

BACCALAUREAT GENERAL

Bac Blanc janvier/février 2003

MATHEMATIQUES

Série : S

Durée de l'épreuve : 4 heures – Coefficient : 7 ou 9 (spécialité)

Du papier est mis à la disposition des candidats
L'utilisation d'une calculatrice est autorisée

Le candidat doit traiter 2 exercices (suivant la spécialité) et le problème.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

EXERCICE 1 (5 points)

Commun à tous les candidats

Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 2cm.

On désigne par A et B les points d'affixes respectives 1 et 4.

L'application f associe à tout point M d'affixe z de P , distinct de A, le point M' d'affixe Z' défini par :

$$Z' = \frac{z - 4}{z - 1}$$

On complétera la figure au fur et à mesure des questions. (points, ensembles, ...)

1. Soit C le point d'affixe $i\sqrt{2}$. Déterminer la forme algébrique de l'affixe de $C' = f(C)$.
2. a) Démontrer que f admet deux points invariants I et J (On notera I celui d'ordonnée positive), puis donner leur l'écriture exponentielle.
b) Soit D, l'image du point C par la rotation de centre J et d'angle $-\frac{\pi}{2}$. Calculer l'affixe de D.
c) Montrer que CIDJ est un trapèze dont une hauteur est [CJ].
3. a) Donner une interprétation géométrique de $|Z'|$ et de $\arg(Z')$
b) En déduire l'ensemble Γ_1 des points M d'affixe z tels que $|Z'| = 1$.
c) Déterminer l'ensemble Γ_2 des points M d'affixe z tels que Z' soit réel.
d) Déterminer l'ensemble Γ_3 des points M d'affixe z tels que Z soit imaginaire pur.
4. On pose $z = x + iy$ et $Z' = X' + iY'$ avec x, y, X', Y' réels.
a) Déterminer X' et Y' en fonction de x et y .
b) En déduire les coordonnées de l'image du point de coordonnées $(0; \sqrt{2})$. Comparer avec le résultat de la question 1.

EXERCICE 2 (5 points)

Candidats n'ayant pas suivi la spécialité

- On désigne par g la fonction définie sur $I = [0 ; \pi]$ par :
$$g(x) = x \cos(x) - \sin(x)$$
 - Dresser le tableau de variations de la fonction g sur I
 - En déduire le signe de $g(x)$ sur I .
- Soit f la fonction définie ci-dessous sur $[0 ; \pi]$. Etudier les variations de f sur $[0 ; \pi]$

$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(x) = \frac{\sin(x)}{x} \text{ si } x \neq 0 \end{cases}$$

- Dans cette question, on veut étudier la dérivabilité de f en 0.
 - Prouver que, pour tout réel $x \geq 0$:

$$x - \frac{x^3}{6} \leq \sin(x)$$

Pour cela, on introduira la fonction φ définie sur $[0 ; \pi]$ par : $\varphi(x) = \sin(x) - x + \frac{x^3}{6}$

Puis on déterminera les dérivées successives de φ : φ' , φ'' et φ''' , dont on étudiera leur signe et leurs variations.

- En introduisant une autre fonction, prouver que pour tout réel $x \geq 0$:

$$\sin(x) \leq x$$

- En déduire un encadrement de $\sin(x) - x$ pour tout réel $x \geq 0$.
- En utilisant le résultat précédent, prouver que f est dérivable en 0 et calculer $f'(0)$.

EXERCICE 2 (5 points)

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Soit n un entier naturel non nul.

On considère les deux entiers : $A = 7n^2 + 13n - 20$ et $B = 2n^2 + 5n - 7$.

- Calculer PGCD ($A ; B$) lorsque $n = 10$ puis lorsque $n = 11$.
- Prouver que A et B sont tous les deux divisibles par $n - 1$.
 - Existe-t-il des valeurs de n telles que A soit un nombre premier ?
- On pose : $a = 7n + 20$ et $b = 2n + 7$.
 - Calculer PGCD ($a ; b$) lorsque $n = 10$ puis lorsque $n = 11$.
 - Montrer que PGCD ($a ; b$) divise 9.
 - Vérifier que : $7n + 20 = 3(2n + 7) + (n - 1)$
et que : $2n + 7 = 2(n - 1) + 9$.
 - Montrer alors que : PGCD ($a ; b$) = PGCD ($n - 1 ; 9$).
 - Déduire des questions précédentes la valeur de PGCD ($a ; b$) en fonction des valeurs de n .
- Conclure de tout ce qui précède la valeur de PGCD ($A ; B$) en fonction des valeurs de n .
 - Vérifier que la réponse à la question précédente permet de retrouver les résultats établis à la question 1.

PROBLEME (10 points)

Commun à tous les candidats

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x - (x^2 + 4x + 3)e^{-x}$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé

$(O, \vec{i}, \vec{j})$, d'unité graphique est 2 cm.

On pourra utiliser les résultats suivants :

pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^n e^{-x}) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^n e^x) = 0$

PARTIE A

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = (x^2 + 2x - 1)e^{-x} + 1$

1. Étudier les limites de g en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. Calculer $g'(x)$ et montrer que $g'(x)$ et $(3 - x^2)$ ont le même signe. En déduire l'existence éventuelle d'asymptotes à la courbe (C).
3. En déduire le tableau de variation de g .
4. a) Calculer $g(0)$. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet deux solutions dans $\mathbb{R}$. On note α la solution non nulle.
b) Donner un encadrement de α à 10^{-2} près
5. En déduire le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

PARTIE B

1. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. a) Montrer que, pour tout réel x , $f'(x) = g(x)$.
b) Dresser le tableau de variation de la fonction f .
3. Donner l'équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 1.
4. a) Démontrer que la droite (D), d'équation $y = x$, est asymptote à la courbe (C) en $+\infty$.
b) Étudier la position relative de la courbe (C) et de la droite (D).
5. Construire la courbe (C) et les droites (D) et (T).

PARTIE C

Soit $F(x) = \frac{x^2}{2} - (ax^2 + bx + c)e^{-x}$

Déterminer les réels a, b et c tels que $F'(x) = f(x)$.

(La fonction F est appelée primitive de la fonction f)