt)**

b) Trace les courbes (C_1) et (C_2) sur une même figure. **(2 pt)**

Partie II

On considère la suite (v_n) définie par $v_n = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \left(x - \frac{1}{2}\right)^n \ln\left(x + \frac{1}{2}\right) dx$.

1- Montre que pour tout $n \geq 1$, $0 \leq v_n \leq \frac{\ln 2}{n+1}$. **(0, 5 pt)**

En déduis la limite de la suite v_n . **(0, 5 pt)**

2- A l'aide d'une intégration par parties, montrer que

$$v_n = \frac{\ln 2}{n+1} - \frac{2^{-n}}{n+1} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^* \text{ (1 pt)}$$

3- On pose $n \geq 1$ et $\frac{1}{2} \leq v_n \leq \frac{3}{2}$.

$$S_n(x) = 1 - \left(x - \frac{1}{2}\right) + \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \dots + (-1)^n \left(x - \frac{1}{2}\right)^n$$

a. Montrer que $S_n(x) = \frac{2}{2x+1} + (-1)^n \frac{(2x-1)^{n+1}}{2x+1}$. **(1 pt)**

b. Dédire que : $v_n = \frac{\ln 2}{n+1} - \frac{(-1)^{n-1}}{n+1} \left[\ln 2 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} \right]$ **(1, 5 pt)**

On donne $\ln 2 \approx 0,69$; $\ln 3 \approx 1,1$; $\ln 5 \approx 1,61$