

Lycée La Lanterne (LLANT)

Baccalauréat Blanc 2025-2026			
Classe : TSE	Mai 2026	Durée : 4 heures	Coef : 04
EPREUVE DE : MATHÉMATIQUES			

- Le sujet est composé de deux exercices et d'un problème tous obligatoires. Il comprend trois pages.
- La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- L'usage de la calculatrice non programmable est autorisé.

Exercice 1 : -----[5,5 points]

Les parties A et B sont indépendantes

A. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$; on considère le polynôme P tel que : $P(z) = z^3 - (3 + 4i)z - 2 + 8i$.

- Montre que l'équation $P(z) = 0$ admet une solution réelle z_0 que tu détermineras. (0, 5pt)
- Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$. (1pt)
- On désigne par z_1 et z_2 les deux autres solutions de l'équation $P(z) = 0$ telles que $\text{Im}(z_1) > \text{Im}(z_2)$. On pose $\alpha = z_1 - z_2$, $\beta = z_1 - 1$ et $\gamma = 3 + z_2$.
 - Ecris α , β et γ sous forme exponentielle. (1, 25pt)
 - Déduis-en les racines carrées de α . (0, 25pt)
- Soit S l'application du plan P dans P d'écriture complexe définie par : $z' = \alpha z + z_0$.
 - Détermine la nature et les éléments caractéristiques de S . (0, 75pt)
 - Détermine l'expression analytique de S . (0, 25pt)

B. 1) Résous dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation : $4x + 5y = 103$. (0, 5pt)

2) Les élèves d'une classe de TSE cotisent pour payer un gâteau qui coûte 5 150 FCFA. Chacun des garçons paye 250 FCFA et chacune des filles paye 200 FCFA. Détermine le nombre de garçons et de filles de cette classe sachant qu'il y a plus de garçons que de filles. De plus le nombre de filles est impair. (1pt)

Exercice 2 : -----[4 points]

Les parties A et B sont indépendantes

A. Dans le plan euclidien P on considère ABC un triangle équilatéral de côté a ($a > 0$). Soit I le barycentre des points pondérés $(A, 1)$, $(B, 2)$ et $(C, -2)$.

- Construis le barycentre I . (0, 5 pt).
- Calcule IA^2 , IB^2 et IC^2 en fonction de a . (0, 75 pt)
- Soit k un nombre réel.
 - Détermine en fonction de k , l'ensemble (E_K) des points M du plan tels que :
$$MA^2 + 2MB^2 - 2MC^2 = ka^2$$
 (0, 75 pt)
 - Existe-t-il une valeur de k pour laquelle B appartient à (E_K) ? Construis (E_K) . (0, 5 pt)
 - Montre que (E_{-1}) est un cercle tangente à la droite (AB) . Construis (E_{-1}) (0, 5 pt)

B. Une urne contient n boules blanches ($n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 2$), 5 boules rouges et 3 boules vertes. On tire simultanément et au hasard deux boules de l'urne.

1. Quelle est la probabilité de tirer deux boules blanches ? **(0, 5pt)**
2. On note $p(n)$ la probabilité de tirer deux boules de même couleur. Montre que :

$$p(n) = \frac{n^2 - n + 26}{(n + 8)(n + 7)}. \quad \textbf{(0, 5pt)}$$

Problème : -----[10,5 points]

Pour tout entier naturel n , on note f_n la fonction numérique de la variable réelle définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = (x + 2)^{n+1}e^{-x-1}$ et on note $I_n = \int_0^1 f_n(x) dx$.

On note (C_n) la courbe représentative de f_n dans le plan rapporté à un repère orthonormé (unité graphique : 1 cm).

Partie A :

On considère l'équation différentielle $(E): y'' + 2y' + y = 2e^{-x-1}$

- 1) Démontre que f_1 est solution de (E) et déduis-en une primitive de f_1 . (0,5 pt)
- 2) Démontre qu'une fonction φ est solution de (E) si et seulement si la fonction $\varphi - f_1$ est solution de l'équation différentielle $(E_0): y'' + 2y' + y = 0$. (0,5 pt)
- 3) Résous l'équation différentielle (E_0) et déduis-en les solutions de (E) . (0,5 pt)

Partie B :

- 1) Détermine la fonction dérivée f'_n de f_n . (0,5 pt)
- 2) a) Pour tout $n \geq 1$, donne l'expression de f'_n en fonction de f_n et de f_{n-1} . (0,25 pt)
- b) Déduis-en une relation entre I_n et I_{n-1} pour tout $n \geq 1$. (0,25 pt)
- c) Donne une interprétation graphique de I_0 . Calcule I_0 et déduis-en I_1 . (0,75 pt)
- 3) Dresse le tableau de variations de f_n suivant la parité de n . (1,5 pt)
- 4) Démontre que toutes les courbes (C_n) passent par deux points fixes dont on déterminera les coordonnées. (0,5 pt)
- 5) Etudie les positions relatives de (C_0) et (C_1) . (0,5 pt)
- 6) Détermine, suivant la parité de n , la limite de $\frac{f_n(x)}{x}$ lorsque x tend vers $-\infty$. Que peut-on en déduire pour les courbes (C_n) ? (0,75 pt)
- 7) Trace les courbes (C_0) et (C_1) dans le même repère. (1 pt)

Partie C :

Soit g la restriction de f_1 sur $\left[1; \frac{7}{5}\right]$.

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = g(u_n) \end{cases}$

- 1) a) Démontre que pour tout $x \in \left[1; \frac{7}{5}\right]$; $|g'(x)| \leq \frac{3}{5}$. (0,25 pt)
- b) Démontre que l'équation $g(x) = x$ admet une solution unique $\alpha \in \left[1; \frac{7}{5}\right]$. (0,5 pt)
- 2) a) Montre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \left[1; \frac{7}{5}\right]$ (0,25 pt)
- b) Démontre que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{3}{5} |u_n - \alpha|$ et que $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{3}{5}\right)^{n+1}$. (0,5 pt)
- c) Déduis-en la limite de la suite (u_n) . (0,25 pt)

d) Détermine le plus petit entier naturel p tel que u_p soit une valeur approchée de α à 10^{-2} près. (0,25 pt)

Partie D :

Soit h la restriction de f_1 sur $[0; 1]$.

Pour tout entier naturel non nul n , on pose $S_n = \frac{1}{n} \sum_{p=1}^n h\left(\frac{p}{n}\right)$.

1. En utilisant le sens de variation de h sur $[0; 1]$, démontre que pour tout entier naturel p tel que $0 \leq p \leq n - 1$, on a : (0,25 pt)

$$\frac{1}{n} h\left(\frac{p+1}{n}\right) \leq \int_{\frac{p}{n}}^{\frac{p+1}{n}} h(x) dx \leq \frac{1}{n} h\left(\frac{p}{n}\right).$$

2. Déduis-en que : $S_n \leq \int_0^1 h(x) dx \leq S_n + \frac{4e-9}{ne^2}$. (0,25 pt)
3. Démonstre que $I_1 - \frac{4e-9}{ne^2} \leq S_n \leq I_1$ et déduis-en la limite de (S_n) . (0,5 pt)