



EPREUVE DE MATHÉMATIQUE

Exercice 1 : 5pts

I. L'expression analytique d'une application f du plan est :

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{3}(2x + y - z - 3) \\ y' = \frac{1}{3}(x + 2y + z + 3) \\ z' = \frac{1}{3}(-x + y + 2z - 3) \end{cases}$$

1. Justifier que f est une application affine. 0,5pt
2. Déterminer l'ensemble (P) des points invariants par f . 0,5pt
3. Justifier que pour tout point M de l'espace tel que $f(M) = M'$, si $M \notin (P)$ alors le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ a une direction fixe orthogonale à (P) . 0,5pt
4. Montrer que $f \circ f = f$ et donner la nature de f . 0,75pt

II. E est un espace vectoriel de dimension 3 muni d'une base $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On donne le vecteur $\vec{n} = \vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$, et f l'application de E dans E définie par :

$$\forall \vec{u} \in E, f(\vec{u}) = \vec{n} \wedge \vec{u}$$

1. Déterminer le noyau Kerf de f et l'ensemble image Imf de f . 1pt
2. Ecrire la matrice de f dans la base B . 0,5pt
3. Donner l'expression analytique de f . 0,5pt
4. Soit a un nombre réel, donner suivant les valeurs de a , l'ensemble $E_a = \{\vec{u} \in E ; f(\vec{u}) = a\vec{u}\}$ 0,75pt

Exercice 2 : 5pts

I - Une variable aléatoire X prend les valeurs 1 ; -2 et 3 avec les probabilités respectives $\ln \alpha$; $\ln \beta$ et $\ln \gamma$ où α , β et γ sont dans cet ordre les termes consécutifs d'une suite géométrique. On suppose l'espérance mathématique $E(X) = 1$.

- a. Déterminer α , β et γ . 0,75pt
- b. Calculer la variance $V(x)$. 0,5pt

II. Soit (Γ) un cercle de centre O , et A, C deux points diamétralement opposés sur ce cercle. On considère un point B de (Γ) distinct de A et de C . On lui associe le point D tel que le triangle CDB est équilatéral direct. On note G le centre de gravité du triangle CDB . Les droites (AB) et (CG) se coupent en un point M . Le but de cet exercice est de déterminer le lieu géométrique (χ) du point M lorsque B décrit le cercle (Γ) privé des points A et C .

1. Faire une figure. 0,5pt
2. a- Démontrer que les points O, G, D appartiennent à la médiatrice (Δ) de $[BC]$ 0,5pt
 b- Démontrer que (Δ) est parallèle à (AB) . 0,5pt
 c- En déduire que le point G est le milieu du segment $[CM]$. 0,5pt
3. Déterminer l'angle et le rapport de la similitude directe f de centre C , qui transforme B en M . Conclure en ce qui concerne l'ensemble (χ) . 0,75pt
4. a- Soit E le point tel que le triangle ACE est équilatéral direct. Démontrer que l'image par f du milieu I du segment $[AE]$ appartient à (χ) . 0,5pt
 b- Démontrer que l'image par f du point O est le centre de gravité du triangle ACE . En déduire une construction simple de (χ) . 1pt

Problème. 10 pts

Partie A : 3pts

On considère l'équation différentielle : (E) : $y'' + w^2y = 0$ ou w est un réel non nul.

1. Soit A et B des nombres réels. Vérifier que la fonction t définie dans $\mathbb{R}$ par $t(x) = A\cos wx + B\sin wx$ est solution de (E).

0,5pt

Soit z une autre solution de (E). On note $y = z(x) - z(0)\cos wx - \frac{1}{w}z'(0)\sin wx$

2. Démontrer que y est solution de (E).

0,5pt

3. Démontrer que $w^2y^2 + y'^2$ est une fonction constante.

0,5pt

4. Démontrer que $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$.

0,5pt

5. En déduire que y est la fonction nulle et établir que z est de la forme $A\cos wx + B\sin wx$ où A et B sont des constantes réelles.

1pt

Partie B : 2,5pts

Pour tout entier naturel non nul n , on pose : $U_n = \overbrace{111\dots11}^{n\text{-chiffres}}$. par exemple $U_4 = 1\,111$, c'est - à -

dire mille cent onze. De plus, on pose : $S_n(a) = a + \overbrace{aa}^{2\text{-chiffres}} + \dots + \overbrace{aaa\dots aa}^{n\text{-chiffres}}$,

où $a \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$. Par exemple $S_4(3) = 3 + 33 + 333 + 3\,333 = 3\,702$.

1) Décomposer U_n en une somme de puissances de 10. En déduire U_n en fonction de n . 0,5pt

2) Déterminer une expression de :

a) $S_n(1) = U_1 + U_2 + \dots + U_n$ en fonction de n .

0,5pt

b) $S_n(a)$ en fonction de n et a .

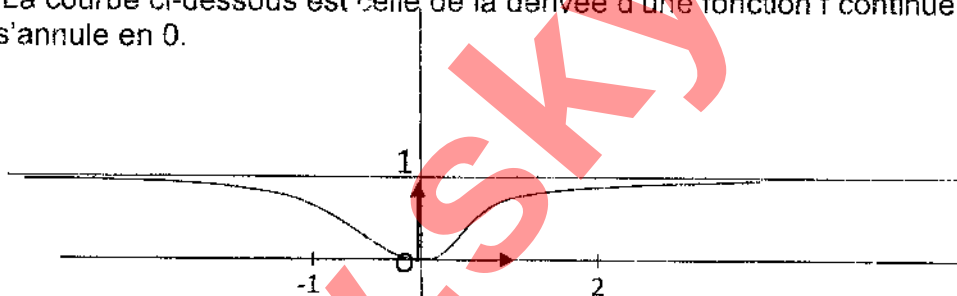
0,5pt

3) Déterminer $T_n = \sum_{i=1}^9 S_n(i)$ en fonction de $S_n(1)$, puis en fonction de n .

1pt

Partie C : 4,5pts

La courbe ci-dessous est celle de la dérivée d'une fonction f continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et qui s'annule en 0.



1. a. Quel est le sens de variation de f ?

0,25pt

b. On suppose qu'il existe deux réels α, β tels que $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \alpha + \frac{\beta e^x}{(1+e^x)^2}$

Déterminer α et β

0,5pt

c. En déduire l'expression de $f(x)$.

0,25pt

2. Dans la suite, on considère la fonction g définie dans $\mathbb{R}$ par : $g(x) = x - 2 + \frac{4}{1+e^x}$

a. Dresser le tableau de variation de g .

0,5pt

b. Etudier les branches infinies de la courbe de g puis tracer cette courbe dans le plan muni du repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

0,75pt

3. a. Calculer l'aire $\mathcal{A}(\alpha)$ de l'ensemble des points M du plan de coordonnées

$(x; y)$ tels que : $\begin{cases} 0 \leq x \leq \alpha \\ x - 2 \leq y \leq g(x) \end{cases} \quad (\alpha > 0)$

0,5pt

b. Calculer la limite de cette aire lorsque α tend vers $+\infty$.

0,25pt

4. Soit $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par : $I_n = \int_0^1 t^n \sqrt{1-t} dt$.

a. Calculer I_0 et à l'aide d'une intégration par parties, trouver une relation de récurrence entre I_n et I_{n+1}

0,75pt

b. Déduire une expression simple de I_n en fonction de n .

0,75pt