

EXAMEN BLANC – EPREUVE DE :
MATHEMATIQUES SERIE : C-E-
DUREE : 4H

UN SOIN PARTICULIER SERA APORTE A LA QUALITE DE VOTRE COPIE ET A VOTRE REDACTION QUI ENTRERONT EN COMPTE POUR LA NOTE FINALE.

EXERCICE N°1 : il a pour but de montrer que p est premier si et seulement si p divise C_p^k pour $k = 1, 2, \dots, p-1$.

Soit p un entier naturel tel que $p \geq 2$. On suppose que pour $k = 1, 2, \dots, p-1$, p divise C_p^k .

1. A l'aide de la définition C_p^k , montrer par récurrence sur k que, pour $1 \leq k \leq p-1$ on a : $C_{p-1}^k \equiv (-1)^k \pmod{p}$.
2. On suppose p non premier.
 - a) Prouver qu'il existe un diviseur s de p tel que $1 \leq s-1 \leq p-1$ et déduire de la question précédente que : $C_{p-1}^{s-1} \equiv (-1)^{s-1} \pmod{p}$.
 - b) On pose $p = s \times q$ ($q \geq 1$) montrer que $k \times C_p^k = p \times C_{p-1}^{k-1}$. puis montrer alors que $C_p^s = q \times C_{p-1}^{s-1}$ et en déduire que : $q \times (-1)^{s-1} \equiv 0 \pmod{p}$.
3. conclure.

EXERCICE N°2

Soit P un plan orienté rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. soit f l'application de P

dans P qui à $M(z)$ associe $M'(z')$, définie par : $z' = \left(2e^{\frac{i\pi}{6}} \bar{z} - 3\sqrt{2}e^{\frac{-i\pi}{4}} \right)$.

1. On pose $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$. Ecrire x' et y' en fonction de x et de y .
2. Montrer qu'il existe un réel k tel que, quel que soit A et B dans P d'image A' et B' on ait : $\left\| \overrightarrow{A'B'} \right\| = k \cdot \left\| \overrightarrow{AB} \right\|$.
3. Montrer que f n'est pas une similitude directe.
4. Montrer que f a un point invariant I et un seul que l'on déterminera.
5. Montrer qu'il existe une homothétie h de centre I et une droite (D) passant par I telles que : $f = h \circ S_D = S_D \circ h$.

PROBLEME :

Le problème a pour objet l'étude d'une famille de fonction suivant la parité de n , de construire deux courbes particulières et enfin d'obtenir à partir de suites définies à l'aide de ces fonctions des limites remarquables.

Pour tout entier naturel, on définit sur $\mathbb{R}$ les fonctions f_n par :
$$\begin{cases} f_0 = e^x & \text{et} \\ f_n(x) = \frac{(1-x)^n}{n!} e^x & n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

On désigne par C_n la courbe représentative de la fonction f_n dans le plan rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$ unité 2cm.

Partie A

I) Etude de f_n pour $n \geq 1$.

- 1) Déterminer suivant la parité de n , les limites de f_n dans son ensemble de définition.
- 2) Etudier suivant la parité de n , le sens de variation de f_n et dresser les tableaux de variations correspondants.
- 3) Etudier suivant la parité de n , les positions relatives des courbes (C_n) et (C_{n+1})

II) tracé et calcul d'aire.

- 1) a- Dresser les tableaux de variations de f_1 et f_2 .
b- Préciser les positions des courbes (C_1) et (C_2) et les construire.
- 2) Vérifier que pour tout réel x on a : $f_2'(x) = f_2(x) - f_1(x)$, en déduire en cm^2 l'aire du domaine plan limité par ces deux courbes et les droites d'équations $x = 1$ et $x = -1$

Partie B

Pour tout entier naturel n , on pose $U_n = \int_1^2 f_n(x) dx$.

$$e^2 = e^{2|1|}$$

1) a- Montrer que $U_n = \frac{(-1)^n}{n!} \int_1^2 (x-1)^n e^x dx$.

b- Etablir que $0 \leq \int_1^2 (x-1)^n e^x dx \leq e^2$ et en déduire que $|U_n| \leq \frac{e^2}{n!}$ pour tout entier naturel n .

c- Déterminer alors la limite de U_n .

2) a- Démontrer que pour tout $n \geq 1$ on a : $f_n'(x) = f_n(x) - f_{n-1}(x)$

b- En déduire que pour tout entier naturel non nul n et pour tout réel x on a : $f_n(x) = f_0'(x) + f_1'(x) + \dots + f_n(x)$

Partie C

Soit a un réel fixé tel que : $0 \leq a < 1$ et soit la suite (V_n) définie par : $V_n = \int_a^1 f_n(x) dx$.

1) Calculer V_0 .

2) Démontrer que pour tout entier naturel on a : $0 \leq V_n \leq \frac{(1-a)^{n+1}}{n!} \times V_0$ et déduire que la suite (V_n) converge vers 0.

3) a- Etablir que pour $n \geq 0$ on a : $V_{n+1} = V_n - \frac{(1-a)^n}{(n+1)!} \times e^a$.

b- En déduire que pour $n \geq 0$ on a : $V_n = e - e^a \left[\frac{(1-a)^0}{0!} + \frac{(1-a)^1}{1!} + \dots + \frac{(1-a)^n}{n!} \right]$

4) Pour $n \geq 0$ on pose : $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{(1-a)^k}{k!}$ calculer la limite de S_n .

5) Pour

$$n \geq 0 \text{ on pose } A_n = \frac{1}{2^0 \times 0!} + \frac{1}{2^1 \times 1!} + \frac{1}{2^2 \times 2!} + \dots + \frac{1}{2^n \times n!} \text{ et } B_n = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}$$

Calculer les limites de (A_n) et (B_n) .

Barème :

- Exercice 1 : 4 points.
- Exercice 2 : 5 points.
- Problème : 11 points.

Baccalauréat Blanc / Avril 2006	
Epreuve de Mathématiques	Série : C
Durée : 4 heures	Coefficient : 5

Exercice 1 (5 points)

- On considère l'équation (E) : $6x + 7y = 57$ où x et y sont des entiers relatifs.
 - Déterminer un couple d'entiers relatifs (u, v) tel que $6u + 7v = 1$; en déduire une solution particulière (x_0, y_0) de l'équation (E).
 - Déterminer les couples d'entiers relatifs solutions de l'équation (E).
- Soit $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormé de l'espace.
On considère le plan $\mathcal{P}$ d'équation : $6x + 7y + 8z = 57$.
On considère les points du plan $\mathcal{P}$ qui appartiennent aussi au plan $(O, \vec{i}, \vec{j})$
Montrer qu'un seul de ces points a pour coordonnées des entiers naturels ; déterminer les coordonnées de ce point.
- On considère un point M du plan $\mathcal{P}$ dont les coordonnées x, y et z sont des entiers naturels.
 - Montrer que l'entier y est impair.
 - On pose $y = 2p + 1$ où p est un entier naturel.
Montrer que le reste dans la division euclidienne de $p + z$ par 3 est égal à 1.
 - On pose $p + z = 3q + 1$ où q est un entier naturel.
Montrer que les entiers naturels x, p et q vérifient la relation $x + p + 4q = 7$.
En déduire que q prend les valeurs 0 ou 1.
 - En déduire les coordonnées de tous les points de $\mathcal{P}$ dont les coordonnées sont des entiers naturels.

EXERCICE 2 (5 points)

Dans le plan $\mathcal{P}$ rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$, T désigne l'application qui, à tout point M d'affixe z , fait correspondre le point M' d'affixe z' tel que : $z' = -iz + 1$.

- Montrer que $T \circ T$ est une translation dont précisera le vecteur.
- Soit t la translation de vecteur $\frac{1}{2}(\vec{u} - \vec{v})$.
 - Montrer que $T \circ t^{-1} = t^{-1} \circ T = s$, s étant une symétrie orthogonale par rapport à une droite $\mathcal{D}$ que l'on précisera.
 - En déduire que $T = t \circ s = s \circ t$.
- Soit k la translation de vecteur $\vec{u}$, r la rotation de centre O dont une mesure de l'angle est $\frac{\pi}{2}$, σ la symétrie par rapport à la droite $(O, \vec{u})$.
 - Démontrer que $T = k \circ r \circ \sigma$. En déduire que $T = k \circ S$ où S est une symétrie par rapport à une droite Δ à préciser.
 - A l'aide du 2., démontrer que $s = h \circ S$ où h est une translation de vecteur $\frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v})$.
 - Retrouver géométriquement l'axe $\mathcal{D}$ de s .

Problème (10 points)

À tout entier naturel non nul n , on associe la fonction f_n définie sur $] -1, +\infty[$ par :

$$f_n(x) = x^n \ln(1+x).$$

On désigne par $(\mathcal{C}_n)$ la courbe représentative de f_n dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 2 cm.

Partie A : étude des fonctions f_n

Soit h_n la fonction définie sur $] -1, +\infty[$ par : $h_n(x) = n \ln(1+x) + \frac{x}{1+x}$.

1. a) Étudier le sens de variation de h_n .
b) Calculer $h_n(0)$ et déterminer le signe de $h_n(x)$ suivant les valeurs de x .
2. a) Pour x appartenant à $] -1, +\infty[$, vérifier que $f'_1(x) = h_1(x)$.
b) Montrer que pour tout entier $n > 1$ et pour tout réel $x > -1$,
$$f'_n(x) = x^{n-1} h_n(x).$$
3. On suppose que n est impair. Dresser le tableau de variations de f_n en déterminant ses limites en -1 et $+\infty$.
4. On suppose que n est pair. Dresser de même le tableau de variations de f_n en déterminant ses limites en -1 et $+\infty$.
5. a) Étudier la position relative des courbes $(\mathcal{C}_1)$ et $(\mathcal{C}_2)$.
b) Tracer ces deux courbes dans le même repère.

Partie B : étude d'une suite d'intégrales

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie pour tout entier naturel n non nul par :

$$u_n = \int_0^1 x^n \ln(1+x) dx.$$

1. Étude de la convergence.
a) Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq u_n \leq \frac{\ln 2}{n+1}$.
b) En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente et donner sa limite.
2. Calcul de u_1

a) En remarquant que $\frac{x^2}{1+x} = x - 1 + \frac{1}{1+x}$, calculer $\int_0^1 \frac{x^2}{1+x} dx$.

b) Calculer u_1 au moyen d'une intégration par parties.

3. Calcul de u_n

Pour tout entier $n \geq 2$ et pour tout réel x de $] 0 ; 1]$, on pose :

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^k \quad (1).$$

a) Justifier que $S_n(x) = \frac{1}{1+x} - (-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{1+x} \quad (2).$

b) En intégrant successivement les égalités (1) et (2), établir l'égalité :

$$\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln 2 - (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx.$$

c) En utilisant une intégration par parties et le résultat précédent, démontrer que

$$u_n = \frac{\ln 2}{n+1} - \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} \left(\ln 2 - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1} \right).$$



BAC BLANC 2007

Mathématiques

Série C Coeff. : 5

Durée : 4 heures

Exercice 1 (5 points)

Dans le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ on considère la droite $(\mathcal{D})$ d'équation $y = \frac{1}{2}x$, la symétrie S d'axe $(\mathcal{D})$ et de direction celle de l'axe (OJ) .

Soit g l'application affine de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ qui au point $M(x; y)$ associe le point $M'(x'; y')$ tel que :

$$\begin{cases} x' = -\frac{1}{2}x + 1 \\ y' = -\frac{3}{4}x + y + \frac{1}{2} \end{cases}$$

1. Montrer que g est bijective et vérifier que $g \circ S = S \circ g$.
2. Déterminer l'ensemble (Δ) des points M de $\mathcal{P}$ invariants par g .
3. Montrer que, si M n'est pas invariant par g , la droite (MM') garde une direction indépendante de M que l'on précisera.
4. Calculer les coordonnées du point H intersection de (MM') et de (Δ) .
5. Montrer que g est une affinité dont on donnera les éléments caractéristiques.

Exercice 2 (5 points)

Les suites d'entiers naturels (x_n) et (y_n) sont définies sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} x_0 = 3 \\ x_{n+1} = 2x_n - 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} y_0 = 1 \\ y_{n+1} = 2y_n + 3 \end{cases}$$

1. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n : $x_n = 2^{n+1} + 1$.
2. a) Calculer le PGCD (x_8, x_9) et le PGCD (x_{2002}, x_{2003}) .
Que peut-on en déduire pour x_8 et x_9 d'une part, pour x_{2002} et x_{2003} d'autre part.
b) x_n et x_{n+1} sont-ils premiers entre eux pour tout entier naturel n ?
3. a) Démontrer que pour tout entier naturel n , $2x_n - y_n = 5$.
b) Exprimer y_n en fonction de n .
c) En utilisant les congruences modulo 5, étudier suivant les valeurs de l'entier naturel p , le reste de la division euclidienne de 2^p par 5.

d) On note d_n le PGCD(x_n, y_n) pour tout entier naturel n .

Démontrer que l'on a $d_n = 1$ ou $d_n = 5$; en déduire l'ensemble des entiers naturels tels que x_n et y_n soient premiers entre eux.

Problème (10 points)

Partie A

On considère les fonctions numériques f_m de variable x définies par : $f_m(x) = e^x - m(x+1)$ où m est un paramètre réel. On désigne par $(\mathcal{C}_m)$ la courbe de f_m dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 2 cm.

1. Etudier les variations de la fonction f_1 et tracer avec soin sa représentation graphique. On précisera l'asymptote à la courbe $(\mathcal{C}_1)$.

2. Soit la droite (Δ_1) d'équation $y = -x - 1$. Calculer en cm^2 l'aire $\mathcal{A}(\alpha)$ de la portion du plan limitée par $(\mathcal{C}_1)$, (Δ_1) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \alpha$ (où α est un réel négatif).

Etudier la limite de $\mathcal{A}(\alpha)$ quand α tend vers $-\infty$.

3. Pour tout entier naturel n , on désigne par D_n le domaine limité par $(\mathcal{C}_1)$, (Δ_1) et les droites d'équations $x = -n - 1$ et $x = -n$.

a) Calculer en cm^2 l'aire A_n du domaine D_n .

b) Montrer que la suite (A_n) est une suite géométrique dont on déterminera le premier terme et la raison.

c) Calculer $S_n = A_0 + A_1 + \dots + A_n$. En déduire la limite de S_n lorsque n tend vers $+\infty$.

4. Etudier suivant les valeurs m les variations de la fonction f_m . On précisera les limites de f_m aux bornes de son ensemble de définition.

5. Montrer que toutes les courbes $(\mathcal{C}_m)$ passent par un point fixe B .

6. Montrer que la droite (Δ_m) : $y = -mx - m$ est asymptote à $(\mathcal{C}_m)$ et déterminer la position de $(\mathcal{C}_m)$ par rapport à (Δ_m) .

Partie B

A tout point M du plan d'affixe $z = x + iy$, on associe par une transformation T , le point M' d'affixe $z' = x' + iy'$ tel que $z' = (1 - i)z + 1 + i$.

1. Quelle est la nature de la transformation T ? Déterminer ses éléments caractéristiques.

2. Définir analytiquement la transformation T .

3. M étant un point de $(\mathcal{C}_1)$, déterminer en fonction de x , abscisse de M , les coordonnées de M' transformé de M par T .

4. Déterminer l'ensemble (Γ) , image par T de la courbe $(\mathcal{C}_1)$.

Partie C

On considère la fonction numérique h de la variable réelle x définie par : $h(x) = x - \ln(x^2)$.

1. Etudier les variations de h et tracer sa courbe $(\mathcal{C}')$ dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Préciser les branches infinies de $(\mathcal{C}')$.

2. Démontrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une seule solution dont on donnera un encadrement d'amplitude 10^{-1} .

3. Tracer (Γ) dans le même repère que $(\mathcal{C}')$. On pourra utiliser une autre couleur.

BACCALAUREAT BLANC : SESSION D'AVRIL – MAI 2007
EPREUVE DE MATHEMATIQUES

SERIE : C

DUREE : 4 HEURES

COEFFICIENT : 5

EXERCICE 1

Dans le plan orienté, on considère un carré ABCD de centre O et de sens direct c'est – à – dire

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{2} [2\pi].$$

On désigne par :

r le quart de tour direct de centre A ;

t la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$;

h l'homothétie de centre C et de rapport $\sqrt{3}$

1. a. Prouver que $R' = tor$ est une rotation dont on précisera l'angle.

b. Déterminer les images par R' de A et B. En déduire le centre de R' .

2. On se propose d'étudier la transformation $f = R'oh$

a. Montrer que f est une similitude directe dont on précisera le rapport et l'angle.

b. Soit I le centre de f. Déterminer l'image de C par f.

Montrer que $(\overrightarrow{IC}, \overrightarrow{ID}) = \frac{\pi}{2} [2\pi]$ et $ID = \sqrt{3} IC$

c. Déterminer et construire sur une figure claire et nette, l'ensemble Γ des points M du plan tels que $(\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MD}) = \frac{\pi}{2} [2\pi]$

Donner une mesure de $(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CI})$. Placer I sur la figure.

d. En remarquant que : $MD^2 - 3MC^2 = (\overrightarrow{MD} - \sqrt{3} \overrightarrow{MC})(\overrightarrow{MD} + \sqrt{3} \overrightarrow{MC})$, prouver que l'ensemble Γ' des points M du plan tels que $MD^2 - 3MC^2 = 0$ est un cercle dont on précisera le centre G et le rayon. Construire Γ' et vérifier qu'il passe par I.

EXERCICE 2

On considère l'intégrale suivante : $I_{n,k} = \int_0^1 x^k (1-x)^{n-k} dx$ où n et k sont des nombres entiers naturels tels que $n \geq k$.

1. Montrer que $C_n^k = \frac{n \times (n-1) \times \dots \times (n-k+1)}{1 \times 2 \times 3 \times \dots \times k}$ où C_n^k désigne les combinaisons de k éléments parmi n éléments.

2. Calculer l'intégrale $I_{n,0}$.

3. Trouver une relation entre $I_{n,k}$ et $I_{n,k-1}$. En déduire que $I_{n,k} = \frac{1}{(n+1)C_n^k}$.

4. Calculer l'intégrale $J = \int_0^1 (n+1) C_n^k x^k (1-x)^{n-k} dx$ et $\int_0^1 x^k (1-x)^2 dx$

5. On considère la suite (U_n) définie par : $U_0 = 1$ et $U_n = \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{C_n^k} \right)$ pour $n > 0$.

a. Démontrer que $U_n = 2 + \frac{2}{n} + \sum_{k=2}^{n-2} \left(\frac{1}{C_n^k} \right)$.

b. On admet que $C_n^k \geq \frac{n(n-1)}{2}$ pour tout k tel que $2 \leq k \leq n-2$. Dédurre un encadrement de U_n puis calculer la limite de (U_n) .

c. On pose $V_n = \sum_{k=0}^n I_{n,k}$. Déterminer la limite de (V_n)

PROBLEME

$(O; \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormé direct du plan. On donne les points $A(1; 0)$ et $B(-1; 0)$.
A tout point M du plan de coordonnées $(x; y)$; on associe le nombre complexe $z = x + iy$,
affixe de M .

1. T est l'application qui, à tout point M d'affixe z , associe le point M_1 d'affixe z_1 telle que :

$$Z_1 = iz - (i+1)$$

a. Préciser la nature géométrique de l'application T .

b. Quel est l'ensemble des points M_1 lorsque M décrit le cercle de diamètre $[AB]$?

Construire cet ensemble

2. λ est un réel donné non nul. T_λ est l'application qui, à tout point M d'affixe z , associe le point M' barycentre de $(M; \lambda)$, $(M_1; -\lambda)$, $(A; 1)$

a. Démontrer que l'affixe z' de M' est telle que :

$$Z' = \lambda(1-i)z + \lambda(1+i) + 1$$

b. Démontrer que T_λ est une similitude directe dont on donnera l'affixe du centre, le rapport et l'angle.

c. Pour quelles valeurs de λ , T_λ est-elle une rotation ? Donner dans ce cas son angle et l'affixe de son centre.

d. Exprimer les coordonnées $(x'; y')$ de M' en fonction des coordonnées (x, y) de M .

3. Le nombre λ étant strictement positif, on lui associe le point $P(-\ln \lambda; \ln \lambda)$ et le point $P' = T_\lambda(P)$.

a. Exprimer les coordonnées de P' en fonction de λ .

b. Démontrer que, lorsque λ décrit $\mathbb{R}^*_+$, l'ensemble des points P' est la courbe (C) d'équation :

$$y = 2(x-1)\ln(x-1) + (x-1).$$

4. f est la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = 2x\ln x + x \text{ pour } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

a. f est-elle dérivable en 0 ? Que peut-on en déduire ?

b. Etudier la fonction f et préciser le réel $x_0 \neq 0$ tel que $f(x_0) = 0$

c. Représenter graphiquement f dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, l'unité de longueur étant 10 cm

Par quelle transformation du plan la courbe (C) se déduit-elle de la courbe Γ représentant f ?

d. Calculer : $I(\alpha) = \int_{\alpha}^{x_0} (2x\ln x + x) dx$, x_0 étant le réel trouvé dans la question 3.b) et α un réel de l'intervalle $]0; x_0[$.

La fonction $\alpha \mapsto I(\alpha)$ admet-elle une limite en 0 ? En déduire l'aire A du domaine du plan limité par la courbe Γ et l'axe ; $(O; \vec{i})$.

Exprimer A en cm^2 à 10^{-2} près



MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE

LYCÉE Joseph AMBOUROUE-AVARO

Tél : 55 21 73 FAX : 55 12 02 BP : 236 PORT-GENTIL

REPUBLIQUE GABONAISE
UNION - TRAVAIL - JUSTICE

DEVOIR DE MATHS N°5

Serie : C&E

Durée : 4h

Coeff : 5

EXERCICE 1. (4 points)

- 1° a) Résoudre l'équation différentielle $y'' + 4y' + 4y = 0$.
b) Déterminer la solution g vérifiant $g(0) = 1$ et $g'(0) = 0$.
- 2° a) Justifier l'existence du réel : $I = \int_0^1 (2x + 1)e^{-2x} dx$
b) Calculer I à l'aide d'une intégration par parties.
- 3° Soit la fonction f définie par $f(x) = (2x + 1)e^{-2x}$
a) Montrer que f est décroissante sur l'intervalle $[0; 1]$.
b) En déduire les encadrements :
(i) $\frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x) dx \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$, $0 \leq k \leq n-1$.
(ii) $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \leq I \leq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$.
- c) Déterminer la limite $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$ quand n tend vers $+\infty$.

EXERCICE 2 (5 points)

Soient les fonctions f et g définies sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x} - \ln(x)$ et $g(x) = \frac{1}{3} [x + 2e^{\frac{1}{x}}]$.

- 1° a) Etudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.
b) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α et que $1,7 \leq \alpha \leq 1,8$.
c) Prouver que l'équation $g(x) = x$ équivaut à l'équation $f(x) = 0$.
- 2° a) Calculer la dérivée g' de g . Prouver que g' est croissante.
b) Calculer $g'(1,7)$ et $g'(1,8)$. En déduire que : Pour tout x élément de $K = [1,7; 1,8]$ $I g'(x) \leq \frac{1}{10}$.
c) Prouver g est décroissante sur K .
d) Calculer $g(1,7)$, $g(1,8)$ et en déduire que $g(K) \subset K$.
e) Montrer que : Pour tout x élément de K , $I g(x) - \alpha I \leq \frac{1}{10} I x - \alpha I$.
- 3° Soit (U_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $U_0 = 1,8$ et la relation de récurrence $U_{n+1} = g(U_n)$.
a) Montrer que $U_n \in K$ pour tout n .
b) Prouver que : $I U_{n+1} - \alpha I \leq \frac{1}{10} I U_n - \alpha I$ pour tout n .
c) Démontrer par récurrence que $I U_n - \alpha I \leq \frac{1}{10^n}$ pour tout n élément de $\mathbb{N}$.
d) Montrer que la suite (U_n) est convergente et préciser sa limite.
- 4° Déterminer une valeur approchée de α à la précision de 10^{-6} .

(1/2)



PROBLEME (11 points)

Partie A

Le plan P est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On désigne par f l'application de P vers P d'expression analytique
$$\begin{cases} x' = x \ln a - y \ln b \\ y' = x \ln b + y \ln a + 3 \end{cases} \quad \text{où } a \text{ et } b \text{ sont deux réels strictement positifs.}$$

1° a) Déterminer l'écriture complexe de f .

b) Pour quelles valeurs du couple $(a; b)$ l'application f est-elle une transformation du plan ?

2° Le couple $(a; b)$ désigne les coordonnées d'un point N du plan.

a) Déterminer l'ensemble (E) des points N pour lesquels f est une homothétie.

b) Déterminer l'ensemble (F) des points N pour lesquels f est une translation.

c) Déterminer une équation cartésienne de l'ensemble (E') des points $N(a; b)$ pour lesquels f est une rotation.

Partie B Soit S l'application du plan dans lui-même d'expression analytique :
$$\begin{cases} x' = x - y \\ y' = x + y + 3 \end{cases}$$

1° a) Dédurre de la partie A, que S est une transformation du plan.

b) Donner l'expression complexe de S . En déduire la nature et les éléments caractéristiques de S .

2° O étant l'origine du repère, on considère la rotation R de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{2}$ et on pose : $f = R \circ S$.

a) Déterminer l'écriture complexe de f . En déduire la nature et les éléments caractéristiques de f .

b) Quelle est l'image par f du point d'affixe -3 ?

3° Soit g l'application qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = \frac{\sqrt{2}}{2}(\bar{z} - i)$.

a) Donner l'écriture complexe de $h = g \circ S$.

b) Quelle est la nature de h ? Montrer que h est une symétrie glissée dont on déterminera l'axe vecteur.

Partie C : Soit g l'application de P vers P d'expression analytique
$$\begin{cases} x' = e^x \\ y' = e^y \end{cases}$$

et (C) le cercle de centre O et de rayon 1.

1° L'application g est-elle une transformation du plan ? Justifier votre réponse.

2° Vérifier que l'image par g de (C) est (E') .

3° (E_1) et (E_2) sont les courbes représentatives dans le plan des fonctions f_1 et f_2 définies sur $[\frac{1}{e}; e]$ par $f_1(x) = e^{\sqrt{1-\ln^2 x}}$ et $f_2(x) = e^{-\sqrt{1-\ln^2 x}}$.

a) Etudier les variations de f_1 et f_2 .

b) Construire (E_1) et (E_2) sur le même graphe.

c) Montrer que $(E') = (E_1) \cup (E_2)$.



BAC BLANC Avril 2005
 Epreuve de MATHÉMATIQUES

Série : C
 Durée : 4h
 Coeff : 4

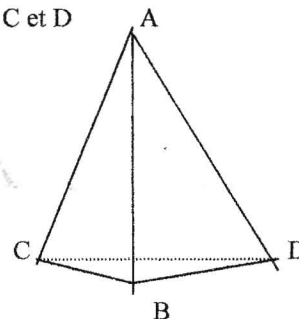
EXERCICE 1 (4 points)

Partie A

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points A, B, C et D de coordonnées respectives :

$$A(0; 0; 3), B(2\sqrt{2}; 0; -1), C(-\sqrt{2}; -\sqrt{6}; -1), D(-\sqrt{2}; \sqrt{6}; -1).$$

- 1°) a) Démontrer que ABCD est un tétraèdre régulier, c'est-à-dire un tétraèdre dont toutes les arêtes ont la même longueur.
 b) Calculer son volume V.
- 2°) On note R, S, T et U les milieux respectifs des arêtes [AC], [AD], [BD] et [BC]; démontrer que RSTU est un parallélogramme de centre O.
- 3°) Ce parallélogramme a-t-il des propriétés supplémentaires ? Expliquer.



Partie B

On dispose de trois tétraèdres identiques au précédent, parfaitement équilibrés. Chacun d'eux a une face peinte en bleu, une face peinte en jaune et deux faces peintes en rouge.

On lance les trois tétraèdres simultanément (on remarquera que, lorsqu'on lance un tel tétraèdre, une seule face est cachée et trois faces sont visibles).

- 1°) Calculer la probabilité pour qu'au moins trois faces rouges soient visibles sur les trois tétraèdres.
- 2°) Calculer la probabilité pour que la couleur bleue ne soit visible sur aucun tétraèdre.
- 3°) Calculer la probabilité de l'événement E : « les six faces rouges sont visibles ».
- 4°) On répète n fois l'expérience qui consiste à lancer les trois tétraèdres. Calculer la probabilité p_n pour que l'événement E soit réalisé au moins une fois. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n$.

EXERCICE 2 (5 points)

Dans le plan orienté, on considère deux carrés de sens direct ABCD et AEFG tels que : $AB = AE = a$ et $(\vec{AE}, \vec{AD}) = -\frac{\pi}{3}$.

Soit K le point tel que DAEK soit un parallélogramme : on appellera I son centre.

Partie I :

En utilisant les isométries vectorielles, on veut montrer que $AK = GB$ et que les droites (AK) et (GB) sont perpendiculaires et que le triangle FKC est rectangle isocèle en K.

On désigne par ρ la rotation vectorielle d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

- 1°) a) Démontrer que l'on a : $\vec{AK} = \vec{AD} + \vec{GF}$.
 b) Démontrer que l'on a : $\rho(\vec{AD}) = \vec{AB}$ et $\rho(\vec{GF}) = \vec{GA}$. En déduire alors que $\rho(\vec{AK}) = \vec{GB}$.
 c) Que peut-on en conclure ?
- 2°) a) Démontrer que l'on a : $\vec{KF} = \vec{DA} + \vec{EF}$.
 b) Démontrer que $\rho(\vec{KF}) = \vec{CK}$ puis conclure.

Partie II :

Soit s la similitude directe qui transforme A en G et K en F.

- 1°) a) Démontrer que le triangle EAD est équilatéral et que EADK est un losange.

b) Déterminer l'angle et le rapport de la similitude s.

- 2°) On cherche à construire son centre que l'on notera O.

a) Soit J le point tel que AGJ soit un triangle équilatéral de sens direct.

Quel est l'ensemble (C) des points M tels que $(\vec{MA}, \vec{MG}) = \frac{\pi}{6} [2\pi]$?

b) Soit P le barycentre du système de points pondérés $\{(G, 3); (A, -1)\}$.

Démontrer que l'ensemble (C') des points M du plan tels que $\frac{MG}{MA} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ est le cercle de centre P est de rayon $AI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

c) En déduire la construction du point O.

PROBLEME (11 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$. L'unité choisie est le centimètre.

Partie A

1°) Soit (h) la conique d'équation $y^2 - x^2 = 16$ dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Quelle est la nature de (h) ?

On note A le sommet de (h) d'ordonnée positive. Tracer (h).

2°) On pose : $z = x + iy$, $z' = x' + iy'$, $z'' = x'' + iy''$ où x, x', x'', y, y', y'' sont des réels.

Soit R l'application du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' définie par : $z' = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)z$.

Démontrer que R est une rotation dont on précisera le centre et l'angle.

3°) Soit S l'application du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M'' d'affixe z'' définie par : $z'' = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)\bar{z}$.

a) Démontrer que l'ensemble des points invariants par S est la droite (D) d'équation : $y = (\sqrt{2}+1)x$.

b) Démontrer que $S = \text{RoS}_{(OJ)}$ où J est le point de couple de coordonnées (0 ; 1).

c) Dédire de ce qui précède, la nature de S.

4°) a) Vérifier que : $R(A) = S(A)$. On notera A' ce point.

b) Démontrer que (D) coupe (h) en deux points E et F.

5°) a) Démontrer que les coordonnées de M, M', M'' vérifient : $x'y' = x''y'' = \frac{1}{2}(y^2 - x^2)$.

b) En déduire que (h) a la même image par R et S. On appelle (H) cette image.

Donner la nature et une équation de (H) dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

6°) a) Expliquer pourquoi E et F appartiennent à (H).

b) Construire sur la même figure la courbe (h), les points A et A', la droite (D) et la courbe (H).

Partie B

1°) On note (h+) l'ensemble des points de (h) d'ordonnées positives.

a) Démontrer que (h+) est la courbe représentative de la fonction $f : x \rightarrow \sqrt{x^2+16}$ dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

b) Soit N un point de (h+) d'abscisse x positive. On note $U(x)$ l'aire de la partie (Δ) du plan, limitée par la courbe (h+) et les

segments [OA] et [ON]. Démontrer que, pour tout réel positif ou nul x : $U(x) = \int_0^x \sqrt{t^2+16} dt = \left(\frac{x\sqrt{x^2+16}}{2} \right)$.

On ne cherchera pas à calculer $U(x)$.

c) Pour tout réel positif ou nul x , on pose : $G(x) = 8\ln(x + \sqrt{x^2+16})$.

Prouver que U et G ont la même fonction dérivée sur $[0; +\infty[$. Calculer $U(0)$ et $G(0)$.

En déduire que pour tout réel positif ou nul x : $U(x) = 8\ln\left(\frac{x + \sqrt{x^2+16}}{4}\right)$.

2°) Soit (C) la courbe représentative de U dans le plan muni d'un repère orthonormé (unité : 1 cm).

On fera un graphique séparé de celui de la partie A.

a) Etudier le sens de variation de la fonction U sur $[0; +\infty[$.

b) Calculer le nombre dérivé de U en 0. Préciser l'allure de la courbe (C) au voisinage de l'origine.

c) Tracer la courbe (C) sur l'intervalle $[0; 8]$. On construira la tangente à (C) en O.

On prendra : $\ln \approx 0,693$; $\ln(1 + \sqrt{2}) \approx 0,881$; $\ln(2 + \sqrt{5}) \approx 1,444$; $\ln(1 + \sqrt{5}) \approx 1,174$.

Partie C

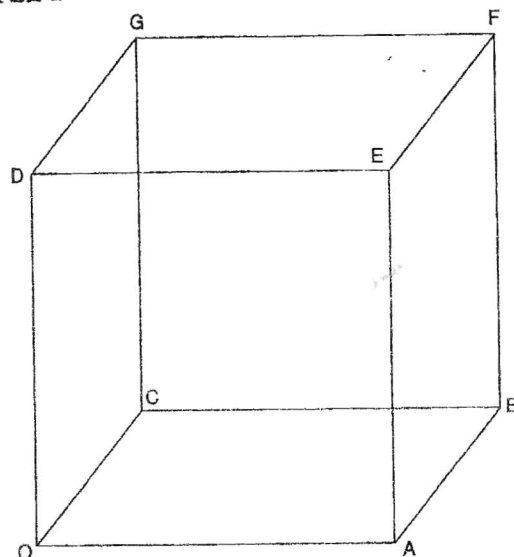
On appelle (H+) l'ensemble des points de (H) d'ordonnées positives.

On se donne un point N' de (H+) d'abscisse x' telle que : $x' \geq 2\sqrt{2}$.

1°) Démontrer que le point N_1 , tel que : $N_1 = R^{-1}(N')$ appartient à (h+) et que son abscisse x est positive.

2°) Soit (Δ') la partie du plan limitée par (H+), les segments [OA'] et [ON']. Démontrer géométriquement que (Δ') et (Δ) ont la même aire.

EXERCICE I



Soit le cube OABCDEFG représenté par la figure ci-dessus.

L'espace est orienté par le repère orthonormal direct $(O; \vec{OA}, \vec{OC}, \vec{OD})$.

On désigne par a un réel strictement positif.

L, M et K sont les points définis par $\vec{OL} = a\vec{OC}$, $\vec{OM} = a\vec{OA}$, et $\vec{BK} = a\vec{BF}$.

1. a. Calculer les coordonnées du vecteur $\vec{DM} \wedge \vec{DL}$.
- b. En déduire l'aire du triangle DLM.
- c. Démontrer que la droite (OK) est orthogonale au plan (DLM).
2. On note H le projeté orthogonal de O (et de K) sur le plan (DLM).

a. Démontrer que $\vec{OM} \cdot \vec{OK} = \vec{OH} \cdot \vec{OK}$.

b. Les vecteurs $\vec{OH}$ et $\vec{OK}$ étant colinéaires, on note λ le réel tel que $\vec{OH} = \lambda \vec{OK}$.

Démontrer que $\lambda = \frac{a}{a^2 + 2}$. En déduire que H appartient au segment [OK].

c. Déterminer les coordonnées de H.

d. Exprimer $\vec{HK}$ en fonction de $\vec{OK}$. En déduire que $HK = \frac{a^2 - a + 2}{\sqrt{a^2 + 2}}$.

3. À l'aide des questions précédentes, déterminer le volume du tétraèdre DLMK en fonction de a .

EXERCICE II (5 points)

Partie A:

Dans le plan complexe P rapporté à un repère orthonormal direct (O, u, v) (unité 1 cm), on considère le point G_0 d'affixe $z_0 = re^{i\theta}$, où r et θ sont deux nombres réels fixés avec $r > 0$.

Soit M_0 le point d'affixe Z_0 tel que le triangle OG_0M_0 soit équilatéral direct. On désigne par G_1 le centre de gravité du triangle OG_0M_0 .

1°) a) Démontrer que $1 + e^{i\frac{\pi}{3}} = \sqrt{3} e^{i\frac{\pi}{6}}$.

b) Exprimer Z_0 en fonction de z_0 .

c) Démontrer que le point G_1 d'affixe z_1 est l'image du point G_0 par la similitude directe S de centre O , de rapport $\frac{\sqrt{3}}{3}$ et d'angle $\frac{\pi}{6}$.

2°) On définit dans le plan P les deux suites de points $(M_n)_{n \geq 0}$ et $(G_n)_{n \geq 0}$ telles que, pour tout entier naturel n , le triangle OG_nM_n soit un triangle équilatéral direct de centre de gravité G_{n+1} .

a) Pour tout entier n , on désigne par z_n l'affixe de G_n et Z_n l'affixe de M_n . Démontrer que : $G_{n+1} = S(G_n)$ et exprimer z_{n+1} en fonction de z_n .

b) Pour tout entier n , exprimer z_n en fonction de n , r et θ .

3°) On suppose dans cette question que $z_0 = 8 e^{i\frac{\pi}{4}}$. Placer les points G_0, G_1, G_2, G_3 et G_4 .

Partie B:

Dans l'espace rapporté au repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$,

on considère la suite de points $(K_n)_{n \geq 0}$ telle que $G_n K_n = OG_n \wedge OG_{n+1}$, où les points $G_0, G_1, \dots, G_n, \dots$ sont ceux de la partie A situés dans le plan $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

1°) a) Montrer que $G_0 K_0 = \frac{r^2 \sqrt{3}}{6}$.

b) En déduire l'aire du triangle $OG_0 K_0$ en fonction de r .

2°) On considère la suite numérique $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par $u_n = G_n K_n$. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n . Puis en déduire un en fonction de r et de n .

3°) Pour tout n , on note S_n la somme des aires des triangles $OG_0 K_0; OG_1 K_1; \dots; OG_{n-1} K_{n-1}$. Exprimer S_n en fonction de r et n et calculer la limite de S_n quand n tend vers l'infini.

PROBLEME (11 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$. L'unité choisie est le centimètre.

Partie A

1°) Soit (h) la conique d'équation $y^2 - x^2 = 16$ dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Quelle est la nature de (h) ?

On note A le sommet de (h) d'ordonnée positive. Tracer (h) .

2°) On pose : $z = x + iy$, $z' = x' + iy'$, $z'' = x'' + iy''$ où x, x', x'', y, y', y'' sont des réels.

Soit R l'application du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' définie par : $z' = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)z$

Démontrer que R est une rotation dont on précisera le centre et l'angle.

3°) Soit S l'application du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M'' d'affixe z'' définie par : $z'' = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)z$

a) Démontrer que l'ensemble des points invariants par S est la droite (D) d'équation : $y = (\sqrt{2}+1)x$.

b) Démontrer que $S = R \circ S_{(OJ)}$ où J est le point de couple de coordonnées (0 ; 1).

c) Dédire de ce qui précède, la nature de S.

4°) a) Vérifier que : $R(A) = S(A)$. On notera A' ce point.

b) Démontrer que (D) coupe (h) en deux points E et F.

5°) a) Démontrer que les coordonnées de M, M', M'' vérifient : $x'y' = x''y'' = \frac{1}{2}(y^2 - x^2)$.

b) En déduire que (h) a la même image par R et S. On appelle (H) cette image.

Donner la nature et une équation de (H) dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

6°) a) Expliquer pourquoi E et F appartiennent à (H) .

b) Construire sur la même figure la courbe (h) , les points A et A', la droite (D) et la courbe (H) .

Partie B

1°) On note $(h+)$ l'ensemble des points de (h) d'ordonnées positives.

a) Démontrer que $(h+)$ est la courbe représentative de la fonction $f : x \rightarrow \sqrt{x^2+16}$ dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

b) Soit N un point de $(h+)$ d'abscisse x positive. On note $U(x)$ l'aire de la partie (Δ) du plan, limitée par la courbe $(h+)$,

segments [OA] et [ON]. Démontrer que, pour tout réel positif ou nul x : $U(x) = \int_0^x \sqrt{t^2+16} dt = \left(\frac{x\sqrt{x^2+16}}{2} \right)$.

On ne cherchera pas à calculer $U(x)$.

c) Pour tout réel positif ou nul x , on pose : $G(x) = 8 \ln(x + \sqrt{x^2+16})$.

Prouver que U et G ont la même fonction dérivée sur $[0; +\infty[$. Calculer $U(0)$ et $G(0)$.

En déduire que pour tout réel positif ou nul x : $U(x) = 8 \ln \left(\frac{x + \sqrt{x^2+16}}{4} \right)$.

2°) Soit (C) la courbe représentative de U dans le plan muni d'un repère orthonormé (unité : 1 cm).

On fera un graphique séparé de celui de la partie A.

a) Etudier le sens de variation de la fonction U sur $[0; +\infty[$.

b) Calculer le nombre dérivé de U en 0. Préciser l'allure de la courbe (C) au voisinage de l'origine.

c) Tracer la courbe (C) sur l'intervalle $[0; 8]$. On construira la tangente à (C) en O.

On prendra : $\ln \approx 0,693$; $\ln(1 + \sqrt{2}) \approx 0,881$; $\ln(2 + \sqrt{5}) \approx 1,444$; $\ln(1 + \sqrt{5}) \approx 1,174$.

Partie C

On appelle $(H+)$ l'ensemble des points de (H) d'ordonnées positives.

On se donne un point N' de $(H+)$ d'abscisse x' telle que : $x' \geq 2\sqrt{2}$.

1°) Démontrer que le point N_1 , tel que : $N_1 = R^{-1}(N')$ appartient à $(h+)$ et que son abscisse x est positive.

2°) Soit (Δ') la partie du plan limitée par $(H+)$, les segments [OA'] et [ON']. Démontrer géométriquement que (Δ') a même aire.

**BAC BLANC n° 1 Avril 2009**
Epreuve de MATHÉMATIQUES

Série : C&E

Durée : 4h

Coeff : 5

EXERCICE 1. (4 points)

Une urne contient 10 boules : cinq sont blanches et portent les numéros 1, 1, 1, 2, 4 ; trois sont noires et portent les Numéros 1, 3, 5 ; enfin deux sont rouges et portent les numéros 6, 6. Les tirages sont équiprobables.

1° Soient A et B deux événements indépendants. Démontrer que $p(A) = p(A \cap B) + p(A) \times p(B)$ puis en déduire que A et $\bar{B}$ sont des événements indépendants.

2° Soit l'expérience C qui consiste à tirer simultanément deux boules de l'urne.

a) Calculer les probabilités des événements suivants :

E_1 : les deux boules ont la même couleur.

E_2 : les deux boules sont de couleurs différentes.

E_3 : les deux portent le même numéro.

b) Sachant que les deux boules ont la même couleur, calculer la probabilité qu'elles portent le même numéro.

Les événements E_1 et E_2 sont-ils indépendants ?

3° On suppose maintenant que : chaque boule tirée portant un numéro impair fait gagner 5F et chaque boule tirée portant un numéro pair fait gagner 10F. Soit X la variable aléatoire associant à chaque tirage simultané de deux boules, la somme des gains.

a) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X

b) Déterminer et interpréter $E(X)$, l'espérance mathématique de X.

EXERCICE 2 (5 points) Les questions 1°, 2° et 3° sont indépendantes.

Le plan complexe est muni du repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

1° On donne les points : $A\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, $B\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$, $C\left(\begin{smallmatrix} -2 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$, $A'\left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 10 \end{smallmatrix}\right)$, $B'\left(\begin{smallmatrix} 4 \\ 6 \end{smallmatrix}\right)$ et $C'\left(\begin{smallmatrix} -3 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$.

Soit f l'application affine du plan telle que : $f(A) = A'$, $f(B) = B'$ et $f(C) = C'$.

a) Démontrer que f est bijective.

b) Déterminer l'expression analytique de f.

c) Déterminer une équation de la droite (D') image par f de la droite (D) d'équation $y = 2x + 3$.

2° Soit g l'application affine du plan d'expression analytique :
$$\begin{cases} x' = y + 4 \\ y' = x - 2 \end{cases}$$

a) Démontrer que g est bijective.

b) Déterminer l'écriture complexe de g et en déduire que g est un antidéplacement.

c) Déterminer l'ensemble des points du plan invariants par g et en déduire la nature de g.

d) Déterminer les éléments caractéristiques de g ; (On donnera une équation cartésienne de son axe (Δ)).

3) a) Déterminer l'ensemble (C) des points M du plan d'affixe z telle que $|(1+i\sqrt{3})z + \frac{3+i\sqrt{3}}{2}| = 1$

b) Soit h la transformation du plan d'écriture complexe $z' = (1+i\sqrt{3})z + \frac{3+i\sqrt{3}}{2}$.

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de h.

c) Déterminer E antécédent de O par h. En utilisant h retrouver l'ensemble (C).

(1 / 2)

PROBLEME (11 points)

Partie A

On considère l'équation différentielle (E) : $y' - 2y - 4 = 0$

1° Déterminer le réel b pour que la fonction f telle que $f(x) = e^{2x} + b$ soit solution particulière de (E).

2° Résoudre (E).

Partie B

Pour tout réel k , on pose $f_k(x) = ke^{2x} - 2$; on appelle (C_k) la courbe de f_k dans un repère orthonormé.

1° a) Montrer qu'à tout point $M(x_0, y_0)$, il correspond un unique réel k tel que M appartienne à (C_k) .

b) Donner l'équation de la courbe (C_k) passant par $(-1; 2)$.

2° a) Donner l'équation de (C_0) .

b) On suppose $k \neq 0$. Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_k(x)$ et en déduire qu'il existe une droite (D) , asymptote à chacune des courbes (C_k) .

Partie C

1° a) Etudier le sens de variation de f_1 et donner son tableau de variation.

b) Déterminer les coordonnées du point A, intersection de (C_1) avec l'axe des abscisses.

c) Tracer (C_1) et (D) dans le repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ d'unité 2cm.

2° a) Déterminer l'expression analytique de la symétrie orthogonale S d'axe (D) d'équation $y = -2$.

b) Soit $S(M) = M'$ avec $M(x, y)$ et $M'(x', y')$. Montrer que : $y = f_k(x) \Leftrightarrow y' = f_{-k}(x')$.

c) En déduire que si M est un point de (C_k) alors M' est un point de (C_{-k}) .

d) Comment passe-t-on de la courbe (C_k) à la courbe (C_{-k}) ?

e) Tracer (C_{-1}) dans le même repère que (C_1) .

3°) Hachurer le domaine Δ , compris entre (C_{-1}) , (C_1) et les droites d'équations $x = -1$ et $x = \frac{1}{2}$.

Calculer en cm^2 l'aire de ce domaine.

4° a) Calculer les coordonnées du point B, intersection de la tangente (T_1) à (C_1) et de la tangente (T_{-1}) à (C_{-1}) au point d'abscisse 0. Tracer ces tangentes.

b) Déterminer l'équation de la tangente (T_k) à (C_k) au point d'abscisse 0 et montrer que toutes les tangentes (T_k) (k variant dans $\mathbb{R}$) sont concourantes en un point que l'on précisera.

Partie D

Soit (U_n) la suite définie, pour tout entier naturel n non nul par : $U_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$ où f est la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = (x+1)^2 e^{-x}$. On désigne par (C) la courbe de f .

1° a) Etudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variation sur $[0; +\infty[$.

b) A l'aide de deux intégrations par partie calculer l'intégrale $I = \int_0^1 f(x) dx$ et en donner une interprétation graphique.

2° Vérifier que, pour tout entier naturel $n \neq 0$, on a : $U_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (k+n)^2 e^{-\frac{k}{n}}$ et $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = U_n + \frac{e - 4}{ne}$

3° a) Etablir que, pour tout entier naturel non nul n et pour tout entier naturel k tel que $0 \leq k \leq n-1$ on a :

$$\frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t) dt \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right).$$

b) Démontrer que, pour tout entier naturel non nul n , on a : $U_n + \frac{e - 4}{ne} \leq \int_0^1 f(t) dt \leq U_n$.

c) En déduire que, pour tout entier naturel non nul n , on a : $I \leq U_n \leq I - \frac{e - 4}{ne}$.

d) Etudier la convergence de la suite (U_n) puis préciser sa limite.

(2/2)



Exercice 1 : Arithmétique : division euclidienne, numération de base b , congruence modulo n dans $\mathbb{Z}$ (3,5 points)

1) Soit a un entier naturel. Le reste de la division euclidienne de a par 12 est 8.

Quel est le reste de la division euclidienne de a par 6 ? par 4 ? par 3 ?

2) Un entier A s'écrit $\overline{524}$ dans le système de numération de base b et a pour reste 4 dans la division euclidienne par 7.

a) Démontrer que : $5b^2 + 2b \equiv 0[7]$

b) En déduire l'ensemble F des valeurs de b .

3) On suppose que $b=7$.

Donner l'écriture décimale de A . (on pourra remarquer que A est premier).

4) Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation d'inconnue $(x; y)$: $x^2 + 4x = y^2 + 259$

Exercice 2 : Suite d'intégrales (4 points)

Pour tout entier strictement positif n , on pose :

$$I_n = \int_1^2 \frac{dt}{t^n e^{1-t}}$$

1) Etudier le sens de variation de la suite $(I_n)_{n \geq 1}$, puis montrer qu'elle converge.

2) Démontrer que, pour tout entier naturel strictement supérieur à 1, on a :

$$\frac{1}{n-1} \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}} \right) \leq I_n \leq \frac{e}{n-1} \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}} \right).$$

En déduire la limite de la suite $(I_n)_{n \geq 1}$.

3) a) Déterminer sur $\mathbb{R}^*$ la fonction dérivée f'_n de

$$f_n : x \mapsto \frac{1}{x^n e^{1-x}}.$$

Donner l'expression de f'_n en fonction de f_n et

$$f_{n+1}.$$

b) Déterminer une relation entre I_n et I_{n+1} , puis

démontrer que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (nI_{n+1}) = 1$.

c) En déduire que la suite $(nI_n)_{n \geq 1}$ converge et déterminer sa limite.

Problème (12,5 points) :

Les parties A, B et C sont indépendantes. On pourra, en cas de besoin, admettre les résultats d'une partie en l'indiquant clairement, puis traiter la partie suivante.

Le plan (P) est muni d'un repère orthonormé

$$(O, \vec{i}, \vec{j}).$$

Soit (D) la droite d'équation : $y = \frac{1}{2}x$.

On considère la symétrie s d'axe (D) , de direction celle de $\vec{j}$, d'écriture analytique : $\begin{cases} x' = x \\ y' = x - y \end{cases}$.

Partie A : (2,75 points)

Etude d'une affinité du plan

On considère l'application affine g de (P) dans (P) qui, à tout point $M(x; y)$ associe le point $M'(x'; y')$ tel que :

$$\begin{cases} x' = -\frac{1}{2}x + 1 \\ y' = -\frac{3}{4}x + y + \frac{1}{2} \end{cases}$$

1) Montrer que g est une bijection vérifiant :

$$g \circ s = s \circ g.$$

2) Déterminer l'ensemble (Δ) des points $M(x; y)$ invariants par g .

3) a) Soit $M(x; y)$ un point de (P) d'image $M'(x'; y')$ par g .

Démontrer que si $M(x; y)$ n'est pas invariant par g , alors la droite passant par les points $M(x; y)$ et $M'(x'; y')$ garde une direction indépendante de $M(x; y)$ que l'on précisera.



Département de mathématiques

b) Calculer les coordonnées du point d'intersection I de (MM') et de (Δ) .

4) Montrer que g est une affinité dont on précisera les éléments caractéristiques.

Partie B : (6 points)

Etude d'une famille $\mathcal{F}$ d'applications affines bijectives

On désigne par $\mathcal{F}$ l'ensemble des applications affines bijectives f de (P) dans (P) telles que les deux propriétés (1) et (2) suivantes soient satisfaites :

(1) $f(O)$ appartient à (D) d'équation : $y = \frac{1}{2}x$

(2) l'application linéaire φ associée à f vérifie

$$\varphi(2\vec{i} + \vec{j}) = a(2\vec{i} + \vec{j})$$

$$\varphi(\vec{j}) = b\vec{j}$$

Où, a et b sont des nombres réels non nuls.

1)a) Préciser le couple (a, b) pour que f soit une homothétie.

b) Préciser le couple (a, b) pour que f soit une translation.

2) Soit A un point de (P) tel que le vecteur $\overrightarrow{OA}$ soit colinéaire à $\vec{j}$ et, B un point de (D) distinct de O .

On note ψ l'application linéaire associée à s .

a) Déterminer $\psi(\overrightarrow{OA})$ et $\psi(\overrightarrow{OB})$.

b) En déduire $\psi(\vec{j})$ et $\psi(2\vec{i} + \vec{j})$

(on pourra prendre $\overrightarrow{OA} = \lambda\vec{j}$ et $\overrightarrow{OB} = 2\alpha\vec{i} + \alpha\vec{j}$, $(\lambda, \alpha) \in \mathbb{R}^2$)

3) a) Démontrer que s et g appartiennent à $\mathcal{F}$.

4) On note Γ_1 , l'ensemble des éléments de $\mathcal{F}$ vérifiant :

$$f(O)(2\alpha; \alpha) \quad (\alpha \in \mathbb{R})$$

$$\varphi(\vec{j}) = \vec{j}$$

$$\varphi(2\vec{i} + \vec{j}) = a(2\vec{i} + \vec{j})$$

a) Démontrer que : $\varphi(\vec{i}) = a\vec{i} + \frac{a-1}{2}\vec{j}$

b) Soit f_1 un élément de Γ_1 .

Démontrer que le point $M(x; y)$ a pour image par f_1 le point $M'(x'; y')$ tel que :

$$\begin{cases} x' = ax + 2\alpha \\ y' = \frac{a-1}{2}x + y + \alpha \end{cases} \quad (a \in \mathbb{R}^* \text{ et } \alpha \in \mathbb{R})$$

c) Quel est l'ensemble des points invariants par f_1 ? (on discutera selon les valeurs de a)

d) Dans cette question, on prend $\alpha = 0$. Soit $M_0(x_0; y_0)$ un point du plan (P) . On pose :

$$M_1 = f_1(M_0) \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, M_{n+1} = f_n(M_n)$$

On désigne par $(x_n; y_n)$ les coordonnées du point M_n .

-Calculer x_n et y_n en fonction de x_0, y_0 et a .

-Etudier la convergence des suites (x_n) et (y_n) .

Partie C : (3,75 points)

Etude d'une fonction, équation de l'image de sa courbe par f_1

1) Soit F la fonction définie par :

$$F(x) = \frac{1}{2}x + \ln(x).$$

Etudier le sens de variation de F , puis représenter graphiquement cette fonction dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On désignera par (C) , la courbe représentative de F .

2) a) Soit f_1 un élément quelconque de Γ_1 . Déterminer une équation de l'image de (C) par f_1 .

b) Soit $(p, q) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ et $(C_{p,q})$ la courbe d'équation : $y = \ln(px + q) + \frac{1}{2}x$

dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Démontrer que $(C_{p,q})$ est l'image de (C) par une application appartenant à Γ_1 .

3) soit (Γ) la courbe d'équation

$$y = \ln(-2x + 2) + \frac{1}{2}x$$

Reconnaître l'application appartenant à Γ_1 qui transforme (C) en (Γ) .

4) construire l'image (C') de (C) par $g \circ s$.

BAC BLANC - MATHEMATIQUES - 1- 2005

Série : C

Durée : 4 heures

Coeff : 6

EXERCICE 1 (5points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{U}, \vec{V})$ unité 2cm . On donne les points A , B et C d'affixes respectives $i; \sqrt{2}$ et $\sqrt{2} + i$; on appelle I , J et K les milieux respectifs des segments [OB] , [AC] et [BC] et S la similitude directe qui transforme A en I et O en B .

- 1 . Faire une figure .
- 2 . a. Déterminer le rapport et l'angle de S .
b. Donner l'écriture complexe de S .
c. En déduire l'affixe ω du centre Ω de S .
d. Quelle est l'image par S du rectangle AOBC ?
- 3 On considère la transformation $S^2 = S \circ S$.
a. Quelles sont les images des points O ; B et A par S^2 ?
b. Montrer que S^2 est une homothétie dont on précisera le centre et le rapport.
c. En déduire que les droites (OC) , (BJ) et (AK) sont concourantes.
4. On définit la suite des points A_n de la façon suivante : $A_0 = A$ et pour tout entier naturel n , $A_{n+1} = S(A_n)$.
a. Placer les points A_1 , A_2 et A_3 sur la figure .
b. On note U_n la longueur du segment $[A_n A_{n+1}]$. Exprimer U_n en fonction de U_{n-1} .
c. Calculer U_0 et en déduire U_n en fonction de n .
d. Calculer $S_n = U_0 + \dots + U_n$. Quelle est la limite de S_n lorsque n tend vers $+\infty$?

EXERCICE 2 (5points)

Dans le plan orienté , on considère le losange OABC tel que $(\vec{OA}; \vec{OC}) = \frac{\pi}{3}$ et $OA = a$

où a est un réel strictement positif .

Le cercle (Γ) , de centre O et de rayon a , coupe le segment [OB] en E.

Soit F le point de la demi-droite [OC) tel que $CF = EB$ et C est situé entre O et F.

On note r_1 la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{6}$ et r_2 la rotation de centre A et

d'angle $-\frac{2\pi}{3}$. On considère la transformation $g = r_1 \circ r_2$.

- 1° a. Déterminer les images des points O et A par g .
b. Démontrer que g est une rotation dont on précisera l'angle. En déduire que les droites (EF) et (OA) sont perpendiculaires et que $EF = OA$.
c. Déterminer et construire l'image (Γ') de (Γ) par g .
- 2° La perpendiculaire à la droite (OC) passant par E coupe la droite (AB) en G.
a. Démontrer que le triangle EQA est rectangle isocèle en Ω .

- b. En admettant que deux rotations de même angle qui coïncident en un point sont égales et en utilisant la question 1° a. déduire le centre de la transformation g.
- c. Démontrer que les droites (EF), (AC) et (OΩ) sont concourantes en un point H qui est l'orthocentre du triangle OAE.

PROBLEME (10 points)

Le but du problème est d'étudier dans sa première partie la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{1}{1 - xe^{-x}}, \text{ puis, dans sa seconde partie, d'établir un encadrement de l'intégrale}$$

$$I = \int_0^1 f(x) dx.$$

PARTIE A

1. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x - e^{x-1}$.
 - a. Etudier les variations de g (on ne demande pas dans cette question de calculer les limites de g). Calculer $g(1)$ et montrer que pour tout x réel $g(x) \leq 0$.

- b. En déduire que pour tout x réel $xe^{-x} \leq \frac{1}{e}$ puis $1 - xe^{-x} > 0$.

2. On désigne par f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{1 - xe^{-x}}$.

Soit (C) sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : 3cm).

- a. Vérifier que f est définie sur $\mathbb{R}$.
- b. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.
- c. Etudier les variations de f et dresser le tableau de variation.
- d. Ecrire une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0.
- e. Tracer (T) puis (C) (on admettra que (C) est au dessus de (T) pour $x < 0$, et au dessous pour $x > 0$).

3. a. Déterminer les images par f des intervalles $[0; 1]$ et $[1 + e; +\infty[$.

- b. En déduire que pour tout x positif ou nul : $1 \leq f(x) \leq \frac{e}{e-1}$.

PARTIE B

1. Donner une interprétation géométrique du nombre $I = \int_0^1 f(x) dx$.

2. Soit n un entier naturel non nul, et soit $J_n = \int_0^1 x^n e^{-nx} dx$.

- a. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $J_1 = 1 - \frac{2}{e}$.

- b. On se propose de calculer J_2 sans utiliser des intégrations par parties. déterminer les coefficients a , b et c tels que la fonction :

$$H(x) = (ax^2 + bx + c) e^{-2x} \text{ soit une primitive de } h(x) = x^2 e^{-2x}$$

$$\text{En déduire } J_2 = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{5}{e^2} \right).$$

3. Pour tout entier naturel non nul n , on pose $U_n = 1 + J_1 + J_2 + \dots + J_n$.

→ a. Montrer que, pour tout réel x : $1 + xe^{-x} + x^2 e^{-2x} + \dots + x^n e^{-nx} = \frac{1 - (xe^{-x})^{n+1}}{1 - xe^{-x}}$.

b. En déduire que $I - U_n = \int_0^1 x^{n+1} e^{-(n+1)x} f(x) dx$.

c. En utilisant la partie A-1.b montrer que pour tout x positif ou nul :

$$0 \leq x^{n+1} e^{-(n+1)x} \leq \frac{1}{e^{n+1}}.$$

En déduire que pour tout x positif ou nul :

$$0 \leq x^{n+1} e^{-(n+1)x} f(x) \leq \frac{1}{e^n (e-1)}.$$

d. En déduire un encadrement de $I - U_n$; étudier alors la convergence de la suite de terme général U_n .

4. Montrer que $U_2 \leq I \leq U_2 + \frac{1}{e^2 (e-1)}$. Sachant que $U_2 = 1 + J_1 + J_2$, trouver

deux nombres décimaux d_1 et d_2 tels que $0 < d_2 - d_1 < 10^{-1}$ et $I < d_2$.

FIN