**LES ECOLES MAARIF DE TÜRKIYE AU MALI**

**L'ANNEE SCOLAIRE 2025-2026**

**BAC BLANC – SESSION DE FEVRIER**

**SERIE : TSE** **EPREUVE DE : MATHEMATIQUES**

**COEFFICIENT : 4** **DUREE : 4H**

**Exercice 1 : (8points)**

On considère l'équation $(E)$: $z^5 - 1 = 0$.

1) a) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E)$ .

b) Représente dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{U}, \overrightarrow{V})$ les points images des solutions de (E). (Unité graphique 4cm).

c) Comment appelle-t-on la figure obtenue par ces points ?

2) a) Démontre que $\forall\, z \in \mathbb{C}$, on a : $(z-1)(z^4 + z^3 + z^2 + z + 1) = z^5 - 1$.

b) En déduis les solutions de l'équation : $(E_1)$: $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$

3) Démontre que $\forall\, z \in \mathbb{C}$, tel que $z \neq 0$, on a :

$z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0 \Leftrightarrow u^2 + u - 1 = 0 \left(\text{avec } u = z + \frac{1}{z}\right)$.

4) a) Résous l'équation $(E')$: $u^2 + u - 1 = 0$.

b) Démontre que les deux solutions trouvées de $(E')$ sont respectivement égales à $e^{i\frac{2\pi}{5}} + e^{i\frac{8\pi}{5}}$ et $e^{i\frac{4\pi}{5}} + e^{i\frac{6\pi}{5}}$.

c) Déduis-en les valeurs exactes de : $\cos\frac{2\pi}{5}$ ; $\cos\frac{4\pi}{5}$ ; $\cos\frac{6\pi}{5}$ et $\cos\frac{8\pi}{5}$.

5) a) En remarquant que : $\forall\, (\alpha;\beta) \in \mathbb{R}^2$, on a : $\alpha = \frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\alpha-\beta}{2}$ et $\beta = \frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\alpha-\beta}{2}$ et en utilisant les formules d'Euler, établis que : $e^{i\alpha} - e^{i\beta} = 2i \sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}$.

b) En déduis la longueur $L$ exacte du coté de la figure ci-dessus.

Donne une valeur approchée à $10^{-2}$ près

**Exercice 2 : (4pts)**

1. Résous dans $\mathbb{Z}$ les équations : $2x - 3 \equiv 0[4]$ ; $5x \equiv -4[7]$ et $3x - 2 \equiv 4[9]$.
2. Résous dans $\mathbb{Z}$ les systèmes : $\begin{cases} x \equiv -1[3] \\ -2x \equiv 1[5] \\ 4x \equiv 2[7] \end{cases}$ et $\begin{cases} 5x \equiv -2[7] \\ 3x \equiv 2[11] \end{cases}$.
3. Résous dans $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})$ avec deux méthodes différentes l'équation $\dot{x}^2 - \dot{3}x + \dot{2} = \dot{0}$.
4. Résous dans $\mathbb{Z}^2$ les équations : $21x + 7y = 5$ et $16x - 12y = 4$.

**Problème (8pts)**

1. Soit la fonction $g$ définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2x - \sqrt{x^2+1}$
   a. Étudie les variations de la fonction $g$.
   b. Montre que $g(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha$ que l'on déterminera.
   c. En déduis le signe de $g$ sur $\mathbb{R}$.
2. Soit la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2\sqrt{x^2+1} - x$ et $Cf$ sa représentation graphique dans un repère orthonormé $(0;\vec{\imath};\vec{\jmath})$. On donne les droites $D: y = -3x$ et $D': y = x$
   a. Étudie les limites de $f$ en $-\infty$ et en $+\infty$.
   b. Montre que $\forall x \in \mathbb{R}\ ;\ f'(x) = \frac{g(x)}{\sqrt{x^2+1}}$.
   c. En déduis le tableau de variation de $f$.
   d. Montre que les droites $D$ et $D'$ sont asymptotes respectivement en $-\infty$ et $+\infty$.
   e. Étudie la position de $Cf$ par rapport aux deux droites $D$ et $D'$.
   f. Trace la courbe $Cf$ et les droites $D$ et $D'$.

**Proposition de correction**

**Exercice 1**

Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E): z^5 - 1 = 0$

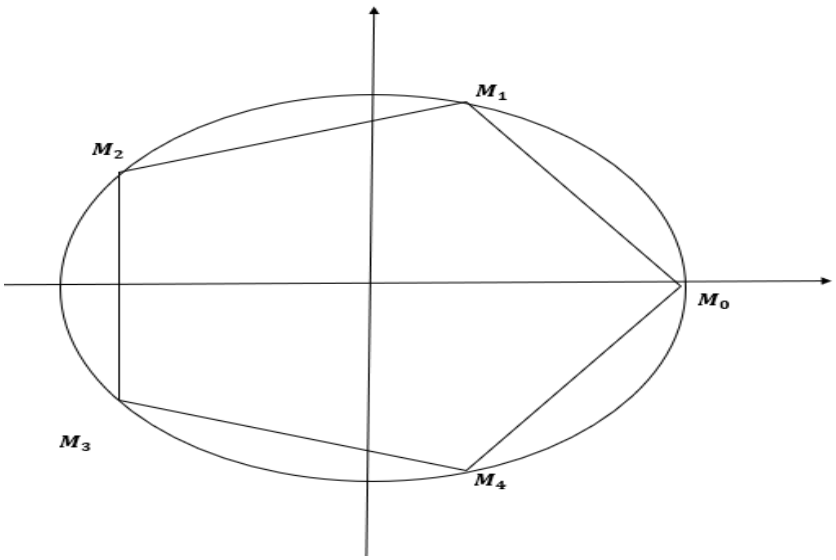
L'équation $(E)$ est équivalente à : $z^5 = 1$

Dans les solutions de $(E)$ dans $\mathbb{C}$ sont les racines cinquièmes de l'unité c'est-à-dire les complexes de $z_k$ de la forme $z_k = e^{i\frac{2k\pi}{5}}$ avec $k = \{0; 1; 2; 3; 4\}$

L'ensemble des solutions de $(E)$ dans $\mathbb{C}$ est :

$S_{\mathbb{C}} = \left\{1;\ e^{i\frac{2\pi}{5}};\ e^{i\frac{4\pi}{5}}; e^{i\frac{6\pi}{5}};\ e^{i\frac{8\pi}{5}}\right\}$

b) En désignant par $M_0, M_1, M_2;\ M_3$ et $M_4$ les points-images respectifs de 1 ; $e^{i\frac{2\pi}{5}};\ e^{i\frac{4\pi}{5}}; e^{i\frac{6\pi}{5}}$ et $e^{i\frac{8\pi}{5}}$, on obtient la representation graphique ci-dessous




c) La figure obtenue par ces points est pentagone régulier

2)

a) Démontrons que : $\forall\, z \in \mathbb{C}$, on a : $(z-1)(z^4 + z^3 + z^2 + z + 1) = z^5 - 1$

On a : $\forall\, z \in \mathbb{C}, (z-1)(z^4 + z^3 + z^2 + z + 1) = z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z - z^4 - z^3 - z^2 - z - 1$

D'où $(z-1)(z^4 + z^3 + z^2 + z + 1) = z^5 - 1$

b) Déduisons-en les solutions de l'équation $(E_1): z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$

D'après résultat précédent, on a :

$\forall\, z \in \mathbb{C}\setminus\{1\}\quad z^4 + z^3 + z^2 + 1 = \frac{z^5-1}{z-1}$

Ainsi $\forall\, z \in \mathbb{C}\setminus\{1\}:\ z^4 + z^3 + z^2 + 1 = 0 \iff z^5 - 1 = 0$

Donc les solutions de $(E_1)$ sont celle de $(E)$ différentes de 1.

Donc c'est-à-dire $e^{i\frac{2\pi}{5}};\ e^{i\frac{4\pi}{5}}; e^{i\frac{6\pi}{5}};\ e^{i\frac{8\pi}{5}}$

3)

$\forall\, z \in \mathbb{C}^*$, on a $U^2 + U + 1 = 0 \Leftrightarrow \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 + \left(z + \frac{1}{z}\right) - 1 = 0$

$\Leftrightarrow z^2 + 2 + \frac{1}{z^2} + z + \frac{1}{z} - 1 = 0$

$\Leftrightarrow z^4 + 2z^2 + 1 + z^3 + z - z^2 = 0$

Ainsi $\forall\, z \in \mathbb{C}$ tel $z \neq 0$,

On a : $z^4 + z^3 + z^2 + z = 0 \Leftrightarrow U^2 + U - 1 = 0$ (avec $u = z + \frac{1}{z}$)

4) a) Résolvons l'équation $(E')$: $U^2 + U - 1 = 0$

$(E')$ a pour discriminant : $\Delta = 1 + 4 = 5$

Donc ses solutions sont : $U_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ et $U_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

b) Démontrons que $e^{i\frac{2\pi}{5}} + e^{i\frac{8\pi}{5}} + e^{i\frac{4\pi}{5}} + e^{i\frac{8\pi}{5}}$ sont des solutions de $(E')$.

Des questions 2.b et 3), on déduit que tout nombre réel $U$ solution de $(E')$ s'écrit $u = z + \frac{1}{z}$ avec $z \in \mathbb{C} \setminus \{0; 1\}$

Or $e^{i\frac{8\pi}{5}} \in \mathbb{C} \setminus \{0; 1\}$ et on a :

$e^{i\frac{2\pi}{5}} + \frac{1}{e^{i\frac{2\pi}{5}}} = e^{i\frac{2\pi}{5}} + e^{i\frac{2\pi}{5}} = e^{i\frac{2\pi}{5}} + e^{i(2\pi - \frac{2\pi}{5})} = e^{i\frac{2\pi}{5}} + e^{i\frac{8\pi}{5}}$

Alors $e^{i\frac{2\pi}{5}} + e^{i\frac{8\pi}{5}}$ est donc solution de $(E')$

De même $e^{i\frac{4\pi}{5}} \in \mathbb{C} \setminus \{0; 1\}$ et $e^{i\frac{2\pi}{5}} + \frac{1}{e^{i\frac{4\pi}{5}}} = e^{i\frac{4\pi}{5}} + e^{-i\frac{4\pi}{5}} = e^{i\frac{4\pi}{5}} + e^{i\frac{6\pi}{5}}$

Et donc $e^{i\frac{4\pi}{5}} + e^{i\frac{6\pi}{5}}$ est aussi solution de $(E')$

c) Déduisons les valeurs exactes de $\cos\frac{2\pi}{5}, \cos\frac{4\pi}{5}; \frac{6\pi}{5}$ et $\cos\frac{2\pi}{5}$

On a : $e^{i\frac{2\pi}{5}} + e^{i\frac{8\pi}{5}} = e^{i\frac{2\pi}{5}} + e^{-i\frac{2\pi}{5}} = 2\cos\frac{2\pi}{5}$

Donc $2\cos\frac{2\pi}{5}$ est une solution de $(E')$

Or $\frac{2\pi}{5} \in [0; \frac{\pi}{2}[$ donc : $\cos\frac{2\pi}{5} > 0 \Longrightarrow 2\cos\frac{2\pi}{5} > 0$

D'où $2\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \Longrightarrow cos\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$

Comme $2\cos\frac{2\pi}{5} = \cos\left(2\pi - \frac{2\pi}{5}\right) = \cos\frac{2\pi}{5}$ alors $\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$

De même $cos\frac{i4\pi}{5} = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ ce qui donne $\cos\frac{4\pi}{5} = cos\frac{6\pi}{5} = \frac{-1-\sqrt{5}}{4}$

Démontrons que : $\forall\,(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2\ \ e^{i\alpha}-e^{i\beta}=2i\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}$

On a : $e^{i\alpha}-e^{i\beta}=\ e^{i\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}-e^{i\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}$

$$=e^{i\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}.e^{i\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}-e^{i\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}.e^{-i\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}$$

$$=e^{i\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}\left(e^{i\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}-e^{-i\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}\right)$$

$$=e^{i\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}\times 2i\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

D'où $e^{i\alpha}-e^{i\beta}=\ 2i\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\times e^{i\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}$

b) Calcul de la longueur $L$ du côté du pentagone régulier

On a : $L=\ \left|e^{i\frac{4\pi}{5}}-e^{i\frac{2\pi}{5}}\right|$

En posant $\alpha=\frac{4\pi}{5}$ et $\beta=\ \frac{2\pi}{5}$ l'égalité précédente devient : $e^{i\frac{4\pi}{5}}-e^{i\frac{2\pi}{5}}=2i\sin\frac{\pi}{5}e^{i\frac{3\pi}{5}}$

D'où $L=\left|2i\sin\frac{\pi}{5}e^{i\frac{3\pi}{5}}\right|=\left|2\sin\frac{\pi}{5}\right|\,|i|\,\left|e^{i\frac{3\pi}{5}}\right|$

Donc $L=\ 2\sin\frac{\pi}{5}$ (valeur exacte)

Avec une calculatrice, on obtient une valeur approchée $L\approx 1{,}18$

**Exercice 2**

1. Résolvons dans $\mathbb{Z}$ les équations :

$2x-3\equiv 0[4]\Longrightarrow 2x\equiv 3[4]$ impossible $S=\{\}$.

$5x\equiv -4[7]\Longrightarrow 5x\equiv 3[7]\Longrightarrow 15x\equiv 9[7]\Longrightarrow x\equiv 2[7]\Longrightarrow x=7k+2,k\in\mathbb{Z}$.

$S=\{7k+2,k\in\mathbb{Z}\}$

$3x-2\equiv 4[9]\Longrightarrow 3x\equiv 6[9]\Longrightarrow x\equiv 2[3]\Longrightarrow x=3k+2,k\in\mathbb{Z}$.

$S=\{3k+2,k\in\mathbb{Z}\}$

2. Résolvons dans $\mathbb{Z}$ les systèmes : $\begin{cases}x\equiv -1[3]\\ -2x\equiv 1[5]\\ 4x\equiv 2[7]\end{cases}$ et $\begin{cases}5x\equiv -2[7]\\ 3x\equiv 2[11]\end{cases}$.

$$\begin{cases} x \equiv -1[3] \\ -2x \equiv 1[5] \\ 4x \equiv 2[7] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \equiv 2[3] \\ 3x \equiv 1[5] \\ 8x \equiv 4[7] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \equiv 2[3] \\ 6x \equiv 2[5] \\ x \equiv 4[7] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \equiv 2[3] \\ x \equiv 2[5] \\ x \equiv 4[7] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3u+2 \\ x = 5v+2 \\ x \equiv 4[7] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 3u+2 \\ 3u+2 = 5v+2 \\ x \equiv 4[7] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3u+2 \\ 3u \equiv 0[5] \\ x \equiv 4[7] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3u+2 \\ u \equiv 0[5] \\ x \equiv 4[7] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3u+2 \\ u = 5k \\ x \equiv 4[7] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 15k+2 \\ x \equiv 4[7] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \equiv 2[15] \\ x \equiv 4[7] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \equiv 2[15] \\ x \equiv 4[7] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 15P+2 \\ x = 7Q+4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 15P+2 \\ 15P+2 = 7Q+4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 15P+2 \\ 15P \equiv 2[7] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 15P+2 \\ P \equiv 2[7] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 15P+2 \\ P = 7k+2 \end{cases} \Rightarrow x = 15(7k+2)+2 \Rightarrow x = 105k+32$$

$S = \{105k+32\}, k \in \mathbb{Z}$

$$\begin{cases} 5x \equiv -2[7] \\ 3x \equiv 2[11] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 15x \equiv -6[7] \\ 12x \equiv 8[11] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \equiv 1[7] \\ x \equiv 8[11] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 7u+1 \\ x = 11v+8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x \\ x = 7u+1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 7u+1 = 11v+8 \\ x = 7u+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7u = 7+11v \\ x = 7u+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7u \equiv 7[11] \\ x = 7u+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u \equiv 1[11] \\ x = 7u+1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} u = 11k+1 \\ x = 7u+1 \end{cases} \Rightarrow x = 7(11k+1)+1 \Rightarrow x = 77k+8, k \in \mathbb{Z}.$$

$S = \{77k+8, k \in \mathbb{Z}\}$

3. Résolvons dans $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})$ avec deux méthodes différentes l'équation $x^2 - \dot{3}x + \dot{2} = \dot{0}$.

1ère méthode

$x^2 - \dot{3}x + \dot{2} = \dot{0}$ ; $\Delta = 9 - 8 = \dot{1}$, $x_1 = \frac{3-\sqrt{1}}{2} = \dot{1}$ et $x_2 = \frac{3+\sqrt{1}}{2} = \dot{2}$ ; $S = \{\dot{1}; \dot{2}\}$

2ième méthode

| $x$ | $\dot{0}$ | $\dot{\mathbf{1}}$ | $\dot{\mathbf{2}}$ | $\dot{3}$ | $\dot{4}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x^2$ | $\dot{0}$ | $\dot{1}$ | $\dot{4}$ | $\dot{4}$ | $\dot{1}$ |
| $-\dot{3}x$ | $\dot{0}$ | $\dot{2}$ | $\dot{4}$ | $\dot{1}$ | $\dot{3}$ |
| $\dot{2}$ | $\dot{2}$ | $\dot{2}$ | $\dot{2}$ | $\dot{2}$ | $\dot{2}$ |
| $x^2 - \dot{3}x + \dot{2}$ | $\dot{2}$ | $\dot{0}$ | $\dot{0}$ | $\dot{2}$ | $\dot{1}$ |

$S = \{\dot{1}; \dot{2}\}$

4. Résolvons dans $\mathbb{Z}^2$ les équations :

$21x + 7y = 5$

$pgcd(21; 7) = 7$, or $7 \nmid 5$ donc $S = \{\}$.

$16x - 12y = 4 \Rightarrow 4x - 3y = 1$

$pgcd(4; 3) = 1$, or $1 \mid 1$ donc l'équation admet des solutions

$4x - 3y = 1 \Rightarrow 4x = 1 + 3y \Rightarrow 4x \equiv 1[3] \Rightarrow x \equiv 1[3] \Rightarrow x = 3k + 1$

$4x-3y=1 \Longrightarrow 4(3k+1)-y=1 \Longrightarrow 6k+4-3y=1 \Longrightarrow 3y=6k+3 \Longrightarrow y=2k+1$

$S=\{(3k+1;2k+1)\}$

**Problème**

1. Soit la fonction $g$ définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=2x-\sqrt{x^2+1}$

   a. Étudie les variations de la fonction $g$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} 2x-\sqrt{x^2+1}=\lim\limits_{x\to-\infty} 2x-\sqrt{x^2}=-\infty-\infty=-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} 2x-\sqrt{x^2+1}=\lim\limits_{x\to+\infty} 2x-\sqrt{x^2}=+\infty-\infty$ FI

$\lim\limits_{x\to+\infty} 2x-\sqrt{x^2+1}=\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(2x-\sqrt{x^2+1})(2x+\sqrt{x^2+1})}{2x+\sqrt{x^2+1}}=\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{4x^2-x^2-1}{2x+\sqrt{x^2+1}}=\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x\left(3x-\frac{1}{x}\right)}{x\left(2+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)}=$

$+\infty$

$g'(x)=2-\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{2\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2+1}}$

Posons $2\sqrt{x^2+1}-x\leq 0 \Longrightarrow \sqrt{x^2+1}\leq\frac{x}{2} \Longrightarrow x^2+1\leq\left(\frac{x}{2}\right)^2 \Longrightarrow 3x^2+4\leq 0 \Longrightarrow x^2\leq-\frac{4}{3}$

faux

Donc $g'(x)>0$ ; alors $g$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

| $x$ | $-\infty$ | $\alpha$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $+$ | |
| $g$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |

   b. Montre que $g(x)=0$ admet une solution unique $\alpha$ que l'on déterminera.

D'après le tableau de variation, la fonction $g$ est définie, continue et strictement croissante sur $]-\infty;+\infty[ \longrightarrow ]-\infty;+\infty[$, or $0\in]-\infty;+\infty[$, donc l'équation $g(x)=0$ admet une solution unique $\alpha\in]-\infty;+\infty[$

$2x-\sqrt{x^2+1}=0 \Longrightarrow 2x=\sqrt{x^2+1} \Longrightarrow 4x^2=x^2+1 \Longrightarrow 3x^2=1 \Longrightarrow x=\frac{\sqrt{3}}{3}$

   c. En déduis le signe de $g$ sur $\mathbb{R}$.

Pour $x\in]-\infty;\alpha]; g(x)\leq 0$

Pour $x\in[\alpha;+\infty[; g(x)\geq 0$

2. Soit la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=2\sqrt{x^2+1}-x$ et $Cf$ sa représentation graphique dans un repère orthonormé $(0;\vec{\imath};\vec{\jmath})$. On donne les droites $D: y=-3x$ et $D': y=x$

a. Étudie les limites de $f$ en $-\infty$ et en $+\infty$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} 2\sqrt{x^2+1}-x = \lim\limits_{x\to-\infty} 2\sqrt{x^2}-x = \sqrt{(-\infty)^2}-(-\infty) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} 2\sqrt{x^2+1}-x = \lim\limits_{x\to+\infty} 2\sqrt{x^2}-x = \sqrt{(+\infty)^2}-(+\infty) = +\infty-\infty$ FI

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(2\sqrt{x^2+1}-x)(2\sqrt{x^2+1}+x)}{2\sqrt{x^2+1}+x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{4x^2+4-x^2}{2\sqrt{x^2+1}+x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3x+\frac{4}{x}}{2\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1} = +\infty$

b. Montre que $\forall x \in \mathbb{R}$ ; $f'(x) = \frac{g(x)}{\sqrt{x^2+1}}$.

$f'(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} - 1 = \frac{2x-\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{g(x)}{\sqrt{x^2+1}}$

c. En déduis le tableau de variation de $f$.

| $x$ | $-\infty$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f$ | $+\infty$ ↘ | $f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ | ↗ $+\infty$ |

d. Montre que les droites $D$ et $D'$ sont asymptotes respectivement en $-\infty$ et $+\infty$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} 2\sqrt{x^2+1}-x+3x = \lim\limits_{x\to-\infty} 2\sqrt{x^2}+2x = \sqrt{(-\infty)^2}+2(-\infty) = +\infty-\infty$ FI

$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{(2\sqrt{x^2+1}+2x)(2\sqrt{x^2+1}-2x)}{2\sqrt{x^2+1}-2x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{4x^2+4-4x^2}{2\sqrt{x^2+1}-2x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{4}{2\sqrt{x^2}-2x} = \frac{4}{2\sqrt{(-\infty)^2}+2(-\infty)} = \frac{4}{+\infty}$

$= 0$ alors $D: y = -3x$ est asymptote à $f$ en $-\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} 2\sqrt{x^2+1}-x-x = \lim\limits_{x\to+\infty} 2\sqrt{x^2}-2x = 2\sqrt{(+\infty)^2}-2(+\infty) = +\infty-\infty$ FI

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(2\sqrt{x^2+1}-2x)(2\sqrt{x^2+1}+2x)}{2\sqrt{x^2+1}+2x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{4x^2+4-4x^2}{2\sqrt{x^2+1}+2x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{4}{2\sqrt{x^2}+2x} = \frac{4}{2\sqrt{(+\infty)^2}+2(+\infty)} = \frac{4}{+\infty} = 0$

alors $D': y = x$ est asymptote à $f$ en $+\infty$.

e. Étudie la position de $Cf$ par rapport aux deux droites $D$ et $D'$.

Posons : $2\sqrt{x^2+1}-x+3x = 0 \Longrightarrow \sqrt{x^2+1} = -x \Longrightarrow x^2+1 = x^2 \Longrightarrow 1 = 0$ Faux.

$2\sqrt{x^2+1}-x+3x > 0$

De même $2\sqrt{x^2+1}-x-x > 0$

Dans les deux cas, les asymptotes sont aux dessous de la courbe.

| $x$ | $-\infty$ $\quad$ $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| Position | $Cf \;/\; D$ | $Cf \;/\; D'$ |

f. Trace la courbe $Cf$ et les droites $D$ et $D'$.

