

Exercice 1 :(4 points)

On considère la suite (u_n) d'entiers naturels définie par $\begin{cases} u_0 = 14 \\ u_{n+1} = 5u_n - 6 \end{cases}$ pour tout entier naturel n .

1) Calcule u_1, u_2, u_3 et u_4 .

Quelle conjecture peut-on émettre concernant les deux derniers chiffres de u_n ?

2) Montre que, pour tout entier naturel $n, u_{n+2} \equiv u_n[4]$.

En déduis que pour tout entier naturel $k, u_{2k} \equiv 2[4]$ et $u_{2k+1} \equiv 0[4]$.

3) a) Montre par récurrence que, pour tout entier naturel $n, 2u_n = 5^{n+2} + 3$.

b) En déduis que, pour tout entier naturel $n, 2u_n \equiv 28[100]$.

4) Détermine les deux derniers chiffres de l'écriture décimale de u_n suivant les valeurs de n .

5) Montre que le PGCD de deux termes consécutifs de la suite (u_n) est constant.

Précise sa valeur.

Exercice 2 :(6 points)

1) Pour tout nombre complexe z , on pose $P(z) = z^3 - 3z^2 + 3z + 7$

a) Calcule $P(-1)$.

b) Détermine les réels a et b tels que pour tout nombre z , on ait :

$$P(z) = (z + 1)(z^2 + az + b).$$

c) Résous dans $\mathbb{C}$, l'équation $P(z) = 0$.

2) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct (unité : 2cm).

On désigne par A, B, C et G les points du plan d'affixes respectives :

$$z_A = -1, z_B = 2 + \sqrt{3}i, z_C = 2 - i\sqrt{3}, z_G = 3.$$

a) Réalise une figure et place les points A, B, C et G.

b) Calcule les distances AB, AC et BC. En déduis la nature du triangle ABC.

c) Calcule un argument du nombre complexe $\frac{z_A - z_C}{z_G - z_C}$. En déduis la nature du triangle GAC

3) Soit (D) l'ensemble des points M du plan tel que : $(-\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}) \cdot \overrightarrow{CG} = 12$. (1)

a) Montre que G est le barycentre du système de points pondérés $\{(A, -1); (B, 2); (C, 2)\}$.

b) Montre que la relation (1) est équivalente à la relation $\overrightarrow{GM} \cdot \overrightarrow{CG} = -4$. (2)

c) Vérifie que le point A appartient à l'ensemble (D).

d) Montre que la relation (2) est équivalente à la relation $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{CG} = 0$.

e) En déduis l'ensemble (D) et trace le.

Problème :(10 points)

Partie A

- 1) On considère la fonction numérique g définie par $g(x) = 1 + x^2 - 2x^2 \ln x$.
- Dresse le tableau de variation de g .
 - Démontre que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α telle que $1,89 < \alpha < 1,90$.
 - Déduis de ce qui précède le signe de $g(x)$.
- 2) On considère la fonction numérique f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{\ln x}{1+x^2}$ et soit (C) sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, d'unité graphique (2 cm).
- Dresse le tableau de variation de f .
 - Vérifie que $f(\alpha) = \frac{1}{2\alpha^2}$. En déduis un encadrement de $f(\alpha)$ d'amplitude 0,01 près.
 - Trace (C) dans le repère.

Partie B

On considère la fonction numérique définie sur $]0, +\infty[$ par : $F(x) = \int_1^x f(t)dt$.

- Prouve que F est dérivable sur $]0; +\infty[$ et précise $F'(x)$.
 - En déduis le sens de variation de F .
- 2) a) Vérifie que $\forall t \geq 1$, on a : $\frac{\ln t}{(1+t)^2} \leq f(t) \leq \frac{\ln t}{t^2}$.
- b) Pour $x > 0$, on pose $I(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{t^2} dt$ et $J(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{(1+t)^2} dt$.
- A l'aide d'une intégration par parties, calcule $I(x)$.
 - A l'aide d'une intégration par partie et de l'égalité : $\frac{1}{t(1+t)} = \frac{1}{t} - \frac{1}{1+t}$ pour $t > 0$, calcule $J(x)$.
- c) Déduis de ce qui précède que pour $x > 1$, on a :
- $$\ln 2 + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) - \frac{\ln x}{x+1} \leq F(x) \leq 1 - \frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}.$$
- d) On admet que $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \theta$. Sans calculer θ , vérifie que $\ln 2 \leq \theta \leq 1$.