

*La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements
seront pris en compte dans l'appréciation des copies*

Exercice 1 : (7 points)

Partie A

La fonction f est définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par : $f(x) = (20x + 10)e^{-\frac{1}{2}x}$

On note C la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (unité graphique 1cm).

1. Étudier la limite de la fonction f en $+\infty$.
2. Étudier les variations de la fonction f et dresser son tableau de variations.
3. Établir que l'équation $f(x) = 10$ admet une unique solution strictement positive α dans l'intervalle $]0 ; +\infty[$.
Donner une valeur décimale approchée à 10^{-3} près de α .
4. Tracer la courbe C .
5. Calculer l'intégrale $I = \int_0^3 f(x) dx$.

Partie B

On note $y(t)$ la valeur, en degrés Celsius, de la température d'une réaction chimique à l'instant t , t étant exprimé en heures. La valeur initiale, à l'instant $t = 0$, est $y(0) = 10$.

On admet que la fonction qui, à tout réel t appartenant à l'intervalle $[0 ; +\infty[$ associe $y(t)$, est solution de

l'équation différentielle (E) : $y' + \frac{1}{2}y = 20e^{-\frac{1}{2}t}$.

1. Vérifier que la fonction f étudiée dans la **partie A** est solution de l'équation différentielle (E) sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

2. On se propose de démontrer que cette fonction f est l'unique solution de l'équation différentielle (E), définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$, qui prend la valeur 10 à l'instant 0.

a. On note g une solution quelconque de l'équation différentielle (E), définie sur $[0 ; +\infty[$ vérifiant $g(0) = 10$.
Démontrer que la fonction $g - f$ est solution, sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$, de l'équation différentielle :

(E') $y' + \frac{1}{2}y = 0$.

- b. Résoudre l'équation différentielle (E').
- c. Conclure.

3. Au bout de combien de temps la température de cette réaction chimique redescend-elle à sa valeur initiale ? Le résultat sera arrondi à la minute.

4. La valeur θ en degrés Celsius de la température moyenne à cette réaction chimique durant les trois premières heures est la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; 3]$. (On rappelle que la valeur moyenne d'une fonction f sur un intervalle $[a, b]$ est le réel $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$)

Calculer la valeur exacte de θ , puis donner la valeur approchée décimale de θ arrondie au degré.