

Exercice 1 :(5 points)

On pose $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin 3x \, dx$ et, pour tout nombre n entier naturel non nul,

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{6}} x^n \sin 3x \, dx.$$

- 1) a) Calcule I_0 .
b) En utilisant une intégration par parties, calcule I_1 .
- 2) a) En effectuant deux intégrations parties successives, détermine, lorsque $n \geq 1$, I_{n+2} en fonction de I_n .
b) Vérifie que $I_3 = \frac{\pi^2}{108} - \frac{2}{27}$.
- 3) Sans calculer l'intégrale I_n .
a) Montre que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone.
b) Pour tout nombre n entier naturel non nul, compare I_n à $\int_0^{\frac{\pi}{6}} x^n \, dx$.
c) Détermine la limite de I_n .

Exercice 2 :(5 points)

L'objectif de cet exercice est de déterminer les quels des avions à 2 ou 4 moteurs sont les plus sûrs.

Un avion ne s'écrase pas tant que la moitié au moins de ses moteurs fonctionne. Les moteurs d'un avion tombent en panne de manière indépendante.

Partie A : Dans cette partie on prend $p = 0,1$.

- 1) Calcule la probabilité pour qu'un avion à 2 moteurs s'écrase.
- 2) Calcule la probabilité pour qu'un avion à 4 moteurs ait ses 4 moteurs en panne.
- 3) Calcule la probabilité pour qu'un avion à 4 moteurs ait exactement 3 moteurs en panne
- 4) En déduis la probabilité pour qu'un avion à 4 moteurs s'écrase.

Partie B : On revient au cas général

- 1) Soit $f(p)$ la probabilité pour qu'un avion à 2 moteurs s'écrase. Démontre que $f(p) = p^2$.
- 2) Soit $g(p)$ la probabilité pour qu'un avion à 4 moteurs s'écrase.
Démontre que $g(p) = p^2(-3p^2 + 4p)$.
- 3) On pose $h(p) = f(p) - g(p)$.
a) Etudie le signe de $h(p)$ en fonction de p .
b) En déduis, suivant les valeurs de p dans quels avions il vaut mieux monter.

Problème :.....(10 points)

Partie A :

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \frac{e^x}{1+2e^x} - \ln(1 + 2e^x)$.

1) Calcule $g'(x)$ et montre que ce nombre est strictement négatif pour tout x de $\mathbb{R}$.

2) Détermine les limites de g en $-\infty$ et $+\infty$.

Dresse le tableau de variation de g .

3) Donne le signe de $g(x)$.

Partie B :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-2x} \ln(1 + 2e^x)$.

On note (C) sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthogonal (unités graphiques : 4 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées.)

1) Calcule $f'(x)$ et montre que pour tout réel x , $f'(x) = 2e^{-2x}g(x)$.

2) a) Détermine la limite de f en $-\infty$.

b) Détermine la limite f en $+\infty$. On pourra remarquer que : si on pose $X = 1 + 2e^x$, $f(x)$ s'écrit $4 \frac{X}{(X-1)^2} \cdot \frac{\ln X}{X}$.

3) Dresse le tableau de variation de f .

4) Trace (C).

5) Soit α un réel strictement positif.

a) Vérifie que, pour tout réel x , $\frac{e^{-x}}{1+2e^x} = e^{-x} - 2 \frac{e^{-x}}{e^{-x}+2}$.

En déduis la valeur de l'intégrale $I(\alpha) = \int_0^\alpha \frac{e^{-x}}{1+2e^x} dx$.

b) Calcule, à l'aide d'une intégration par parties, l'intégrale : $J(\alpha) = \int_0^\alpha f(x) dx$.

Donne une interprétation graphique de $J(\alpha)$.

Partie C :

On considère l'équation différentielle (E) : $y' + 2y = 2 \frac{e^{-x}}{1+2e^x}$.

1) Vérifie que la fonction f étudiée dans la partie B est solution de (E).

2) Montre qu'une fonction φ est solution de (E) si et seulement si $\varphi - f$ est solution de l'équation différentielle (E') : $y' + 2y = 0$.

3) Résous (E') et en déduis les solutions de (E).