

COMPOSITION DE FIN DU 3^{ème} TRIMESTRE

EXERCICE 1 : 3 points

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. On donne les points $A(2;0)$, $B(1;1)$, $C(-2;-1)$, $A'(3;10)$, $B'(4;6)$ et $C'(-3;-1)$.

Soit f l'application affine du plan telle que $f(A) = A'$, $f(B) = B'$ et $f(C) = C'$.

(a) Démontrer que f est bijective. 0,5pt

(b) Ecrire la matrice de l'application linéaire φ associée à f dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$. 0,5pt

(c) En déduire l'expression analytique de f . 0,5pt

2. Soit g l'application affine du plan d'expression analytique : $\begin{cases} x' = y + 4 \\ y' = x - 2 \end{cases}$

(a) Montrer que g est un antidéplacement. 0,5pt

(b) Déterminer l'ensemble des points invariants par g , puis caractériser g . 1pt

EXERCICE 2 : 4 points

Soit $(O, \vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC})$ un repère orthonormé direct de l'espace. Soit $M(x, y, z)$ un point de l'espace. On note H son projeté orthogonal sur le plan (ABC) et K celui, sur la droite (AB) .

1. Soit G l'isobarycentre des points A, B et C .

(a) Donner les coordonnées du point G , puis vérifier que $(OG) \perp (ABC)$. 0,5pt

(b) Ecrire une équation cartésienne du plan (ABC) . 0,5pt

2. Montrer que $|\vec{MA} \cdot \vec{OG}| = \frac{1}{\sqrt{3}} MH$; calculer la distance de M au plan (ABC) . 0,75pt

3. (a) Exprimer la distance MK en fonction de la norme $\|\vec{MA} \wedge \vec{MB}\|$ vue comme une aire. 0,5pt

(b) En déduire que $\sqrt{2} MK = \sqrt{2z^2 + (1-x-y)^2}$. 0,5pt

4. On se place dans le plan (OAB) d'équation $z = 0$ et on considère l'ensemble (Γ) des points M du plan (OAB) qui sont équidistants du point O et du plan (ABC) .

(a) Montrer que (Γ) ne contient aucun point de la droite (AB) ; calculer le rapport $\frac{MH}{MK}$. 0,5pt

(b) Donner la nature de (Γ) , un foyer, la directrice associée et l'excentricité. 0,75pt

EXERCICE 3 : 3 points

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. (unité graphique : 1cm)

Soient A, B et C les points d'affixes respectives $a = 3 + 5i$, $b = -4 + 2i$ et $c = 1 + 4i$. Soit f la transformation du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' définie par $z' = (2 - 2i)z + 1$.

1. Donner la nature et les éléments caractéristiques de f . 0,75pt

2. (a) Déterminer l'affixe du point B' image du point B par f . 0,25pt

- (b) Montrer que les droites (CB') et (CA) sont orthogonales. 0,5pt
3. Soit M le point d'affixe $z = x + iy$ où $x, y \in \mathbb{Z}$ et M' l'image du point M par f .
- (a) Montrer que $\overrightarrow{CM'}$ et $\overrightarrow{CA}$ sont orthogonaux si et seulement si $x + 3y = 2$. 0,5pt
- (b) Déterminer l'ensemble des points M dont les coordonnées sont des entiers appartenant à l'intervalle $[-5; 5]$ et tels que les vecteurs $\overrightarrow{CM'}$ et $\overrightarrow{CA}$ soient orthogonaux. 1pt

PROBLEME : 10 points

Le problème comporte trois parties A, B et C.

- A) Soit g_n la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $g_n(x) = x - n + \frac{n}{2} \ln x$ où $n \in \mathbb{N}^*$.
1. (a) Etudier les variations de g_n . 0,75pt
 - (b) En déduire l'existence d'un réel positif α_n unique tel que $g_n(\alpha_n) = 0$. 0,25pt
 - (c) Montrer que $1 < \alpha_n < e^2$ et que : $\ln(\alpha_n) = 2 - \frac{2}{n} \alpha_n$. 0,5pt
 - (d) Exprimer $g_{n+1}(\alpha_n)$ en fonction de α_n et de n . En déduire que $\alpha_{n+1} > \alpha_n$. 0,75pt
 2. (a) Montrer que la suite de terme général α_n est convergente. On note l sa limite. 0,5pt
 - (b) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(\alpha_n)$ et en déduire l . 0,5pt
- B) 1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $(E_0) : y'' - 2y' + y = 0$. 0,5pt
2. Soit l'équation différentielle $(E) : y'' - 2y' + y = x^2 - 4x + 2$.
- (a) Vérifier que le polynôme h défini sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = x^2$ est solution de (E) . 0,25pt
 - (b) Montrer que f est solution de $(E) \Leftrightarrow g = f - h$ est solution de (E_0) . 0,5pt
 - (c) En déduire la forme générale des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$. 0,25pt
 - (d) En déduire une solution φ de (E) satisfaisant à $\varphi(1) = 1$ et $\varphi'(1) = 0$. 0,5pt
- C) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 2(x-1)e^{(x-1)}$. On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$; (unité graphique : 2cm).
1. Etudier les variations de f . 1pt
 2. (a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet sur $\mathbb{R}$ une solution unique notée α . 0,5pt
 - (b) Montrer que $1,7 < \alpha < 1,8$. 0,25pt
 3. On appelle (Γ) la parabole d'équation $y = x^2$.
 - (a) Etudier la position relative de $\mathcal{C}$ et (Γ) . 0,5pt
 - (b) Calculer la limite de $f(x) - x^2$ quand x tend vers $-\infty$. Qu'en conclure ? 0,5pt
 4. Tracer la courbe $\mathcal{C}$ et la parabole (Γ) . 0,75pt
 5. Soit λ un nombre réel strictement inférieur à 1. On appelle $\mathcal{D}_\lambda$ le domaine du plan limité par les courbes $\mathcal{C}$, (Γ) et les droites d'équations $x = \lambda$ et $x = 1$. On note $\mathcal{A}(\lambda)$ l'aire du domaine $\mathcal{D}_\lambda$ exprimée en unités d'aire.
 - (a) Montrer que $\mathcal{A}(\lambda) = 2(\lambda - 1)e^{(\lambda-1)} - 2e^{(\lambda-1)} + 2$. 0,75pt
 - (b) Calculer l'aire $\mathcal{A}(0)$ du domaine $\mathcal{D}_0$ et calculer $\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} \mathcal{A}(\lambda)$ 0,5pt