



L'épreuve comporte quatre exercices répartis sur deux pages

Exercice 1 : 5,25 points

I/ On considère l'ensemble A des nombres premiers de la forme $4a + 3$, avec $a \in \mathbb{N}$ et B l'ensemble des entiers de la forme $4a + 1$, avec $a \in \mathbb{Z}$.

- 1) Montrer que tout nombre premier distinct de deux est de la forme $4a + 1$ ou $4a + 3$, a étant un entier naturel. 0,25pt
- 2) Montrer que B est stable pour la multiplication. 0,25pt
- 3) Montrer que A est non vide. 0,25pt
- 4) On se propose de montrer par l'absurde que l'ensemble A est infini. Supposons que A soit fini et que $A = \{p_1, p_2, p_3, \dots, p_n\}$. On pose $p = 4p_1 \times p_2 \times p_3 \times \dots \times p_n - 1$. 0,25pt
 - a) Montrer que p est plus grand que tout élément de A. 0,5pt
 - b) Montrer par l'absurde que p admet un diviseur premier de la forme $4a + 3$. 0,25pt
 - c) En déduire que A est un ensemble fini.

II/ Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, on considère un point M d'affixe z.

- 1) Montrer que l'ensemble des points M tels que $z + \bar{z} + 4 = 0$ est une droite (D). 0,25pt
- 2) Démontrer que la distance du point M à la droite (D) est $\frac{1}{2}|z + \bar{z} + 4|$. 0,5pt
- 3) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'ensemble des points M d'affixe z tels que $\left| \frac{-2z + 2 + 2i}{z + \bar{z} + 4} \right| = \sqrt{3}$. 0,75pt

III/ On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation (E) : $z^2 - 2z \tan \theta + 2 \tan^2 \theta + 1 = 0$ où $\theta \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$.

- 1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E). 0,5pt
- 2) Soit M_θ le point dont l'affixe est une solution de l'équation (E). Montrer que M_θ est un point de la conique (Γ) d'équation $x^2 - y^2 = -1$. 0,5pt
- 3) Déterminer la nature, les foyers et l'excentricité de (Γ). 0,5pt
- 4) Construire l'ensemble des points M_θ lorsque θ décrit $\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$. 0,5pt

Exercice 2: 4,25 points

On considère la fonction numérique f définie par $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(x+1)}{x} & \text{si } x \in]0; +\infty[\\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

- 1) Déterminer l'ensemble de définition D de f. 0,25pt
- 2) Déterminer les limites de f en $+\infty$. 0,25pt
- 3) Démontrer que pour tout réel t de $]0; +\infty[$, $1 - t \leq \frac{1}{1+t} \leq 1 - t + t^2$. 0,5pt
- 4) En déduire que pour tout réel x de $]0; +\infty[$, $x - \frac{1}{2}x^2 \leq \ln(x+1) \leq x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3$. 0,5pt
- 5) En déduire que la fonction f est dérivable en 0 et donner une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse zéro. 0,75pt
- 6) Montrer que la fonction f est dérivable sur D, déterminer sa dérivée et dresser le tableau des variations de f. 1pt

- 7) Construire la courbe (C) de la fonction f dans un repère orthonormé du plan. 0,5pt
- 8) Donner un encadrement de l'aire en unités d'aire du domaine délimité par la courbe (C), l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 1$. 0,5pt

Exercice 3 : 5 points

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère les points $A(3; 2; 1)$, $B(3; 1; 0)$, $C(1; 2; 0)$ et $D(1; 2; -3)$. On considère le plan (P) d'équation $2x - y - 2z + 5 = 0$ et la droite (d): $\begin{cases} x - y + 3 = 0 \\ z + 2 = 0 \end{cases}$. Dans l'ensemble W des vecteurs de l'espace, on considère l'endomorphisme φ de W défini par $\varphi(\vec{i}) = \vec{i}$, $\varphi(\vec{j}) = 2\vec{j} - \vec{k}$ et $\varphi(\vec{k}) = -4\vec{j} + 2\vec{k}$.

- 1) Montrer que les points A, B, C et D sont non coplanaires et calculer le volume du tétraèdre ABCD. 1pt
- 2) Donner l'expression analytique de la réflexion de plan (P). 0,75pt
- 3) Donner l'expression analytique du demi-tour d'axe la droite (d). 0,75pt
- 4) Déterminer la matrice M de φ dans la base $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. 0,25pt
- 5) Déterminer le noyau $\ker \varphi$ de φ . On précisera une base de $\ker \varphi$. 0,5pt
- 6) Déterminer l'image $\text{Im} \varphi$ de φ . On précisera une base de $\text{Im} \varphi$. 0,5pt
- 7) Soit $B' = (\vec{i}, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ avec $\vec{e}_1 = 2\vec{j} + \vec{k}$ et $\vec{e}_2 = 2\vec{j} - \vec{k}$.
 - a) Montrer que B' est une base de W. 0,5pt
 - b) Déterminer la matrice N de φ dans la base B' et calculer N^2 . 0,75pt

Exercice 4 : 5,5 points

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On considère les points $I(0; 2)$, $J(0; 1)$; $A(-2; 2)$; $B(1; -2)$ et $C(-3; 0)$. Soit f l'application affine du plan telle que $f(I) = A$, $f(J) = J$, $f(B) = C$ et $G = \text{bar}\{(B, 2); (I, -1); (J, 1)\}$. Soit g l'application du plan dans le plan qui à tout point M de coordonnées (x, y) associe le point M' de coordonnées (x', y') telles

$$\text{que : } \begin{cases} x' = \frac{1}{5}(-3x + 4y - 4) \\ y' = \frac{1}{5}(4x + 3y + 2) \end{cases}$$

- 1) Montrer que f est bijective. 0,5pt
- 2) Donner l'expression analytique de f . 0,75pt
- 3) Montrer que l'ensemble des points invariants par g est une droite (D) dont on précisera une équation. 0,5pt
- 4) Soient $M(x, y)$ et $M'(x', y')$ deux points du plan tels que $g(M) = M'$.
 - a) Montrer que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ a une direction fixe orthogonale à celle de (D) que l'on précisera. 0,5pt
 - b) Montrer que le milieu du segment $[MM']$ appartient à la droite (D). 0,5pt
- 5) Montrer que g est une involution. 0,75pt
- 6) En déduire la nature précise de g . 0,25pt
- 7) Soit h l'affinité orthogonale d'axe (D) et de rapport -3 .
 - a) Montrer que la droite (D) est la droite passant par le point J et de vecteur directeur $\vec{i} + 2\vec{j}$. 0,25pt
 - b) Déterminer alors l'expression analytique de h . 0,75pt
- 8) Déterminer la nature, les éléments caractéristiques de l'image (C') du cercle de centre I et de rayon 3 par l'affinité orthogonale d'axe la droite d'équation $y = -1$ et de rapport 2. On donnera d'abord une équation de (C'). 0,75pt