

COLLEGE JEAN TABI D'ETOUDI  
DEPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES  
BP : 4174 – YAOUNDE  
TEL/FAX : 22216053  
N°/REF : CJT/19-20/DH/AB/SKEM

ANNEE SCOLAIRE 2019-2020  
SEQUENCE 6  
CLASSE DE Terminale C  
DUREE 4 Heures  
COEF 5

**SESSION INTENSIVE DE JUIN 2020 : EPREUVE DE MATHÉMATIQUES**

**EXERCICE I : (3.5 Points)**

- 1- Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $z^2 + z + 1 = 0$  et noter  $j$  la solution dont la partie imaginaire est positive. 0.5pt
- 2- Calculer de deux manières différentes chacun des nombres suivants :  $(1+j)^n$ ,  $(1+j^2)^n$  et  $(1+1)^n$  1.5pt
- 3- On pose :  $S_0 = 1 + C_n^3 + C_n^6 + C_n^9 + \dots + C_n^{3k} + \dots + C_n^{3p}$  ( $p$  est le plus grand entier tel que  $3p \leq n$ )  
 $S_1 = C_n^1 + C_n^4 + \dots + C_n^{3k+1} + \dots + C_n^{3q+1}$  ( $q$  est le plus grand entier tel que  $3q+1 \leq n$ )  
 $S_2 = C_n^2 + C_n^5 + \dots + C_n^{3k+2} + \dots + C_n^{3r+2}$  ( $r$  est le plus grand entier tel que  $3r+2 \leq n$ )  

$$\begin{cases} S_0 + S_1 + S_2 = 2^n \\ S_0 + jS_1 + j^2S_2 = e^{in\frac{\pi}{3}} \\ S_0 + j^2S_1 + jS_2 = e^{-in\frac{\pi}{3}} \end{cases}$$
- 3.1. Montrer que : 0.75pt
- 3.2. Calculer alors les nombres  $S_0, S_1$  et  $S_2$  0.75pt

**EXERCICE II : (3.5 Points)**

On considère une population constituée à 10% de gauchers et à 90% de droitiers.

- 1- Calculer la probabilité pour qu'un groupe de huit personnes de cette population soit constitué :
  - 1.1. D'au moins un gaucher 0.5pt
  - 1.2. D'exactement trois gauchers. 0.5pt
- 2- Un atelier de couture est équipé de sept paires de ciseaux pour droitiers et de trois pour gauchers. Quelle est la probabilité pour que les huit membres du personnel trouvent chacun une paire de ciseaux lui convenant. 0.5pt
- 3- On appelle  $X$  la variable aléatoire prenant comme valeur le nombre de personnes ayant trouvé une paire de ciseaux à sa convenance.
  - 3.1. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire réelle  $X$ . 1pt
  - 3.2. Calculer l'espérance mathématique, la variance et l'écart-type de la variable aléatoire. 1pt

**EXERCICE III : (2 Points)**

Dans un plan orienté et muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ , on considère les vecteurs  $\vec{e}_1 = \frac{1}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j}$  et

$$\vec{e}_2 = \frac{-\sqrt{3}}{2}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j}$$

- 1- Démontrer que  $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$  est un repère orthonormé du plan. 0.5pt
- 2- Une conique  $(\Gamma)$  dans le repère  $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$  a pour équation  $13X^2 + 7Y^2 + 6\sqrt{3}XY = 16$ .
  - 2.1. Écrire une équation cartésienne réduite de cette conique dans le repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ . 1pt
  - 2.2. En déduire sa nature et son excentricité. 0.5pt

**PROBLEME : (11 Points)**

## PARTIE A : (3 Points)

- 1- Déterminer les couples d'entiers  $(x; y)$  tels que :  $14x - 31y = 3$ . 0.75pt
- 2- En déduire les couples  $(x; y)$  d'entiers premiers entre eux solution de l'équation  $14x - 31y = 3$ . 0.5pt
- 3- Trois phares A, B et C lancent un signal lumineux respectivement toutes les 25 secondes, les 30 secondes et les 35 secondes. Un signal lumineux simultané se produit à 22 heures. A quelle heure se produira le premier signal simultané après minuit ? 0.75pt
- 4- Déterminer le chiffre des unités du nombre  $7^{7^{7^7}}$  1pt

## PARTIE B : (3 Points)

Soit  $f$  la fonction définie sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  par :  $f(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{1+t^2} dt$ . On désigne par  $(C)$  la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormé  $(O; I, J)$ .

1. Justifier que  $f$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$  calculer la dérivée  $f'(x)$  et en déduire le sens de variation de  $f$ . 0.75pt
2. 2.1. Pour  $x > 0$ , calculer  $\int_1^x \frac{\ln t}{t^2} dt$  à l'aide d'une intégration par parties. 0.5pt  
 2.2. Montrer que pour tout  $x > 0$ ,  $\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x}\right) \leq f(x) \leq \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x}\right)$  et en déduire un encadrement de la limite de  $f$  en plus l'infini. 0.75pt
3. Soit  $g$  la fonction définie sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  par  $g(x) = f(x) - f\left(\frac{1}{x}\right)$ .  
 3.1. Démontrer que  $g$  est la fonction nulle sur  $]0; +\infty[$ . 0.5pt  
 3.2. En déduire la limite de  $f$  en 0. 0.25pt  
 3.3. Tracer l'allure de la courbe  $(C)$ . 0.25pt

## PARTIE C : (5 Points)

Soit  $(P)$  le plan affine muni du repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ . On considère : la droite  $(D) : x - 2y = 0$ , la droite vectorielle  $\vec{d}$  de base  $\vec{j}$  et  $S$  la symétrie par rapport à  $(D)$ , de direction  $\vec{d}$  et  $\sigma$  son endomorphisme associé. (N.B :  $S$  n'est pas une symétrie orthogonale)

- 1- On appelle  $F$  l'ensemble des applications affines bijectives de  $(P)$  dans  $(P)$  vérifiant :  $f \circ S = S \circ f$ . On admet que  $(F, \circ)$  est un groupe.

a) Soit  $M(x; y)$  un point du plan. Montrer que les coordonnées  $(x'; y')$  de  $S(M)$  sont données par le système :  $\begin{cases} x' = x \\ y' = x - y \end{cases}$  (0.25pt)

b) Soit  $g$  l'application de  $(P)$  dans  $(P)$  qui au point  $M(x; y)$  associe  $M''(x''; y'')$  tel que  $\begin{cases} x'' = \frac{-1}{2}x + 1 \\ y'' = \frac{-3}{4}x + y + \frac{1}{2} \end{cases}$   
 Montrer que  $g$  est élément de  $F$ . (0.25pt)

- 2- Soit  $f$  une application affine bijective de  $(P)$  vers  $(P)$ , d'endomorphisme associé  $\varphi$ .

2.1. Démontrer que  $f \in F$  si et seulement si  $\begin{cases} f(O) \in D \\ \exists a \in \mathbb{R} * \text{tel que } \varphi(2\vec{i} + \vec{j}) = a(2\vec{i} + \vec{j}) \\ \exists b \in \mathbb{R} * \text{tel que } \varphi(\vec{j}) = b\vec{j} \end{cases}$  (0.75pt)

2.2. Ecrire la matrice de  $\varphi$  dans la base  $(\vec{i}, \vec{j})$ . (0.25pt)

- 3- Préciser les couples  $(a, b)$  pour lesquels  $f$  est une homothétie. Caractériser cette homothétie. (0.5pt)
- 4- Préciser les couples  $(a, b)$  pour lesquels  $f$  est une translation. Caractériser cette translation. (0.5pt)

5- 5.1. Soit  $F_1 = \{f \in F \text{ tel que } \varphi(\vec{f}) = \vec{f}\}$ . Montrer que le point  $M(x; y)$  a pour image le point  $M_1(x_1; y_1)$

par  $f$  tel que :  $\begin{cases} x_1 = ax + 2q \\ y_1 = \frac{a-1}{2}x + y + q \end{cases}$  où  $a \in \mathbb{R}^* \text{ et } q \in \mathbb{R}$ .

(0.5pt)

5.2. Quel est l'ensemble des points invariants par  $f$  ? (Discuter suivant les valeurs de  $a$  et  $q$ ) (0.5pt)

5.3. Vérifier que  $g$  est élément de  $F_1$  et déterminer l'ensemble  $E$  des points invariants par  $g$ . (0.5pt)

5.4. Démontrer que si un point  $M$  n'appartient pas à  $E$ , alors la droite  $(Mg(M))$  garde une direction fixe indépendante de  $M$ , que l'on précisera. (0.5pt)

5.5. Soit  $M_0$  le point d'intersection de  $E$  et  $(Mg(M))$ . Comparer  $\overrightarrow{M_0g(M)}$  et  $\overrightarrow{M_0M}$ . En déduire une construction du point  $g(M)$  à partir de  $M$ . (0.5pt)