

SUJET N°1 :

EXERCICE 1 :

- 1) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$, l'équation : $143x - 100y = 1$
- 2) Déterminer l'ensemble des entiers naturels p tels que :
 $10^{5p} + 10^{3p} - 2 \equiv 0 \pmod{143}$

EXERCICE 2 :

Soit ABC un triangle isocèle tel que : $BC = 2$ et $AB = AC = 3$.
 On désigne par A' le milieu du segment $[BC]$ et H l'orthocentre de ABC.

- 1) Démontrer que : $\cos(\widehat{BAC}) = \frac{7}{9}$.
- 2) Soit B' le projeté orthogonal de B sur la droite (AC).
 a) Calculer $\frac{B'A}{B'C}$.
- b) Déterminer deux nombres α et γ tels que B' est le barycentre des points pondérés (A, α) et (C, γ) .
- 3) En déduire trois nombres réels a, b et c tels que H est le barycentre des points pondérés $(A, a), (B, b)$ et (C, c) .

EXERCICE 3 :

On dispose de deux urnes contenant chacune 5 jetons numérotés de 0 à 4. Dans la première mes jetons sont rouges et dans la deuxième les jetons sont bleus. On tire au hasard un jeton dans la première urne, on lit le nombre porté sur le jeton, soit a , puis on remet le jeton tiré dans l'urne, on effectue la même opération pour la deuxième urne ; on appelle b le numéro du jeton tiré.

A tout couple (a, b) on associe le nombre complexe $Z = a + ib$.

- 1) Quelle est la probabilité pour que Z soit une racine cubique de $-2 + 2i$?
- 2) Quelle est la probabilité pour que Z soit un réel ? Pour que Z soit imaginaire pur ?
- 3) On considère la variable aléatoire X qui, à chaque épreuve constituée du tirage d'un jeton rouge et d'un jeton bleu, on associe le module de $Z = a + ib$.
 a) Quelles sont les valeurs possibles de X ? Donner les résultats à l'aide d'un tableau à double entrée.
- b) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X .
- 4) Calculer l'écart – type.
- 5) Déterminer la fonction de répartition et tracer sa courbe.
- 6) Soit M l'image de Z dans le plan complexe.
 a) Quelle est la probabilité pour que M soit situé sur la première bissectrice ?
 b) Quelle est la probabilité pour que M soit à l'intérieur du cercle (C) d'équation :
 $x^2 + y^2 = 5$?

PROBLEME :

Les parties A et B sont indépendantes.

PARTIE A :

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par : $f(x) = \frac{\ln x}{-x+x\ln x}$

- 1) Etudier les variations de f et tracer sa courbe représentative (C) dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
- 2) Déterminer une équation de la tangente à (C) au point d'abscisse $x = 1$ et tracer cette tangente dans le même repère.
- 3) Trouver une primitive de f sur $]0; e[$.
- 4) Calculer l'aire de la portion du plan limitée par (C) ; l'axe des abscisses et les droites d'équations : $x = 1$ et $x = \sqrt{e}$.

PARTIE B :

Soit $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$; la suite définie par : $I_n = \int_0^\pi \sin^n x dx$.

- 1) Calculer I_0 et I_1 .
- 2) Sans calculer I_n démontrer que la suite est décroissante.
- 3) A l'aide d'une intégration par parties démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^* ; I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$.
- 4) Calculer I_9, I_{10} et I_{11} puis en déduire que : $\frac{2^{17}}{3^4 \times 7^2 \times 11} < \pi < \frac{2^{16}}{3^4 \times 5 \times 7^2}$.

Sujet N°2 :

Exercice 1 :

On considère la suite (a_n) défini sur $\mathbb{N}$ par $a_n = 2 \times 5^n + 7$.

- 1)a) Justifier que pour tout entier n , a_n est impair.
b) Déterminer suivant les valeurs de n , le reste modulo 8 de 5^n .
c) Dédire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \equiv 1[8]$
- 2)a) Montrer que si $\begin{cases} x \equiv 1 [8] \\ x \equiv 7 [125] \end{cases}$ alors $x \equiv 257[1000]$
b) Montrer que pour tout $n \geq 3$, on a : $a_n \equiv 257[1000]$
c) Quels sont les trois derniers chiffres de $(2 \times 5^{2020} + 7)(2 \times 5^{2021} + 7)$?
- 3)a) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $5a_{2n} - a_{2n+1} = 28$.
b) Soit d le PGCD de a_{2n} et a_{2n+1} . Montrer que d est différent de 7.
c) Trouver alors d .

Exercice 2 :

L'unité de mesure est le centimètre.

Dans le plan orienté, on considère un carré ABCD de centre K tel que $AB = 3$.

On note E le milieu du segment [BC] et G le barycentre des points pondérés (A,-4), (B,-1) et (D,-1).

- 1)a) Démontrer que A est le milieu du segment [KG].
b) Justifier que : $GB^2 = \frac{45}{2}$.
c) Justifier que $GB = GD$.
d) Déterminer et construire l'ensemble des points (Γ_1) des points M du plan tels que : $4MA^2 - MB^2 - MD^2 = 9$.
- 2)a) Justifier que : $AE = \frac{3\sqrt{5}}{2}$.
b) Démontrer que pour tout point M du plan :
$$3MA^2 - 2MB^2 - MD^2 = -27 + 4\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AE}$$

c) Déterminer et construire l'ensemble des points (Γ_2) des points M du plan tels que : $3MA^2 - 2MB^2 - MD^2 = 63$

Problème :

Partie A :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+e^{2x}}}$.

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan P.

- 1) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout x réel, $f'(x) = -\frac{e^{2x}}{(1+e^{2x})\sqrt{1+e^{2x}}}$.
- 2)a) Déterminer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
Interpréter graphiquement les résultats obtenus.
b) Vérifier que pour tout réel x , $0 < f(x) < 1$.
- 3)a) Dresser le tableau de variations de f .
b) Montrer que f réalise une bijection f^{-1} de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J que l'on

précisera.

c) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α tel que :

$$0,5 < \alpha < 0,6$$

d) Déterminer le signe de $f(x) - x$ pour tout x réel. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

4) Construire la droite d'équation $y = x$, placer le réel α sur l'axe des abscisses et le réel $\frac{\sqrt{2}}{2}$ sur l'axe des ordonnées.

a) Tracer la courbe (C) ?

b) Tracer (C') de f^{-1} .

5)a) Montrer que la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = x - \ln(1 + \sqrt{1 + e^{2x}})$ est une primitive de f .

b) On désigne par A l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = \alpha$.

Montrer que $A = \alpha + \ln\left(\frac{\alpha(1+\sqrt{2})}{\alpha+1}\right)$.

Partie B :

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction F_k définie sur $[0; +\infty[$, par :

$$F_k(x) = \int_0^x [f(t)]^k dt$$

1)a) Montrer que la fonction F_k est croissante sur $[0; +\infty[$.

b) Montrer que pour tout $t \in [0; +\infty[$, $0 \leq [f(t)]^k \leq e^{-kt}$.

c) En déduire que pour tout $\alpha \in [0; +\infty[$, on a : $0 \leq F_k(x) \leq \frac{1}{k}$.

d) Montrer alors que la fonction F_k possède une limite finie l_k quand x tend vers $+\infty$.

e) Montrer que $\lim_{k \rightarrow +\infty} l_k = 0$.

2)a) En utilisant la question 5)a de la Partie A, montrer que $l_1 = -h(0)$.

b) Montrer que pour tout réel $t \in [0; +\infty[$, $[f(t)]^3 - f(t) = f'(t)$.

c) En déduire que pour tout $x \geq 0$, $F_3(x) = F_1(x) + f(x) - f(0)$.

d) Montrer que $l_3 = \ln(1 + \sqrt{2}) - \frac{\sqrt{2}}{2}$.

3)a) Montrer que pour tout $x \geq 0$ et pour tout $k \geq 2$:

$$F_{2k+1}(x) - F_{2k-1}(x) = \frac{1}{2k-1} [[f(x)]^{2k-1} - [f(0)]^{2k-1}]$$

b) En déduire que : $l_{2k+1} - l_{2k-1} = -\frac{1}{(2k+1)(\sqrt{2})^{2k-1}}$, $k \geq 2$.

c) Montrer que pour tout $k \geq 2$:

$$l_{2k+1} = l_3 - \sum_{m=2}^k \frac{1}{(2m-1)(\sqrt{2})^{2m-1}}$$

d) En déduire que :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \sum_{m=2}^k \frac{1}{(2m-1)(\sqrt{2})^{2m-1}}$$

Sujet N°3 : (BAC SM - Session : 2020)

Exercice 1 : (05 points)

Pour tout entier naturel n non nul, on considère les nombres :

$$a_n = 4 \times 10^n - 1; b_n = 2 \times 10^n - 1; c_n = 2 \times 10^n + 1$$

1) a) Calculer $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, a_3, b_3$ et c_3

b) Montrer que a_n et c_n sont divisibles par 3.

c) Montrer, en utilisant la liste des nombres premiers inférieurs à 100 donnée ci-dessous, que b_3 est premier.

d) Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, $b_n \times c_n = a_{2n}$.

En déduire la décomposition en facteurs premiers de a .

e) Montrer que $\text{PGCD}(b_n; c_n) = \text{PGCD}(b_n; 2)$.

En déduire que b_n et c_n sont premiers entre eux.

On considère l'équation (E) : $b_3x + c_3y = 1$ d'inconnues les entiers relatifs x et y .

a) Justifier le fait que l'équation (E) possède au moins une solution.

b) En appliquant l'algorithme d'Euclide aux nombres c_3 et b_3 , déterminer une solution particulière de (E).

c) Résoudre l'équation (E).

Liste des nombres premiers inférieurs à 100 :

2-3-5-7-11-13-17-19-23-29-31-37-41-43-47-53-59-61-67-71-73-79-83-89-97

Exercice 2: (05 points)

Partie 1 : On considère la fonction p

définie sur $\forall z \in \mathbb{C}; P(z) = z^3 - (3+2i)z^2 + (1+5i)z + 2-2i$

1) a) Calculer $P(i)$.

b) Déterminer deux nombres complexes a et b tels que: $P(z) = (z-1)(z^2 + az + b)$

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation : $z^2 - (3+i)z + 2+2i = 0$.

3) En déduire dans les solutions de l'équation (E) : $P(z) = 0$

Partie 2 : Le plan est muni d'un repère $(O; \vec{u}; \vec{v})$ d'unité 5cm.

On pose $z_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}, z_{n+1} = \frac{1+i}{2} z_n$

On note A , le point du plan d'affixe z_n

1) a) Calculer z_1 et z_2

b) Placer les points A_0, A_1 , et A_2 dans le plan complexe.

2) On considère la suite U définie par: $\forall n \in \mathbb{N}, U_n = |z_{n+1} - z_n|$

a) Justifier que $\forall n \in \mathbb{N}, U_n = \frac{\sqrt{2}}{2} |z_n|$

- b) Démontrer que la suite est une suite géométrique de raison $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et de premier terme $\sqrt{2}$.
- c) Exprimer U_n en fonction de n .

Problème : (10 points)

Partie A : On considère la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par: $g(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2+1} + \ln x$

- 1) Déterminer les limites de g aux bornes de son ensemble de définition.
- 2) Démontrer que pour tout réel x appartenant à $]0; +\infty[$,

$$g'(x) = \frac{(x^2 + 1)^2 - 2x(1 - x^2)}{x(x^2 + 1)^2}$$

- 3)a) Démontrer que pour tout réel x appartenant à $]0; +\infty[$, $2x(1 - x^2) < (x^2 + 1)^2$
- b) En déduire le signe de $g'(x)$.
- c) Dresser le tableau de variation de g .
- 4)a) Démontrer que 1 est l'unique solution de l'équation $g(x) = 0$
- b) Démontrer que : $g(x) < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$ et $g(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1$

Partie B :

Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ part : $\begin{cases} f(x) = x \ln x - \ln(x^2 + 1) \text{ si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$ et (C)

sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(0, I, J)$. (Unité graphique : 1cm en abscisse et 2cm en ordonnée).

- 1) Etudier la continuité de f en 0.
- 2) Démontrer que la courbe (C) admet au point d'abscisse une demi-tangente verticale.
- 3) Calculer la limite de f en $+\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$. En déduire une interprétation graphique.
- 4)a) Démontrer que pour tout réel x appartenant à $]0; +\infty[$, $f'(x) = g(x)$
- b) Déterminer le sens de variation de f .
- c) Dresser le tableau de variation de f .
- 5)a) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]0; +\infty[$.
- b) Vérifier que: $2,22 < \alpha < 2,23$.
- 6) Démontrer que pour tout réel x appartenant à $]0; 1]$, $-\ln 2 \leq f(x) < 0$
- 7) Construire (C) dans le repère $(0, I, J)$. On prendra $\alpha = 2,22$.

Sujet N°4 : (BAC SM - Session : 2019)

Exercice 1 : (5 points)

Les suites d'entiers naturels (x_n) et (y_n) sont définies sur $\mathbb{N}$ par :

$$x_0 = 3 \text{ et } x_{n+1} = 2x_n - 1$$

$$y_0 = 1 \text{ et } y_{n+1} = 2y_n + 3$$

1) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $x_n = 2^{n+1} + 1$.

2) a) Calculer le PGCD de x_8 et x_9 d'une part, puis x_{2002} et x_{2003} d'autre part.

b) x_n et x_{n+1} sont-ils premiers entre eux pour tout entier naturel n ?

3) a) Démontrer que tout entier naturel n , $2x_n - y_n = 5$.

b) Exprimer y_n en fonction n .

c) En utilisant les congruences modulo 5, étudier suivant les valeurs de l'entier naturel p le reste de la division euclidienne de 2^p par 5.

d) On note d_n le PGCD de x_n et y_n tout entier naturel n .

Démontrer que l'on a $d_n = 1$ ou $d_n = 5$; en déduire l'ensemble des entiers naturels n tels que x_n et y_n soient premiers entre eux.

Exercice 2 : (5 points)

A) Une urne contient n boules blanches ($n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 2$), 5 boules rouges et 3 boules vertes.

On tire simultanément et au hasard deux boules de l'urne.

1) Quelle est la probabilité de tirer deux boules blanches ?

2) On note $p(n)$ la probabilité de tirer deux boules de même couleur.

Montrer que $p(n) = \frac{n^2 - n + 26}{(n+8)(n+7)}$.

B) Pour les questions suivantes, $n = 4$.

1) Calculer $p(4)$.

2) Un tirage consiste à tirer simultanément et au hasard deux boules de l'urne.

Un joueur effectue deux tirages indépendants, en remettant dans l'urne avant le second tirage les deux boules tirées la première fois.

Il mise au départ la somme de 30 francs.

Pour chaque tirage :

- Si les deux boules sont de même couleur il reçoit 40 francs ;
- Si elles sont de couleurs différentes, il reçoit alors 5 francs ;

On appelle gain du joueur la différence, à l'issue des deux tirages, entre la somme perçue par le joueur et sa mise initiale (ce gain peut être positif ou négatif).

On désigne par X la variable aléatoire égale au gain du joueur.

a) Quelles sont les valeurs prises par X ?

- b) Déterminer la loi de probabilité de X .
- c) Calculer l'espérance de X .

Problème : (10 points)

Partie A : (2,5 points)

La fonction g est définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2e^x + 2x - 7$.

- 1) Etudier les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$.
- 2) Etudier le sens de variation de la fonction g sur $\mathbb{R}$ et dresser son tableau de variations.
- 3) Justifier que l'équation $g(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une solution unique α tel que : $0,940 < \alpha < 0,941$.
- 4) Etudier le signe de g sur $\mathbb{R}$.

Partie B : (4 points)

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x - 5)(1 - e^{-x})$

On note (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- 1) Etudier le signe de f sur $\mathbb{R}$.
- 2) Etudier les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
- 3) Calculer $f'(x)$, où f' désigne la fonction dérivée de f , et vérifier que $f'(x)$ et $g(x)$ ont le même signe. Dresser le tableau de variations de f .
- 4) a) Démontrer l'égalité : $f(\alpha) = \frac{(2\alpha-5)^2}{2\alpha-7}$.
- b) Etudier le sens de variations de la fonction $h : x \rightarrow \frac{(2x-5)^2}{2x-7}$ sur l'intervalle $] -\infty; \frac{5}{2} [$.
En déduire, à partir de l'encadrement de α obtenu dans la partie A, un encadrement d'amplitude 10^{-2} de $f(\alpha)$.
- 5) Démontrer que la droite (D), d'équation $y = 2x - 5$, est asymptote à (C) en $+\infty$. Préciser la position de (C) par rapport à (D).
- 6) Tracer la droite (D) et la courbe (C) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (Unité graphique 2cm).

Partie C : (1,5 points)

A l'aide d'une intégration par parties, calculer en cm^2 l'aire A de la portion du plan délimitée par la courbe (C), l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = \frac{5}{2}$.

Partie D : (2 points)

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, on considère les points A_n , B_n et C_n d'abscisse n appartenant respectivement à l'axe des abscisses, à la droite (D) et à la courbe (C) ; soit U_n le réel défini par $U_n = \frac{C_n B_n}{A_n B_n}$.

- 1) Démontrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, on a :

$$U_n = \frac{2n-5-f(n)}{2n-5}.$$

- 2) a) Quelle est la nature de la suite (U_n) ?
b) Calculer la limite de la suite (U_n) . Pouvait-on prévoir ce résultat ?

Sujet N°5 : (BAC SM - Session : 2018)

Exercice 1 : (05 points)

1)a) Calculer $(1 + \sqrt{6})^2$; $(1 + \sqrt{6})^4$; $(1 + \sqrt{6})^6$.

b) Appliquer l'algorithme d'Euclide à 847 et 342. Que peut-on en déduire ?

2) Soit n un entier naturel non nul. On note a_n et b_n les entiers naturels tels que :

$(1 + \sqrt{6})^n = a_n + b_n\sqrt{6}$. Que valent a_1 et b_1 ?

D'après les calculs de la question 1) a) donner d'autres valeurs de a_n et b_n .

a) Calculer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n .

b) Démontrer que, si 5 ne divise pas $a_n + b_n$ alors 5 ne divise pas non plus $a_{n+1} + b_{n+1}$.

En déduire que, quel que soit n entier naturel non nul, a_n et b_n sont premiers entre eux.

Exercice 2 : (11 points)

Le plan est muni du repère orthonormé $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

À tout point M d'affixe z , on fait correspondre le point M' d'affixe z' telle que $z' = z^2 - 4z$.

1) Calculer les coordonnées $(x'; y')$ du point M' en fonction des coordonnées $(x; y)$ du point M .

2)a) Démontrer que l'ensemble (H) des points M du plan tels que z soit un nombre imaginaire pur est une hyperbole.

b) Préciser dans le repère $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, les coordonnées du centre O , celles des sommets et les équations des asymptotes de (H) .

3) Soit P le point d'affixe $-\frac{5}{2} - 2i$.

Déterminer les points M du plan tels que le quadrilatère $OMM'P$ soit parallélogramme.

PROBLÈMES : (11 points)

Étude préliminaire :

On considère la fonction g définie sur $[0; +\infty[$ par: $g(x) = \ln(1 + x) - x$.

1) Étudier le sens de variation de g .

2) En déduire que pour tout réel a positif ou nul, $\ln(1 + a) \leq a$.

PARTIE A :

On considère la fonction f_1 , définie sur $[0; +\infty[$ par : $f_1(x) = \ln(e^x + x) - x$

1) Calculer $f_1'(x)$ pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0; +\infty[$ et en déduire le sens de variation de la fonction f_1 .

2) Montrer que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0; +\infty[$. En déduire la limite de f_1 en $+\infty$.

3) Dresser le tableau de variation de f_1 .

PARTIE B :

On considère la fonction f_k définie sur $[0; +\infty[$ par $f_k(x) = \ln(e^x + kx) - x$.

Soit (C_k) la courbe représentative de la fonction f_k dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unités graphiques: 5cm sur l'axe des abscisses et 10cm sur l'axe des ordonnées).

1) Calculer $f_k'(x)$ pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0; +\infty[$ et en déduire le sens de variation de la fonction f_k .

2) Montrer que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0; +\infty[$, $f_k'(x) = \ln\left(1 + k \frac{x}{e^x}\right)$

En déduire la limite de f_k en $+\infty$.

3)a) Dresser le tableau de variation de f_k .

b) Montrer que pour tout réel x de $[0; +\infty[$, on a $f_k(x) \leq \frac{k}{e}$

4) Déterminer l'équation de la tangente (T_k) à (C_k) au point O .

5) Soit p et m deux réels strictement positifs tels que $p < m$. Étudier la position relative de (C_p) et (C_m) .

6) Tracer les courbes (C_1) et (C_2) ainsi que leurs tangentes respectives (T_1) et (T_2) en O

PARTIE C :

Soit λ un réel strictement positif, on note $A(\lambda)$ l'aire, en unités d'aire, du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe (C_k) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \lambda$.

1) Sans calculer $A(\lambda)$, montrer que : $A(\lambda) \leq k \int_0^\lambda x e^{-x} dx$.

(on pourra utiliser le résultat de la question préliminaire).

a) Calculer à l'aide d'une intégration par parties l'intégrale $\int_0^\lambda x e^{-x} dx$.

On admet que $A(\lambda)$ admet une limite en $+\infty$. Montrer que $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A(\lambda) \leq k$.

Interpréter graphiquement ce résultat.

SUJET N°3 :

EXERCICE 1 :

Le tableau ci-dessous donne la répartition d'une population en trois catégories, selon l'indice de masse corporelle (IMC) exprimé en kg/m^2 .

Catégorie	(IMC < 25) Personnes de poids normal	($25 \leq \text{IMC} < 30$) Personnes en surpoids	(IMC ≥ 30) Personnes obèses
Pourcentage	50%	30%	20%

Une étude a montré que :

- 3% des personnes de poids normal sont diabétiques ;
- 7% des personnes en surpoids sont diabétiques ;
- 9% des personnes obèses sont diabétiques.

On choisit au hasard une personne de cette population et on considère les événements suivants :

A : « La personne choisie est de poids normal » ;

B : « La personne choisie est en surpoids » ;

C : « La personne choisie est obèse » ;

D : « La personne choisie est diabétique ».

1)a) Déterminer $P(A \cap B)$, $P(B \cap D)$ et $P(C \cap D)$.

b) Montrer que $P(D) = 0,054$.

c) Calculer la probabilité que la personne choisie ne soit pas de poids normal

sachant qu'elle est diabétique. (On donnera le résultat arrondi à 10^{-3}).

2) On choisit, au hasard, n personnes de cette population. On désigne par P_n la probabilité qu'aucune personne n'est diabétique.

a) Exprimer P_n en fonction de n puis calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n$

b) Déterminer le plus petit entier n pour lequel $P_n \leq 0,1$.

EXERCICE 2 :

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Dans la figure ci-dessous, on a placé les points A et B d'affixes respectives

$$z_A = 2e^{i\frac{\pi}{6}} \text{ et } z_B = \frac{1}{2}z_A^2, \text{ ainsi que le milieu I du segment [AB].}$$

1)a) Déterminer la forme algébrique de chacun des nombres complexes z_A et z_B .

b) Vérifier que l'affixe du point I est $z_I = \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)(1+i)$.

2) On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2 + 2z - 2(1 + \sqrt{3})(1+i) = 0$.

Soit M et N deux points d'affixes respectives z et $\frac{1}{2}z^2$ où z est un nombre complexe non nul et différent de 2.

a) Montrer que le point I est le milieu de [MN] si et seulement si, z est une solution de (E).

b) Justifier que z_A est une solution de (E).

3) Soit z_C la deuxième solution (E), C le point d'affixe z_C et K le point d'affixe (-2) .

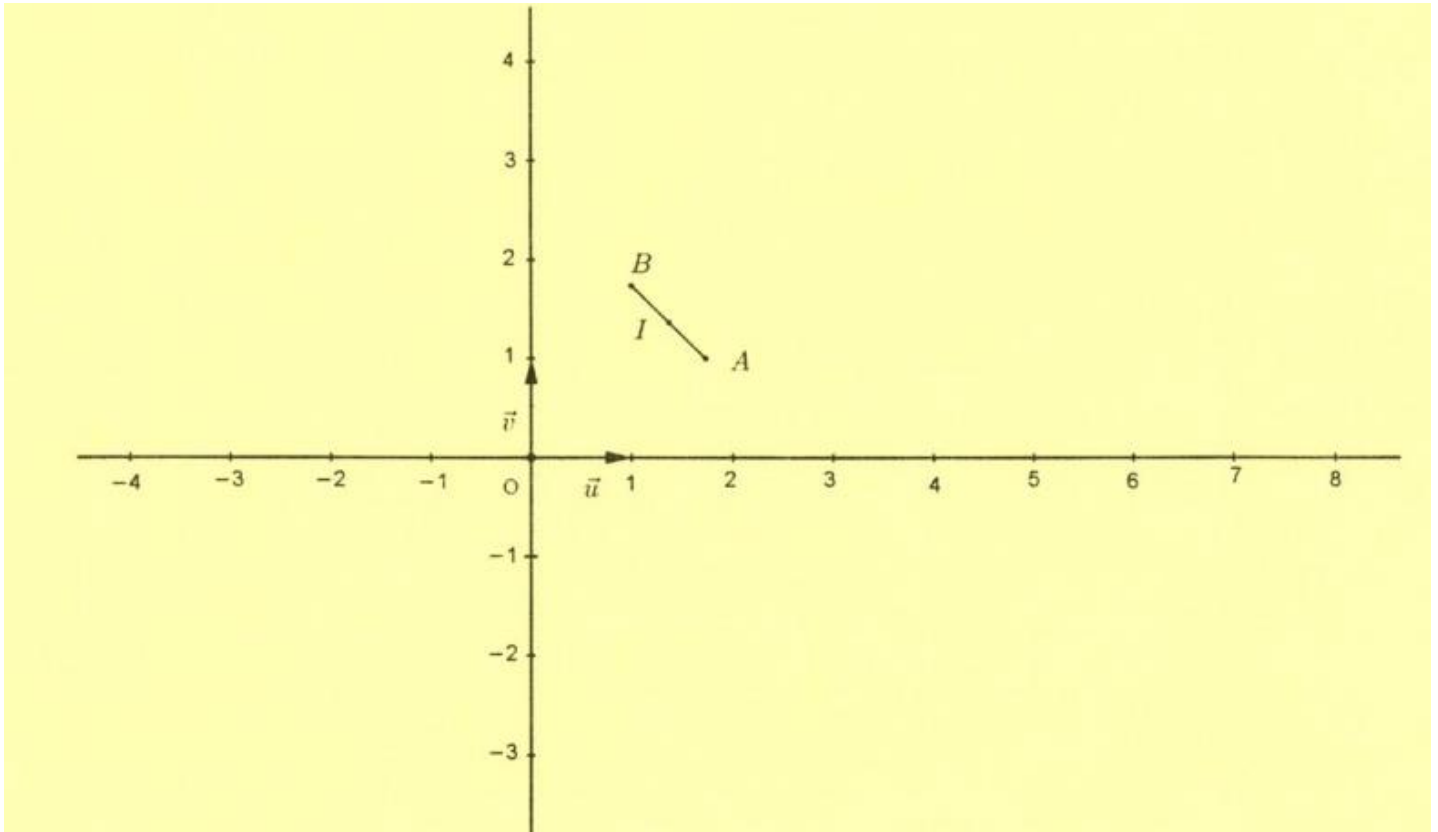
a) Donner la valeur de $z_A + z_C$.

b) Montrer que le quadrilatère OAKC est un parallélogramme. Construire alors le point C.

c) Soit le point D d'affixe $z_D = \frac{1}{2}z_C^2$. Construire sur la figure le point D.

4)a) Ecrire $(1+i)$ sous forme exponentielle. En déduire que $z_A \cdot z_C = 2(\sqrt{2} + \sqrt{6})e^{i\frac{5\pi}{4}}$.

b) Montrer que les points O, A et D sont alignés.



PROBLEME :

Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par : $f(x) = (x + 1)e^{-x}$

1)a) Montrer que, pour tout $x \in [0; +\infty[$, on a : $f(x) = \frac{x}{e^x} + \frac{1}{e^x}$.

b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

2)a) Montrer que, pour tout $x \in [0; +\infty[$, on a : $f'(x) = -xe^{-x}$

b) Dresser le tableau de variation de f .

c) Montrer que l'équation : $f(x) = \frac{1}{2}$ admet une unique solution $\alpha \in [0; +\infty[$.

(On prendra $\alpha = 1,7$).

3) On note g la fonction définie sur $[0; +\infty[$, par : $g(x) = -(x + 2)e^{-x}$.

a) Montrer que g est une primitive de f sur $[0; +\infty[$.

b) Montrer que la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[1,4]$ est $\bar{f} = \frac{e^3 - 2}{e^4}$.

4) Une entreprise produit chaque jour x milliers de pièces avec $x \in [1,4]$.

Le prix de revient d'une pièce en dinars est égal à $f(x)$.

a) Calculer le prix de revient moyen à 10^{-3} près d'une pièce pour une production entre 1000 et 4000 pièces.

b) A partir de quelle quantité de pièces produites, le prix de revient d'une pièce est inférieur à 0,5 dinars ?

SUJET N°4 :

EXERCICE 1 :

On considère deux urnes U_1 et U_2 contenant des boules indiscernables au toucher.

- L'urne U_1 contient trois boules blanches et deux boules noires ;
- L'urne U_2 contient une boule blanche et deux boules noires.

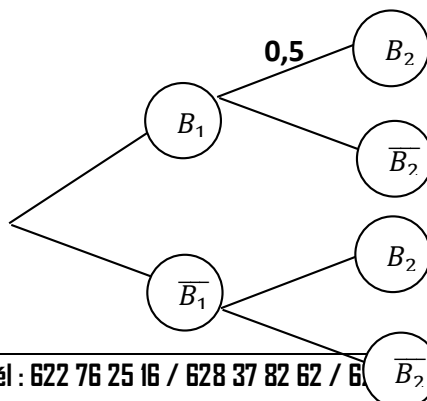
Une épreuve consiste à tirer au hasard une boule de U_1 et la mettre dans U_2 puis tirer au hasard une boule de U_2 et la mettre dans U_1 .

Soient les événements :

B_1 : « La boule tirée de U_1 est blanche » et B_2 : « La boule tirée de U_2 est blanche ».

1)a) Vérifier que $P(B_2/B_1) = 0,5$.

b) Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous associé à cette épreuve.



c) Montrer que $P(B_2) = 0,4$.

d) Sachant que la boule tirée de l'urne U_2 est blanche, qu'elle est la probabilité que la boule tirée de U_1 soit blanche ?

2) Soit l'évènement E : « La boule tirée de U_1 est blanche et la boule tirée de U_2 est blanche ».

Vérifier que $P(E) = 0,3$.

3) Calculer la probabilité de l'évènement F : « A la fin de l'épreuve, la répartition des boules dans les deux urnes reste inchangée ».

4) On désigne par X la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de boules noires restant dans l'urne U_2 à la fin de l'épreuve.

a) Déterminer la loi de probabilité de X .

b) Calculer l'espérance mathématique de X .

EXERCICE 2 :

On considère la suite réelle (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :
$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{3u_n+2}{u_n+4}, \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

1)a) Vérifier que pour tout entier naturel n on a : $u_{n+1} - 1 = \frac{2(u_n-1)}{u_n+4}$.

b) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n on a : $0 \leq u_n \leq 1$.

c) Vérifier que : $u_{n+1} - u_n = \frac{(u_n+2)(1-u_n)}{u_n+4}$ et en déduire que la suite (u_n) est croissante.

d) Justifier que la suite (u_n) est convergente.

2) Soit (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_n = \frac{u_n-1}{u_n+2}$, pour tout entier naturel n .

a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{5}$.

b) Exprimer v_n en fonction de n et prouver que pour tout entier naturel n , on a :

$$u_n = \frac{2-2\left(\frac{2}{5}\right)^n}{2+\left(\frac{2}{5}\right)^n}$$

c) Calculer alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

PROBLEME :

1) Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = x^2 + e^{-x}$.

a) Calculer $g'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

On a dressé ci-dessous le tableau de variation de g' la fonction dérivée de g .

x	$-\infty$	$+\infty$
$g'(x)$	$-\infty$	$+\infty$

b) Montrer que l'équation $g'(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une solution unique β et vérifier que : $0,3 < \beta < 0,4$.

c) Déterminer le signe de $g'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Caravane de Réussite aux Examens Nationaux (CAREN)

Dans la suite, on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \sqrt{g(x)}$.

On désigne par (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

2) Justifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x)$ et $f'(x)$ ont le même signe.

3)a) Déterminer : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

b) Montrer que : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$. Interpréter graphiquement le résultat.

c) Vérifier que pour tout réel $x > 0$, $f(x) - x = \frac{e^{-x}}{f(x)+x}$.

d) Montrer que la droite $(\Delta) : y = x$ est une asymptote à (C_f) au voisinage de $+\infty$.

e) Montrer que (C_f) est au-dessus de la droite (Δ) .

4)a) Dresser le tableau de variation de f .

b) Tracer la courbe (C_f) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. (On prendra $\beta \approx 0,35$).

5) Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On désigne par a_n l'aire en (u.a) de la partie du plan limitée par la courbe (C_f) , la droite (Δ) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = n$.

a) Montrer que la suite $(a_n)_{n \geq 2}$ est croissante.

b) Soit $n \geq 2$, montrer que pour tout $x \in [1, n]$, $\frac{e^{-x}}{f(n)+n} \leq f(x) - x \leq \frac{e^{-x}}{f(1)+1}$.

c) En déduire que pour tout $n \geq 2$, $\frac{e^{-1}-e^{-n}}{f(n)+n} \leq a_n \leq \frac{e^{-1}-e^{-n}}{f(1)+1}$.

d) Montrer que la suite $(a_n)_{n \geq 2}$ est convergente.

6)a) Déterminer une valeur approchée à 10^{-4} de chacun des nombres $\frac{e^{-1}-e^{-2}}{f(2)+2}$ et $\frac{e^{-1}}{f(1)+1}$.

b) On note : $L = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$. Montrer que $0,05 < L < 0,17$.

SUJET N°5 :

Exercice 1

On considère la suite (u_n) d'entiers naturels définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 14 \\ u_{n+1} = 5u_n - 6 \text{ pour tout entier naturel } n \end{cases}$$

1) Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4 .

Quelle conjecture peut-on émettre concernant les deux derniers chiffres de u_n ?

2) Montrer que, pour tout entier naturel n , $u_{n+2} \equiv u_n[4]$.

En déduire que pour tout entier naturel k , $u_{2k} \equiv 2[4]$ et $u_{2k+1} \equiv 0[4]$.

3) a- Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $2u_n = 5^{n+2} + 3$.

b- En déduire que, pour tout entier naturel n , $2u_n \equiv 28[100]$.

- 4) Déterminer les deux derniers chiffres de l'écriture décimale de u_n suivant les valeurs de n
- 5) Montrer que le $PGCD$ de deux termes consécutifs de la suite (u_n) est constant. Préciser sa valeur.

Exercice 2

ABA' est un triangle équilatéral de sens direct et B' le point tel que : $\overrightarrow{A'B'} = 2\overrightarrow{AA'}$.

Soit S la similitude directe qui transforme A en A' et B en B' .

- 1) Déterminer le rapport et l'angle de S .
- 2) Soit Ω le centre de S . Exprimer ΩA et $\Omega A'$ en fonction de AA' .
- 3) Démontrer que le triangle $\Omega AA'$ est rectangle en A , puis placer Ω .
- 4) Soit A'' l'image de A' par S .

Démontrer que $\widehat{A'B'; A'A''} = \frac{\pi}{3}$ et que le triangle $A'B'A''$ est équilatéral, puis placer A'' .

Exercice 3

Soit $ABCD$ un parallélogramme.

P est le point tel que : $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$; Q est le symétrique de du milieu de $[AD]$ par rapport à A .

Démontrer que les points P , Q et C sont alignés.

Problème :

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \sqrt{|x^2 - 6x + 5|}$ et (C) sa courbe représentative.

- 1) Exprimer $f(x)$ sans le symbole « valeur absolue ».
- 2) Etudier la continuité et la dérivabilité de f sur son D_f ; (C) admet-elle des tangentes aux points d'abscisses 1 et 5 ?
- 3) Etudier les variations de f .
- 4) Démontrer que les droites d'équations $y = x - 3$ et $y = -x + 3$ sont asymptotes à (C) respectivement en $+\infty$ et en $-\infty$.
- 5) Tracer (C) et démontrer qu'elle admet un axe de symétrie dont on précisera l'équation.

6) Démontrer que, pour tout nombre réel x de l'intervalle $[1; 5]$, le point $M \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}$ est à une distance constante du point $\Omega \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

En déduire la nature de (C) sur l'intervalle $[1; 5]$.



SUJET N°6 :

Exercice1 :

I- Déterminer l'ensemble des couples (a, b) d'entiers naturel non nuls tels que :

$$PGCD(a, b) + PPCM(a, b) = b + 9$$

II- Résoudre l'équation : $(1 + \cos 2\alpha)y'' - 2y' \sin 2\alpha + 2y = 0$ avec $\alpha \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

Exercice2 :

Un sondage est effectué sur une population de terminales après les résultats du bac.

90% ont révisé sérieusement dont 80% ont eu le bac.

30% de ceux qui n'ont pas révisé sérieusement ont eu le bac.

On choisit un élève au hasard et on note B « l'élève a eu le bac » et R « l'élève a révisé sérieusement »

Caravane de Réussite aux Examens Nationaux (CAREN)

- traduire les données ci-dessus en termes de probabilités avec les notations mathématiques
- on organise les données dans l'arbre pondéré
 - compléter l'arbre des données numériques qui manquent.
 - calculer $p(R \cap B)$ et $p(\bar{R} \cap B)$
 - en déduire $p(B)$ et $p(\bar{B})$
 - en déduire $P_{\bar{B}}(R)$ et $P_{\bar{B}}(\bar{R})$
 - pour cette population, est-il plus probable d'avoir le bac avec ou sans révision ?
 - interpréter les résultats de la question d). (est-ce paradoxal ou non ?)

Exercice3 :

- 1.a** Soit (r_n) la suite géométrique réelle de premier terme r_0 strictement positif et de raison $\frac{2}{3}$. Exprimer r_n en fonction de r_0 et de n .
- b. $(\theta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la suite arithmétique réelle de premier terme θ_0 appartenant à l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ et de raison $\frac{2\pi}{3}$. Exprimer θ_n en fonction de θ_0 et de n .
- c. Pour tout entier naturel n , on pose : $z_n = r_n(\cos\theta_n + i\sin\theta_n)$.
Sachant que z_0, z_1 et z_2 sont liés par la relation $z_0 z_1 z_2 = 8$, déterminer le module et un argument de z_0, z_1 et z_2 .
- 2.** Dans le plan complexe (**P**) muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique : 4cm), on appelle M_n le point d'affixe z_n .
- a. Placer les points M_0, M_1, M_2 et M_3 dans le plan (**P**).
- b. Pour tout entier naturel n , calculer $\|\overrightarrow{M_n M_{n+1}}\|$ en fonction de n .
- c. On pose : $d_n = \|\overrightarrow{M_0 M_1}\| + \|\overrightarrow{M_1 M_2}\| + \dots + \|\overrightarrow{M_n M_{n+1}}\|$.
Calculer d_n en fonction de n et déterminer la limite de la suite (d_n) quand n tend vers $+\infty$.

Problème :

Partie A : Soit la fonction g définie sur $] -\infty; 2[$ par : $g(x) = x^2 - 4x + 3 + \ln(2 - x)$

- Calculer $g(1)$.
- On admet que g est dérivable sur $] -\infty; 2[$ et on note g' sa dérivée.
 - Calculer $g'(x)$ puis étudier son signe.
 - Dresser le tableau de variation de g .
- En déduire que :
$$\begin{cases} \forall x \in] -\infty; 1[; g(x) > 0 \\ \forall x \in]1; 2[; g(x) < 0 \end{cases}$$

Partie B : On considère la fonction f définie sur $] -\infty; 2[$ par : $f(x) = x + \frac{\ln(2-x)}{2-x}$.

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le plan muni du repère orthonormé

(O, I, J) . Unité 2 cm.

- Calculer la limite de f à gauche en 2. Interprétez le résultat.
- Justifier que la limite de f en $-\infty$ est égale à $-\infty$.
- Démontrer que la droite (D) d'équation $y = x$ est une asymptote à (C) .

4. Étudier la position de (C) et (D).
5. On admet que f est dérivable sur $] -\infty; 2[$ et on note f' sa dérivée.
 - a. Justifier que sur $] -\infty; 2[$ $f'(x)$ et $g(x)$ ont même signe.
 - b. Dresser le tableau de variation de f .
6. On désigne par h la restriction de f à l'intervalle $] -\infty; 2[$.
 - a. Montrer que h est une bijection de $] -\infty; 1[$ sur un intervalle K que l'on précisera.
 - b. Montrer que l'équation (E) : $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions α_1 et α_2 telles que :
 $-0,37 < \alpha_1 < -0,36$ et $1,51 < \alpha_2 < 1,52$
- c. Vérifier que si un nombre réel α est une solution de l'équation (E), alors on a :
 $\ln(2 - \alpha) = \alpha^2 - 2\alpha$
- d. On désigne par (C') la représentation graphique de h^{-1} dans le repère.
Construire (C) et (C').

Partie C : 1. En remarquant que : $\forall x \in] -\infty; 2[; \frac{\ln(2-x)}{2-x} = -\left(\frac{-1}{2-x}\right) \times \ln(2-x)$,
trouver une primitive de la fonction : $x \mapsto \frac{\ln(2-x)}{2-x}$ sur $] -\infty; 2[$.
2. En déduire l'aire de la partie du plan délimitée par (C), (D) et les droites
d'équations $x = 1$ et $x = \frac{3}{2}$. (On donne : $f(-0,37) = -0,006$; $f(-0,36) = 0,004$;
 $f(1,51) = 0,054$; $f(1,52) = -0,009$)

SUJET N°7 :

Exercice1 : (4 points)

1. Trouver l'ensemble des entiers naturels diviseurs du nombre **5929**.
2. Trouver tous les couples (a, b) d'entiers naturels dont le **pgcd** et le **ppcm** sont solutions de l'équation : $x^2 - 91x + 588 = 0$
3. Démontrer que : $A_n = 3^{3n+2} + 2^{n+4}$ est divisible par 5.

Exercice2 : (8 points)

Partie A :

Soit z et u deux nombres complexes tels que $z = \sqrt{3} + i$ et $u = \sqrt{2}(1 + i)$
On pose $Z = u \cdot z^2$

- 1.a. Déterminer le module et l'argument principale de z et u .
- b. En déduire le module et l'argument principale de Z .
- 2.a. Ecrire Z sous forme algébrique et sous forme trigonométrique.
- b. En déduire les valeurs exactes de $\cos \frac{7\pi}{12}$ et $\sin \frac{7\pi}{12}$
- c. Calculer Z^{12}

Partie B :

Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J) . L'unité est le centimètre.

A, B et C ont les points du plan d'affixes respectives : $Z_A = 3i$; $Z_B = 4 + i$; $Z_C = 2 - 3i$

1. Placer les points A, B et C dans le repère (O, I, J) .
2. Calculer Z_D l'affixe du point D pour que ABCD soit un parallélogramme.
3. On pose $Z = \frac{z-3i}{z-4-i}$ avec $z \neq 4 + i$

Déterminer et construire l'ensemble des points M d'affixes z tels que :

- a. $|Z| = 1$
- b. Z soit imaginaire pur.

Partie C :

1. Déterminer l'écriture complexe de la similitude **S** de centre B transformant le point A en C.
2. Trouver le rapport de **S** et quelle est la nature réelle de cette similitude ?

Exercice3 : (4 points)

Soit ABC est un triangle. Construire le barycentre G des points pondérés (A,1), (B,-1) et (C,1).

Soit (Γ) l'ensemble des points M du plan tels que : $\|\vec{MA} - \vec{MB} + \vec{MC}\| = \|\vec{MA} - 2\vec{MB} + \vec{MC}\|$

- a) Vérifier que B appartient à (Γ) .
- b) Déterminer et construire (Γ) .

SUJET N°8 :

Exercice1 : (4 points)

A- 1. Trouver suivant les valeurs de l'entier naturel n , le reste de la division euclidienne de 4^n par 7.

2. Justifier que : $1999 \equiv 4[7]$.

3. En déduire le reste de la division euclidienne par 7 de 1999^{132} .

4. Soit l'entier A_k tel que : $A_k = 123^k + 123^{2k} + 123^{3k} + 123^{4k} + 123^{5k}$.

Discuter suivant les valeurs de l'entier naturel k , le reste de la division euclidienne de A_k par 7.

B- a. Déterminer l'ensemble des entiers relatifs x tels que : $8x \equiv 7[5]$

b. Résoudre l'équation : $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $336x + 210y = 294$

Exercice 2 : (5 points)

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère le point A d'affixe 2 et le cercle $(\mathcal{C})$ de centre O passant par A.

Dans tout l'exercice on note α le nombre complexe $\alpha = 1 + i\sqrt{3}$ et $\bar{\alpha}$ le nombre complexe conjugué du nombre complexe α .

1. a. Démontrer que $\alpha^2 - 4\alpha = 2\bar{\alpha} - 8$.

b. Démontrer que les points B et C d'affixes respectives α et $\bar{\alpha}$ appartiennent au cercle $(\mathcal{C})$.

2. Soit D un point du cercle $(\mathcal{C})$ d'affixe $2e^{i\theta}$ où θ est un nombre réel de l'intervalle $]-\pi ; \pi]$.

a. Construire sur la figure le point E image du point D par la rotation r de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

b. Justifier que le point E a pour affixe $z_E = \alpha e^{i\theta}$

3. Soient F et G les milieux respectifs des segments [BD] et [CE].

a. Justifier que le point F a pour affixe $z_F = \frac{\alpha}{2} + e^{i\theta}$

b. On admet que le point G a pour affixe $z_G = \frac{\alpha e^{i\theta} + \bar{\alpha}}{2}$.

Démontrer que $\frac{z_G - 2}{z_F - 2} = \frac{\alpha}{2}$. (On pourra utiliser la question 1.a.)

En déduire que le triangle AFG est équilatéral.

Exercice3 : (2 points)

1. Soit les points $A(1 + i)$; $B(1 - i)$.

Déterminer le centre Ω de la similitude d'angle $-\frac{\pi}{2}$ qui transforme A en B.

2. Soit S_α l'application du plan dans lui-même qui à $M(z)$ associe $M'(z')$ tel que $z' = i\alpha z + \alpha^2$, $\alpha \in \mathbb{C}$.

Déterminer α pour que S_α soit une rotation d'angle $\frac{5\pi}{6}$.

Exercice4 : (3 points)

Soit ABC est un triangle équilatéral tel que : $AB = a$ ($a > 0$).

1. Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tels que :

$$2MA^2 - MB^2 - MC^2 = a^2$$

2.a Construire le barycentre G des points pondérés (A,-1), (B,4) et (C,1).

b. Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tels que :

$$-MA^2 + 4MB^2 + MC^2 = \frac{a^2}{2}$$

Exercice5 : (4 points)

Soit la fonction $f: x \mapsto \sqrt{\frac{x^3}{x-1}}$ et (C) sa courbe représentative.

1. Etudier la continuité et la dérivabilité de f sur son ensemble de définition
En déduire que (C) admet une demi-tangente parallèle à (OI) au point d'abscisse 0.
2. Etudier les variations de f.
Démontrer que (C) admet trois asymptotes
3. Tracer (C)



Exercices Proposés

Exercice1 :

1. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel **n** non nul on a :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} = 1 - \frac{1}{2^n}$$

2. Démontrer que : $A_n = 3^{4n+2} + 2 \times 4^{3n+1}$ est divisible par 17.

Exercice2 :

1. Déterminer, suivant les valeurs de l'entier n le reste de la division euclidienne par 7 de 3^n
2. En déduire le reste de la division euclidienne par 7 du nombre $(506390)^{128}$.
3. Un nombre s'écrit $\overline{651x}$ dans le système décimal. Déterminer x pour que le nombre : $(506390)^{128} + \overline{651x}$ soit divisible par 7.

Exercice3 :

- 1) Dans un système de numération de base inconnue deux nombres s'écrivent **302** et **402**. Dans le système de base **9**, le produit de ces deux nombres s'écrit **75583**. Quelle est cette base ?
- 2) Effectuer dans ce système les deux opérations suivantes :
 a) **6654 – 7654** b) **45654 × 516**

Exercice4 :

Soit ABC un triangle rectangle en A tel que $AB = 2a$ et $AC = a$, où a est un nombre réel strictement positif donné.

- 1.a Déterminer et construire le barycentre G des points pondérés (A,1), (B,-1) et (C,1)
- b. Déterminer et construire l'ensemble (C) des points M du plan tels que :

$$\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}\|$$

2. Soit H le point du plan défini par : $\overrightarrow{AH} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$
- a. Démontrer que le point H est le barycentre des points pondérés (A,3), (B,1) et (C,-2)
- b. Pour tout réel k, on désigne par (E_k) l'ensemble des points M du plan tels que :
 $3MA^2 + MB^2 - 2MC^2 = ka^2$
 Pour quelle valeur de k, (E_k) contient-il le point C ?
- c. Déterminer et construire l'ensemble (Γ) des points M du plan tels que :
 $3MA^2 + MB^2 - 2MC^2 = 8a^2$

Exercice5 :

Démontrer par récurrence que :
 Pour tout nombre entier naturel supérieur ou égal à 1,

$$\sum_{k=1}^n (2k-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$$

Exercice6 :

Dans la division de a par b, q est le quotient et r le reste.

Caravane de Réussite aux Examens Nationaux (CAREN)

1. Déterminer b et q sachant que : $a=557$ et $r=89$
2. Déterminer b et r sachant que : $a=1517$ et $q=75$

Exercice7 :

Déterminer l'ensemble **A** tel que : $A=\{x \in \mathbb{N} / x = \frac{5n-7}{n-3}, n \in \mathbb{N}\}$

Exercice8 :

Un nombre A s'écrit 55 en base x et 37 en base y .

1. Déterminer x et y sachant qu'il existe un entier B qui s'écrit 121 en base x et 59 en base y
2. Ecrire A et B dans le système décimal.

Exercice9 :

1. Déterminer, suivant les valeurs de l'entier n le reste de la division euclidienne par 7 de 3^n
2. En déduire le reste de la division euclidienne par 7 du nombre $(506390)^{128}$.
3. Un nombre s'écrit $\overline{651x}$ dans le système décimal. Déterminer x pour que le nombre : $(506390)^{128} + \overline{651x}$ soit divisible par 7.

