

Exercice 1 : 5pts

Un élève du lycée Rosey Abantara se rend à l'école en bus. S'il est à l'heure, il prend le bus de ramassage gratuit mis à disposition par le lycée, s'il est en retard il prend une mototaxi qui lui coûte 1000F.

S'il est à l'heure un jour n , la probabilité qu'il soit en retard le jour suivant ($n+1$) est $\frac{1}{5}$.

S'il est en retard le jour n , la probabilité qu'il soit en retard le lendemain (le jour ($n+1$)) est $\frac{1}{20}$.

Soit R_n l'évènement « l'élève est en retard le jour n » On note p_n la probabilité de R_n et q_n celle de $\overline{R_n}$. On suppose qu'il vient à l'heure le premier jour (*jour de la rentrée*).

1) Détermine $P_{R_n}(R_{n+1})$ et $P_{\overline{R_n}}(R_{n+1})$. (On rappelle que $P(R_{n+1}/R_n) = P_{R_n}(R_{n+1})$).

2) Détermine $p(R_n \cap R_{n+1})$ en fonction de p_n et $p(\overline{R_n} \cap R_{n+1})$ en fonction de q_n

3) Exprime p_{n+1} en fonction de p_n et q_n puis en déduire que $p_{n+1} = \frac{1}{5} - \frac{3}{20} p_n$

4) Soit la suite $(v_n)_{n \geq 1}$ telle que $v_n = p_n - \frac{4}{23}$

a) Montre que (v_n) est une suite géométrique de raison $-\frac{3}{20}$.

b) Exprime p_n en fonction de n .

c) Justifie que (p_n) est convergente et calcule sa limite.

Exercice 2 : 5pts

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \ln x$

1) On note α un nombre réel strictement positif

a) A l'aide d'une intégration par parties calcule $\int_{\alpha}^1 \ln x \, dx$.

En déduis la valeur de $I(\alpha) = \int_{\alpha}^1 f(x) \, dx$

b) Détermine la limite de $I(\alpha)$ quand α tend vers $+\infty$.

2) $\forall n \geq 2$; on pose: $S_n = \frac{1}{n} \sum_{p=1}^n f\left(\frac{p}{n}\right)$

a) En utilisant le sens de variation de f sur $]0; 1]$, démontre que pour tout p entier naturel

vérifiant $1 \leq p \leq n-1$ on a : $\frac{1}{n} f\left(\frac{p+1}{n}\right) \leq \int_{\frac{p}{n}}^{\frac{p+1}{n}} f(x) \, dx \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{p}{n}\right)$

b) En déduis que : $S_n - \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) \leq I\left(\frac{1}{n}\right) \leq S_n$ puis $I\left(\frac{1}{n}\right) \leq S_n \leq I\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right)$

c) En déduis que la suite (S_n) converge vers $\frac{1}{3}$.

Problème : 10pts

Soit la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par
$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(x) = x \ln x + (1-x) \ln(1-x) \text{ si } x \in]0; 1[\text{ et} \\ f(x) = \frac{x-1}{e^x-x-1} \text{ si } x \in [1; +\infty[\end{cases}$$

(C) sa courbe représentative de f dans un repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$ d'unité 5cm.

Partie A :

Soit la fonction h définie sur $[1 ; +\infty[$ par $h(x) = (2 - x)e^x - 2$

- 1) Montre que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution $\lambda \in \left] \frac{3}{2}; 2 \right[$ et en déduis le signe de h suivant les valeurs de x .
- 2) Etudie le signe de $g: x \mapsto \ln x - \ln(1 - x)$ sur $]0; 1[$.

Partie B :

- 1) Démontre que f est continue en 0 et en 1.
- 2) a) Démontre que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x)}{x-1} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x)}{x-1} = \frac{1}{e-2}$.
Interprète graphiquement ces résultats
b) Démontre que (C) admet une asymptote horizontale que tu préciseras.
- 3) a) Montre que pour tout $x \in [1; +\infty[$, $f'(x)$ et $h(x)$ ont le même signe.
b) Prouve que pour tout $x \in]0; 1[$, $f'(x) = g(x)$.
- 4) Dresse le tableau de variation de f puis montre que $f(\lambda) = -1 + \frac{2}{\lambda}$.
- 5) Trace la courbe (C) sur $[0; 3]$.

Partie C :

Soit le réel $\lambda \in \left] \frac{3}{2}; 2 \right[$ déterminé dans la question 1) de la partie A.

- 1) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $I_n(\lambda) = \int_1^\lambda \frac{(t-1)^n}{e^t - t - 1} dt$
 - a) En utilisant les variations de f sur $[1; \lambda]$, pour démontrer que : $0 \leq I_1(\lambda) \leq \frac{(2-\lambda)(\lambda-1)}{\lambda}$
 - b) Etudie le sens de variation de la fonction : $t \mapsto e^t - t - 1$ sur $[1; +\infty[$ puis en déduis que pour tout $t \geq 1$; $e^t - t - 1 \geq e - 2$.
 - c) Prouve alors que : $0 \leq I_n(\lambda) \leq \frac{(\lambda-1)^{n+1}}{(n+1)(e-2)}$
- d) Démontre que la suite $(I_n(\lambda))$ est convergente. Précise sa limite.
- 2) Soient a et b deux réels strictement positifs tels que $a + b = 1$
 - a) En remarquant que $f(x) \geq -\ln 2$, pour tout $x \in]0; 1[$, prouve que :
 $a \ln \left(\frac{1}{a} \right) + b \ln \left(\frac{1}{b} \right) \leq \ln 2$
 - b) Pour quelles valeurs de a et b , $a \ln \left(\frac{1}{a} \right) + b \ln \left(\frac{1}{b} \right) = \ln 2$?