

## Probleme

Partie I:  $g(x) = \frac{1}{1+x} - \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$  et  $D_g = ]0, +\infty[$

1) Calculons: <sup>1pt</sup>

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[ \frac{1}{1+x} - \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \right] = \frac{1}{1+0} - \ln\left(1 + \frac{1}{0^+}\right)$$
$$= 1 - \infty = -\infty$$

donc  $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = -\infty$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{1}{1+x} - \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \right] = \frac{1}{1+\infty} - \ln\left(1 + \frac{1}{+\infty}\right)$$
$$= 0 - 0 = 0$$

donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$

2) Calculons  $g'(x)$ , puis dressons le tableau de variation de  $g$ . <sup>1,5pt</sup>

$$\forall x \in D_g, g'(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} - \frac{\frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x}}$$

$$= -\frac{1}{(1+x)^2} + \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{x+1}{x}}$$

$$= -\frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{x^2} \times \frac{x}{x+1}$$

$$= -\frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{x(x+1)}$$

$$= \frac{-x(x+1) + (1+x)^2}{x(x+1)^2} = \frac{-x^2 - x + 1 + x^2 + 2x + 1}{x(x+1)^2}$$

$$g'(x) = \frac{1}{x(x+1)^2}$$

donc  $\forall x \in D_g, g'(x) = \frac{1}{x(x+1)^2} > 0$  donc  $g$  est strictement croissante sur  $]0, +\infty[$ .

Tableau de Variation de  $g$ .

|         |           |           |
|---------|-----------|-----------|
| $x$     | 0         | $+\infty$ |
| $g'(x)$ |           | +         |
| $g(x)$  | $-\infty$ | 0         |

(A diagonal arrow points from  $-\infty$  to 0, and a red circle with a minus sign is in the middle of the  $g(x)$  row.)

3) En déduisons que  $\forall x \in ]0, +\infty[$ ,  $\frac{1}{1+x} < \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$   
 D'après le tableau de variation de  $g$  on a: 0,25 pt  
 $\forall x \in ]0, +\infty[$ ,  $g(x) < 0$ .

$$g(x) < 0 \Rightarrow \frac{1}{1+x} - \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) < 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+x} < \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

D'où  $\forall x \in ]0, +\infty[$ ,  $\frac{1}{1+x} < \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$

4) Montrons que  $\forall x \in ]0, +\infty[$ ,  $\frac{1}{2+x} < \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x}$

4) Montrons que  $\forall x \in ]0, +\infty[ \quad \frac{1}{1+x} < \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x}$   
 D'après 3) on a  $\forall x \in ]0, +\infty[ \quad \frac{1}{1+x} < \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$  (1)  
 Pour tout  $t > 0$  on a:

$\ln(1+t) < t$  en posant  $t = \frac{1}{x}$  on a:

$\forall x \in ]0, +\infty[ \quad \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x}$  (2) donc de (1) et (2)

on a:  $\forall x \in ]0, +\infty[ \quad \frac{1}{1+x} < \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x}$  (0,25 pt)

Partie II:

On a:  $\forall x \in ]0, +\infty[ : \begin{cases} f(x) = x^3 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \text{ si } x \in ]0, +\infty[ \\ f(0) = 0 \end{cases}$

2) Montrons que  $f$  est continue et dérivable à droite en 0 et interprétons le résultat graphiquement.

- Continuité: 0,5 pt

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^3 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t^3} \ln(1+t) = 0$$

(Par croissance comparée)  $\swarrow$

donc  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) = 0$ , d'où  $f$  est continue à droite en 0.

- Dérivabilité: 0,5 pt

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^3 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

donc  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$ , donc (Ef) admet une tangente au point d'abscisse 0 et par conséquent  $f$  est dérivable à droite en 0.

2) Montrons que (Ef) admet une branche parabolique dont on précisera la direction. 0,5 pt

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = +\infty \text{ "P.A.O"}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = +\infty$$

donc  $(\mathcal{C}_f)$  admet une branche parabolique de direction celle de l'axe des ordonnées.

3) a) Justifions que la fonction  $f$  est dérivable sur  $]0, +\infty[$ . ~~0,25 pt~~ 1, ~~0,25~~ pts

D'après 1)  $f$  est dérivable à droite en 0, donc  $f$  est dérivable sur  $]0, +\infty[$ .

$$\begin{aligned} \forall x \in ]0, +\infty[, f'(x) &= 3x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) + \frac{-\frac{1}{x^2} \times x^3}{1 + \frac{1}{x}} \\ &= 3x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{x}{x+1} \\ &= 3x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{x^2}{1+x} \\ &= 3x^2 \left[ \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{3(1+x)} \right] \end{aligned}$$

D'où  $\forall x \in ]0, +\infty[$   $f'(x) = 3x^2 \left[ \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{3(1+x)} \right]$

b) En déduisons  $f$  est strictement croissante sur  $I$ .

D'après partie I - 3) on a:  $\frac{1}{1+x} < \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$

$$\Rightarrow 0 < \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{1+x}$$

$$\Rightarrow \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{3(1+x)} > 0 \text{ et on a } 3x^2 > 0$$

$$\text{donc } 3x^2 \left( \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{3(1+x)} \right) > 0 \quad \forall x \in ]0, +\infty[$$

$\Rightarrow f'(x) > 0$ , donc  $f$  est strictement croissante sur  $I = ]0, +\infty[$ . 0,25 pt

c) Dressons le tableau de variation de  $f$ .

|         |   |           |
|---------|---|-----------|
| $x$     | 0 | $+\infty$ |
| $f'(x)$ |   | +         |
| $f(x)$  | 0 | $+\infty$ |

0,25 pt

Partie III :

$$\forall x \in ]0, +\infty[ \quad h(x) = \frac{f(x)}{x}$$

1) Montrons que  $\forall x \in ]0, +\infty[$ ,  $h'(x) = 2x \left( \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{2(1+x)} \right)$

$$\forall x \in ]0, +\infty[ \quad h(x) = \frac{f(x)}{x} = x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

$$\forall x \in ]0, +\infty[ \quad h'(x) = 2x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) + \frac{-\frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x}} \times x^2$$

$$= 2x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{\frac{1+x}{x}}$$

$$= 2x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{x}{1+x}$$

$$= 2x \left( \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{2(1+x)} \right)$$

D'où  $\forall x \in ]0, +\infty[$ ,  $h'(x) = 2x \left( \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{2(1+x)} \right)$ .

2) En déduisons que  $h$  est strictement croissante sur  $]0, +\infty[$ .  
D'après partie II - 3) - b) on a :

$$\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{2(1+x)} > 0 \quad \text{et} \quad \forall x \in ]0, +\infty[ \quad 2x > 0$$

0,25 pt

donc  $2x \left( \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{2(1+x)} \right) > 0 \Rightarrow h'(x) > 0$  donc  
 $h$  est strictement croissante sur  $]0, +\infty[$ .

3) Montrons que l'équation  $h(x) = 2$ , admet sur  $]0, +\infty[$  une unique solution  $\alpha$ , puis vérifions que  $\alpha \in ]1, 2[$ .  
 Dressons le tableau de variations de  $h$ :

| $x$     | 0 | $\alpha$ | $+\infty$ |
|---------|---|----------|-----------|
| $h'(x)$ |   | +        |           |
| $h(x)$  | 0 | 1        | $+\infty$ |

$\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = 0$   
 et  
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$

0,5 pt

$h$  est définie, continue et strictement croissante sur  $]0, +\infty[$ , donc elle réalise une bijection de  $]0, +\infty[$  vers  $]0, +\infty[$ , or  $1 \in ]0, +\infty[$  donc il existe une unique solution  $\alpha \in ]0, +\infty[$  telle que  $h(\alpha) = 1$ .

•  $h(1) = \ln(2) = 0,7 > 0$

•  $h(2) = 4 \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) = 4 \ln\left(\frac{3}{2}\right) = 4 \ln\left(\frac{3}{2}\right) = 4 \times 1,5 = 6$

•  $h(1) - 1 = 0,7 - 1 = -0,3 < 0$

•  $h(2) - 1 = 6 - 1 = 5 > 0$

Par conséquent  $1 < \alpha < 2 \Rightarrow \alpha \in ]1, 2[$ .

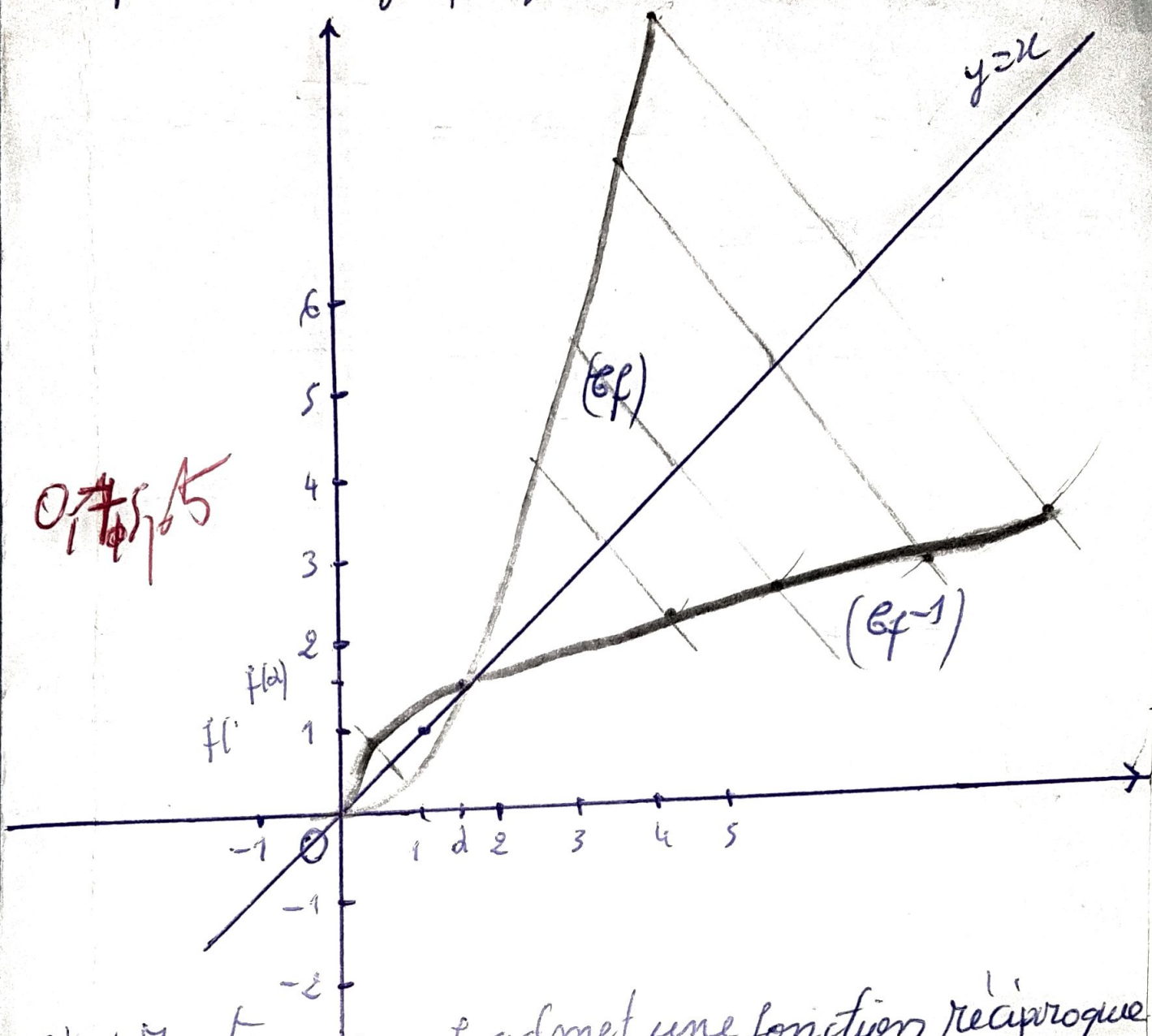
4) En déduisons que l'équation  $f(x) = x$  a pour solutions 0 et  $\alpha$ .

on a:  $h(\alpha) = 1 \Rightarrow \frac{f(\alpha)}{\alpha} = 1 \Rightarrow f(\alpha) = \alpha$

0,25 pt

D'après la partie II on  $f(0) = 0$  donc 0 et  $\alpha$  sont les solutions de l'équation  $f(x) = x$ .

5) Représentons graphiquement  $(\mathcal{E}f)$ .



6) a) Montrons que  $f$  admet une fonction réciproque  $f^{-1}$  définie sur un intervalle  $J$  à déterminer.  
 $f$  étant définie, continue et strictement croissante sur  $]0, +\infty[$ , donc elle admet une fonction réciproque  $f^{-1}$  sur  $f(I) = ]0, +\infty[$  donc  $J = ]0, +\infty[$ .  
 b) Construisons  $(\mathcal{E}f^{-1})$  dans le même repère (Voir figure).

7) a) À l'aide d'une intégration par parties, montrons que

$$\int_a^2 f(x) dx = \frac{\ln 2}{4} - \frac{2^4}{4} \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4} \int_a^2 \frac{x^3}{x+1} dx.$$

$$\int_2^1 f(x) dx = \int_2^1 x^3 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) dx$$

Poseons :  $u = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \Rightarrow u' = \frac{-\frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x}} = -\frac{1}{x(1+x)}$

$$V' = x^3 \Rightarrow V = \frac{1}{4} x^4$$

$$\begin{aligned} \int_2^1 f(x) dx &= \left[ \frac{1}{4} x^4 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \right]_2^1 + \frac{1}{4} \int_2^1 \frac{x^4}{x(1+x)} dx \\ &= \frac{1}{4} \ln 2 - \frac{1}{4} 2^4 \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4} \int_2^1 \frac{x^3}{1+x} dx \\ &= \frac{\ln 2}{4} - \frac{2^4}{4} \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4} \int_2^1 \frac{x^3}{1+x} dx \end{aligned}$$

D'où  $\int_2^1 f(x) dx = \frac{\ln 2}{4} - \frac{2^4}{4} \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4} \int_2^1 \frac{x^3}{1+x} dx$  1 pt

b) Décomposons  $\frac{x^3}{1+x}$  et en déduisons la valeur de l'intégrale.  $\int_2^1 \frac{x^3}{1+x} dx$ . 1 pt

$$\begin{array}{r|l} x^3 & x+1 \\ -x^3 - x^2 & x^2 - x + 1 \\ \hline -x^2 & \\ +x^2 + x & \\ \hline x & \\ -x - 1 & \\ \hline -1 & \end{array}$$

donc  $\frac{x^3}{1+x} = x^2 - x + 1 - \frac{1}{x+1}$

$$\begin{aligned} \int_2^1 \frac{x^3}{1+x} dx &= \int_2^1 \left( x^2 - x + 1 - \frac{1}{1+x} \right) dx \\ &= \left[ \frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{2} x^2 + x - \ln|1+x| \right]_2^1 \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 1 - \ln 2 - \frac{2^3}{3} + \frac{2^2}{2} - 2 + \ln|1+2| \\ &= \frac{5}{6} - \ln 2 - \frac{2^3}{3} + \frac{2^2}{2} - 2 + \ln(1+2) \end{aligned}$$

donc  $\int_d^1 \frac{x^3}{1+x} dx = \frac{5}{6} - \ln 2 - \frac{d^3}{3} + \frac{d^4}{2} - d + \ln(1+d)$

c) Déterminons en  $\text{cm}^2$  et en fonction de  $d$  l'aire

$A(d) = \left( \int_d^1 f(x) dx \right) \times U_a$  avec  $U_a = 1 \text{ cm}^2$ .

$$A(d) = \cancel{\frac{\ln 2}{4}} - \frac{d^4}{4} \ln\left(1 + \frac{1}{d}\right) + \frac{1}{4} \left( \frac{5}{6} - \cancel{\ln 2} - \frac{d^3}{3} + \frac{d^4}{2} - d + \ln(1+d) \right)$$

$$= \frac{5}{24} - \frac{d^4}{4} - \frac{d^3}{12} + \frac{d^4}{6} - \frac{d}{4} + \frac{1}{4} \ln(1+d) \text{ cm}^2$$

0,25 pt

donc  $A(d) = \frac{5}{24} - \frac{d^4}{4} - \frac{d^3}{12} + \frac{d^4}{6} - \frac{d}{4} + \frac{1}{4} \ln(1+d) \text{ cm}^2$ .