

MINI BAC N°1	COURS LE SAVOIR ACQUIS		
Epreuve de :	Mathématiques	Durée :	4h
Classe :	TSE	Coef :	4

Exercice1..... (5 Points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{u};\vec{v})$. Unité graphique 1cm. On note j le nombre complexe $e^{i\frac{2\pi}{3}}$. On considère les points A, B et C d'affixes respectives $a = 8, b = 6j$, et $c = 8j^2$. Soit A' l'image de B par la rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{3}$, B' l'image de C par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$, C' l'image de A par la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

- Place les points A, B, C, A', B' et C' dans le repère donné.
- On appelle a', b' et c' d'affixes respectives des points A', B' et C' .
 - Calcule a' et vérifie que a' est un nombre réel.
 - Montre que $b' = 16e^{-i\frac{\pi}{3}}$. En déduis que O est un point de la droite (BB') .
 - On admet que $c' = 7 + 7i\sqrt{3}$. Montre que les droites $(AA'), (BB')$ et (CC') sont concourantes en O .
- On se propose de montrer que la distance $MA + MB + MC$ est minimale lorsque $M = O$.
 - Calcule la distance $OA + OB + OC$.
 - Montre que $j^3 = 1$ et que $1 + j + j^2 = 0$.
 - On considère un point M quelconque d'affixe z du plan complexe.

Deduis des questions précédentes les égalités suivantes :

$$\left| (a - z) + (b - z)j^2 + (c - z)j \right| = \left| a + bj^2 + cj \right| = 22.$$

- On admet que, quels que soient les nombres complexes $z, \left| z + z' + z'' \right| \leq \left| z \right| + \left| z' \right| + \left| z'' \right|$.

Montre que $MA + MB + MC$ est minimale lorsque $M = O$.

Exercice2..... (5 Points)

On considère l'équation $(E) : 8x + 5y = 6$.

- Montre que $(2; -2)$ est une solution de (E) .
 - Résous dans $\mathbb{Z}$ l'équation (E) .
- Soit $(x; y)$ une solution de (E) et $d = \text{PGCD}(x; y)$.
 - Détermine les valeurs possibles de d .

- b. Détermine les couples $(x; y)$ solutions de (E) pour lesquels $d=3$.
3. On considère le système $(S) : \begin{cases} n \equiv 2[5] \\ n \equiv -2[8] \end{cases}$ où n est un entier naturel.
- a. Montre que n est une solution de (E) si et seulement si $n \equiv 22[40]$.
- b. Etudie suivant des valeurs de l'entier naturel n ($n \geq 3$), le reste modulo 40 de 22^n .
- c. Détermine le reste modulo 5 de 2022 et le reste modulo 8 de 2022.
- d. En déduis que l'entier $[(2022)^{2017} - 32]$ est divisible par 40.

Problème..... (10 Points)

On désigne par n un entier supérieur ou égal à 2 et on considère les fonctions, notées f_n , qui sont définies pour x appartenant à l'intervalle $]0; +\infty[$ par : $f_n(x) = \frac{1 + n \ln(x)}{x^2}$.

On note (C_n) la courbe représentative de la fonction f_n dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. (Unité graphique 2 cm).

Partie A : Etude des fonctions f_n

- a. Montre que pour tout $x \in]0; +\infty[$, $f'_n(x) = \frac{n-2-2n \ln(x)}{x^3}$.
- b. Etudie le signe de $f'_n(x)$ sur $]0; +\infty[$.
- Détermine la limite de f_n en $+\infty$ puis dresse le tableau de variation de la fonction f_n et calcule sa valeur maximale en fonction de n .
- Calcule $f_{n+1}(x) - f_n(x)$ puis détermine la position de (C_{n+1}) par rapport (C_n) .
- Trace (C_2) , (C_3) et (C_4)

Partie B : Calculs d'aires

- Calcule, en intégrant par parties, l'intégrale : $I = \int_1^e \frac{\ln(x)}{x^2} dx$.
- En déduis l'aire, en unités d'aire, du domaine plan limité par les courbes (C_n) et (C_{n+1}) et les droites d'équations $x=1$ et $x=e$.
- On note A_n l'aire, en unités d'aire, du domaine limité par la courbe (C_n) et les droites d'équations $y=0$, $x=1$ et $x=e$.
 - Calcule A_2
 - Détermine la nature de la suite (A_n) en précisant l'interprétation graphique de sa raison.

Partie C : Etude sur l'intervalle $]1; +\infty[$ de l'équation $f_n(x) = 1$.

Dans toute la suite, on prendra $n \geq 3$.

1. a. Vérifie que , pour tout n , $e^{\frac{n-2}{2n}} > 1$ et $f_n\left(e^{\frac{n-2}{2n}}\right) > 1$.

b. Démontre que l'équation $f_n(x) = 1$ n'a pas de solution sur l'intervalle $\left]1; e^{\frac{n-2}{2n}}\right]$ puis admet exactement une solution notée α_n sur $\left]e^{\frac{n-2}{2n}}; +\infty\right[$.

3. On se propose de déterminer la limite de la suite (α_n) .

a. Calcule $f_n(\sqrt{n})$ et montre que , pour $n > e^2$, on a $f_n(\sqrt{n}) \geq 1$.

b. En déduis que , pour $n \geq 8$, on a $\alpha_n \geq \sqrt{n}$ et donne la limite de la suite (α_n) .