

EXAMEN BLANC

Mths -Tle C

Contexte : Dans une ferme de Dounian

Joseph un étudiant en agronomie effectue un stage dans une ferme moderne de Dounian. Pour son rapport, il a noté quelques informations et consulté un plan de construction.

La ferme dispose de deux bloc E et G, l'un pour les volailles et l'autre pour les moutons. A l'intérieur du bloc E se trouvent des sites à visiter. Les positions des sites sont repérés par des points M_k dont les affixes z_k sont les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $(E_\theta):(\sqrt{2}z-1)^3=(-2+2i)e^{i\theta}z^3, \theta \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$.

Joseph a aussi noté que chaque bloc subit des contrôles inopinés.

Pour finir son rapport, Joseph invite son frère Khaled, élève en classe de Tle C, à l'aider à déterminer les positions des sites, à évaluer les probabilités de contrôles des blocs E et G au cours d'un mois, à retrouver un code et à reproduire la configuration plane à l'origine du tracé du sentier reliant les deux blocs.

Tâche : Tu vas jouer le rôle de Khaled en traitant les trois problèmes suivants :

Problème 1

- 1) Détermine les racines cubiques du nombre complexe $(-2+2i)e^{i\theta}$.
- 2) a-Démontre que $\forall x \in]0; 2\pi[\setminus \{\pi\}$, on a :

$$\frac{\sqrt{2}z-1}{z} = \sqrt{2}e^{ix} \iff z = \frac{\sqrt{2}}{4} \left(1 + \frac{i}{\tan \frac{x}{2}} \right)$$

b-Justifie que le nombre complexe nul n'est pas solution de l'équation (E_θ) .

c- Dédus-en les positions des sites.

Problème 2

Le nombre de vétérinaire passant en un mois dans cette ferme définit une variable aléatoire Y dont la fonction de répartition est F telle que : Pour $t \in]-\infty; 0[$, $F(t)=0$; pour $t \in [0; 1[$,

$$F(t) = \frac{1}{10}; \text{ pour } t \in [1; 2[; F(t) = \frac{6}{10}; \text{ et pour } t \in [2; +\infty[, F(t) = 1.$$

La probabilité qu'un vétérinaire de passage dans la ferme se dirige au bloc E est $\frac{7}{10}$ et celle pour qu'il se dirige au bloc G est $\frac{3}{10}$. Le choix du bloc à inspecter est indépendant de celui des autres et pour chaque passage le vétérinaire inspecte un seul bloc.

On note p(A) la probabilité d'un évènement A, I_1 l'évènement « En un mois, un seul vétérinaire se présente à la ferme » ; I_2 l'évènement « En un mois,

deux vétérinaires se présentent à la ferme » et E l'évènement « En un mois, un seul vétérinaire visite le bloc E ».

3- Détermine la loi de probabilité de Y puis déduis-en $p(I_1)$

4- a) Calcule $p(I_1 \cap E)$

b) Justifie que $p_{I_2}(E) = \frac{21}{50}$ et calcule $p(I_2 \cap E)$

c) Déduis la probabilité qu'en un mois un seul vétérinaire contrôle le bloc E.

5-On note X la variable aléatoire égale au nombre de vétérinaire qui contrôle le bloc E en un mois .

a) Détermine la loi de probabilité de X

b) Calcule l'Esperance mathématique de X puis sa variance.

Problème 3

Le tracé du sentier reliant les deux blocs est assimilable dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ à la courbe représentative de la fonction f définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \ln \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right) & \text{si } x < 0 \\ h\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - (1+2x)h(x) - \frac{\pi}{4} & \text{si } 0 \leq x < 1 \end{cases}$$

Où h est la bijection réciproque de la fonction u définie sur par $\forall x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$

$$u(x) = \tan x$$

Partie A

On considère la fonction g définie sur $] -\infty; 0[$ par :

$$g(x) = x \left(\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \right) - \ln \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)$$

6) a) Etudie le sens de variation de g sur $] -\infty; 0[$

b) Achève l'étude des variations de g

c) Démontre que $\forall x \in] -\infty; 0[$, $g(x) > 0$.

7) a- Vérifie que $\forall x \in] -\infty; 0[$, $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

b) Déduis-en le sens de variation de f sur $] -\infty; 0[$.

8) a) Vérifie que $\forall x \in] -\infty; 0[$, $f(x) = -1 + \frac{1}{x} \ln \left(\frac{1 + e^{2x}}{2} \right)$

b) Calcule $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

9) a- Détermine le développement limité d'ordre 2 en 0 de la fonction $x \mapsto \ln\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)$

b- Calcule $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$

Partie B

10) a- Démontre que u admet une bijection réciproque h définie sur $\mathbb{R}$.

b- Démontre que h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $\forall x \in \mathbb{R}, h'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

11- On pose $\varphi(x) = h\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ une fonction définie sur $[0;1[$

a) Calcule $\varphi'(x)$ pour tout x appartenant à $[0;1[$.

b) Déduis-en que $\varphi(x) = \frac{\pi}{4} + h(x)$.

12) a) Démontre que f est définie sur $] -\infty; 1[$

b) Etudie la continuité de f en 0

C) Etudie la dérivabilité de f en 0 puis donne une interprétation géométrique de chacun des résultats obtenus

13) a - Pour tout x appartenant $[0;1[$

Calcule $f'(x)$ et $f''(x)$ respectivement dérivée première et dérivée seconde de f .

b) Etudie les variations de f' sur $[0;1[$ puis déduis-en celle de f sur ce même intervalle.

c-Montre qu'il existe un unique réel c tel que $c = \tan \frac{\pi}{8c}$.

14) Trace la courbe (C) de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.