

Exercice 1 : 5pts

On considère la suite $(U_n)_{n \geq 1}$ et $(V_n)_{n \geq 1}$ définies par :

$$\begin{cases} U_1 = 1 \\ U_n = U_{n-1} + \frac{1}{n} \text{ et } V_n = U_n - \ln n \end{cases}$$

1) a) Calcule U_2 ; U_3 et U_4

b) Montre que, pour tout $n \geq 1$, on a : $U_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ puis donne son sens de variation.

2) a) Montre que, pour tout entier naturel k non nul : $\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx \leq \frac{1}{k}$

b) En déduis que pour tout entier $n \geq 2$, on a les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} \blacksquare \quad & U_n - 1 \leq \ln n \leq U_n - \frac{1}{n} \\ \blacksquare \quad & 0 \leq V_n \leq 1 \end{aligned}$$

3) a) Montre que, pour tout entier naturel n non nul : $V_{n+1} - V_n = \frac{1}{n+1} - \int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx$

b) En déduis que le sens de variation de la suite (V_n)

4) Montre que la suite (V_n) converge. On note λ sa limite

(On ne cherchera pas à calculer λ)

Quelle est la limite de la suite (U_n) ?

Exercice 2 : 5pts

Soit l'équation différentielle (E) telle que : $(E): y'' - 2y' + y = -e^x \cos x$.

1) Déterminer les réels a et b tels que $\delta(x) = (a \cos x + b \sin x)e^x$ soit une solution de (E).

2) Résoudre l'équation différentielle $(E'): y'' - 2y' + y = 0$.

(On notera γ la solution de (E'))

3) Montrer qu'une fonction φ est solution de (E) si et seulement si $(\varphi - \delta)$ est solution de (E') .

4) En déduire les solutions φ de (E).

5) Déterminer la solution ψ de (E) dont la courbe (C) passe par $A(0; -1)$ et admet une tangente horizontale en A.

6) Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x dx$ et $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx$ en intégrant par parties.

En déduis la valeur $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \psi(x) dx$.

Problème : 10pts

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel non nul. A tout entier n non nul, on associe la fonction numérique f_n définie sur $] -1; +\infty[$ par :

$$f_n(x) = x^n \ln(1+x)$$

On note (C_n) la courbe représentative de f_n dans le plan rapporté à un repère orthonormé (unité graphique : 2 cm).

Partie A :

- 1) a) Montre les courbes (C_n) se coupent en deux points A et B dont on précisera les coordonnées.
- 2) b) Montre pour tout réel non nul x et pour tout n non nul, on a :

$$f'_n(x) = x^{n-1} \cdot h_n(x) \text{ où } h_n(x) = n \ln(1+x) + \frac{x}{1+x}$$

- 3) Etudie les variations de h_n puis dresse son tableau de variation.
- 4) En déduis le signe de h_n sur $] -1; +\infty[$

Partie B :

- 1) On suppose que n est impair.
 - a) Calcule les limites de f en -1 et $+\infty$
 - b) Justifie que $f'_n(x)$ et $h_n(x)$ ont le même signe sur $] -1; +\infty[$.
 - c) Dresse le tableau de variation de f_n
- 2) On suppose que n est pair.
 - a) Calcule les limites de f_n en -1 et $+\infty$
 - b) Etudie les variations de f_n .
 - c) Dresse le tableau de variation de f_n
- 3) En supposant que n est impair, étudie la position relative des courbes (C_n) et (C_{n+1}) sur $] -1; +\infty[$. En déduis la position relative des courbes (C_1) et (C_2) .
- 4) Trace les courbes (C_1) et (C_2) .

Partie C :

Soit la suite (A_n) définie pour tout entier non nul n par : $A_n = \int_0^1 f_n(x) dx$

- 1) Pour tout n , on pose : $I = \int_0^1 \frac{x^2}{x+1} dx$
 - a) Calcule I (On pourra écrire $\frac{x^2}{x+1}$ sous la forme $ax + b + \frac{c}{x+1}$ où a, b et c sont des réels)
 - b) A l'aide d'une intégration par parties, en déduis la valeur de A_1
- 2) Montre que pour tout entier non nul n , on a :

$$(n+1)A_n = 2 \ln 2 - \frac{1}{n+1} - nA_{n-1} = \ln 2 - \frac{1}{n+1} + \int_0^1 \frac{x^n}{x+1}$$
- 3) Détermine le sens de variation de la suite (A_n) . La suite (A_n) converge-t-elle ?
- 4) Démontre que pour tout entier naturel non nul, on a : $0 \leq A_n \leq \frac{\ln 2}{n+1}$
En déduis la limite de A_n .