

EXERCICE 1 :**I.**

- Détermine les entiers x et y tels que $N = \overline{3x92y}$ soit divisible par 15.
- Résous dans $\mathbb{Z}^2$ les équations : $8x + 1 = y^2$; $xy - 4y = 42$; $91x + 10y = 412$.
- On se propose de résoudre le système : $(S): \begin{cases} h_n(z) = 1 \\ |z| = |1 - z| \end{cases}$ avec $h_n(z) = z^n(1 - z)$ et $n \in \mathbb{N}$.
 - Montre que l'équation $(E) : |z| = |1 - z|$ admet une infinité de solutions.
 - Calcule le module et un argument de $(1 - z_0)z^n$ en fonction du module ρ et de l'argument θ d'une solution z_0 de l'équation (E) .
 - En déduis que le système (S) n'admet des solutions que si $n \equiv 1[6]$. Résous complètement (S) .
- Trouve l'entier naturel n tels que $P = n^2 - 240$ soit un carré parfait.

II.

- Le 13 décembre 2026. Un professeur de mathématiques affirme dans une classe de TSE que le jour du baptême de son fils, deux étrangers étaient présents chez lui.
Il dit : "À partir de ce jour, combien de jours s'écrouleront pour que l'étranger A qui revient tous les 24 jours et B qui y revient tous les 18 jours se retrouveront pour la première fois chez lui ? "

 - Précise le nombre de retours qu'aurait fait chacun à la date de leur prochain rencontre.
 - Combien de tours auront fait A et B pour qu'ils se retrouvent chez le professeur pour la cinquième fois.
 - Détermine les valeurs possibles de $n = 2^a \times 3^b$ tels que le nombre de diviseurs de n^2 est le triple du nombre de diviseurs de n .

- Détermine les racines quatrième de $Z = -7 + 2i$ sous forme algébriques.
- Détermine l'ensemble des couples $(x ; y) \in \mathbb{N}^2$ tels que :

$$\begin{cases} PPMC(x, y) - 4 PGCD(x, y) = 124. \\ 3 \leq PGCD(x, y) \leq 50. \end{cases}$$
- Résous dans $\mathbb{R}^2$, le système : $\begin{cases} x + y^2 = 12. \\ \log_3(x) + 2\log_3(y) = 3. \end{cases}$

EXERCICE 2 :

1. On considère le polynôme P définie par : $P(z) = z^4 - 6z^3 + 24z^2 - 18z + 63$.
 - a. Montre que les points A, B, C et D d'affixes respectifs Z_A, Z_B, Z_C et Z_D solutions l'équation $P(z) = 0$ appartiennent à un même cercle (C) dont on précisera le centre Ω et le rayon r .
 - b. Précise l'affixe de E symétrie de C par rapport à O . Quelle est la nature de BED .
2. En utilisant les inégalités des accroissements finis, montre que :

$$\forall x \in [1, 2]; \frac{x+1}{\sqrt{2}} \leq \varphi(x) \leq \frac{2x-2+\sqrt{10}}{\sqrt{5}}. \text{ Avec } \varphi \text{ la fonction } : x \mapsto \sqrt{1+x^2}$$

3. Pour tout entier naturel n , on pose $I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x} dx$.
 - a. Calcule I_0 et I_1 . Puis montre que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a la relation de récurrence :

$$\frac{I_{n-1}}{I_n} = 1 + \frac{3}{2n}.$$

- b. En déduis I_3 et I_5 .

4. Résous dans $\mathbb{Z}/29\mathbb{Z}$ les équations :

a) $3x = 4$

b) $x^2 - 27x + 15 = 0$

5. Trouve la solution f de $(E) : 9y'' + y = 0$. Pour que : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = 0$ et $\int_0^{\pi} f(x) dx = 3$.

6. Soit $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ définie par : $z \mapsto \frac{z + \bar{z} - i}{z - i\bar{z}}$

- a. Détermine et construis l'ensemble des points M du plan tels que $f(z)$ soit imaginaire pur.

- b. Détermine et construis l'ensemble des points M du plan tels que :

$$|z + 1 + i| = |z - 2i| \quad ; \quad |(1+i)z + 2 + 2i| = 2\sqrt{2}$$

$$2|z + i| = |z - 2i| \quad ; \quad \arg\left(\frac{z - 2i}{z + 1 - i}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi.$$

PROBLÈME :

Partie A : Soit f la fonction numérique de la variable réelle définie par $f(x) = xe^{1-x}$. On désigne par (C_f) la courbe représentative de f dans le plan P rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}; \vec{j})$.

1. Dresse le tableau des variations de f ; On précisera les différentes asymptotes.
2. Construis (C_f) . Et calcule l'aire du domaine du plan limité par (C_f) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 0$.
3. Pour tout entier naturel $n \geq 1$. On pose $I_n = \int_0^1 x^n e^{1-x} dx$
 - a. Montre que $x^n \leq x^n e^{1-x} \leq x^n e$ pour tout $x \in [0; 1]$
 - b. Exprime $J_n = \int_0^1 x^n dx$ en fonction de n . Déduire que l'on a : $\frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{e}{n+1}$.
4. Par une intégration par parties, montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} = -1 + (n+1)I_n$.

Partie B : Soit les fonctions f et g définies par :

$$g(x) = \ln(1 + e^{-x}) - \frac{1}{1 + e^x} \text{ et } f(x) = e^x \ln(1 + e^{-x})$$

1. Étudie le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x sur D_g .
2. Démontre que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = -xe^x + e^x \ln(1 + e^x)$.
3. Interprète graphiquement les résultats de la limite de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
4. Montre que $f'(x) = e^x g(x)$. En déduis le sens de variation de f .
5. Une étude expérimentale à monter qu'une dose de 2,5 unités d'une substance médicamenteuse injectée à un patient par piqûre intraveineuse se répartit instantanément dans le sang. On suppose que la quantité de substance présente dans le sang est proportionnelle à sa vitesse de disparition de la solution et qu'au bout d'une heure la quantité de substance présente dans le sang diminue de 30%.
 - a. Trouve le coefficient de proportionnalité λ à 10^{-4} près.
 - b. Après combien de temps la quantité de substance dans le sang sera réduite de moitié ?

Partie C :

I. Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par $f(x) = xe^{-2x} + e^{-2x} + 1 - x$.

1. Dresse le tableau de variation de f' sur $[0; +\infty[$. En déduis le signe de f' .
2. Montre que la courbe (C) de f admet une asymptote (D) que l'on déterminera.
3. Établis que $f(x) = 0$ admet sur $[0; +\infty[$ une solution et une seule, notée α tel que $1 \leq \alpha \leq 2$.

II. Soit A, B, C trois points du plan P tels que $AB = AC = 5$ unités ; $BC = 6$ unités.

1. Construis le triangle ABC puis calcule $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.
2. Construis le barycentre G des points pondérés $(A, 2); (B, 3); (C, 3)$ puis calcule GA .
3. Soit h l'application de $P \rightarrow \mathbb{R}$ définie par : $h(M) = 2\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$
 - a. Exprime $h(M)$ en fonction de $h(G)$ et MG . Puis Calcule $h(A)$ et $h(G)$.
 - c. Détermine puis construis l'ensemble (E) des points M tels que $h(M) = h(A)$.