



BACCALAUREAT BLANC
SESSION DE MARS 2025
Série : C
Coef : 5
Durée : 4h00

EPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Le sujet comporte TROIS (03) EXERCICES dont un QCM et un Problème. Le candidat doit traiter tout le sujet. Dès qu'il vous est remis, assurez-vous qu'il soit complet.

Calculatrice électronique de poche - y compris calculatrice programmable, alphanumérique ou à écran graphique - à fonctionnement autonome, non imprimante, autorisée.

L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout autre matériel électronique est rigoureusement interdit. Dans le cas où un(e) candidat(e) repère ce qui lui semble être une erreur, il (elle) le signale très lisiblement sur sa copie, propose la correction et poursuit l'épreuve en conséquence.

Exercice 1. QCM../ 30 points

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (qcm). Pour chaque question, quatre réponses sont proposées dont une seule est exacte. Tu indiquerás sur la copie, le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.

Une bonne réponse rapporte 05 points, une mauvaise et une absence de réponse rapport 0 point. Aucune justification n'est demandée.

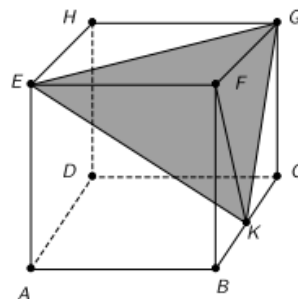
1. a) On considère un cube ABCDEFGH et on appelle K le milieu du segment [BC].

On se place dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ et on considère le tétraèdre EFGK.

On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par

$V = \frac{1}{3} \times B \times h$, où B désigne l'aire d'une base et h la hauteur relative à cette base.

Le projeté orthogonal L de F sur le plan (EGK) a pour coordonnées :



Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
$\left(\frac{5}{9}; \frac{4}{9}; \frac{7}{9}\right)$	$\left(\frac{4}{9}; \frac{5}{9}; \frac{7}{9}\right)$	$\left(\frac{7}{9}; \frac{5}{9}; \frac{4}{9}\right)$	$\left(\frac{7}{9}; \frac{4}{9}; \frac{5}{9}\right)$

- b) La longueur LF est égale à :

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
$\frac{1}{9}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

- c) Le volume du tétraèdre EFGK est égal à :

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{8}{27}$

2. a) L'ensemble des nombres complexes d'affixe z vérifiant $\arg(3\pi z^2) = \frac{\pi}{3}[2\pi]$ et $\text{Im}(z) < 0$ est

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
Une droite	Un singleton	Une paire	Une demi droite

b) Dans $\mathbb{C}$, l'équation $2i\bar{z} + 4 = 3z + 2i$ admet pour ensemble solutions $S =$

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
$\emptyset$	$\{1,6 + 0,4i\}$	$\left\{\frac{8}{13} - \frac{14}{13}i\right\}$	$\left\{-\frac{14}{13} - \frac{8}{13}i\right\}$

3. L'application f du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe $z = x + iy$ associe le point M' d'affixe z' tel que :

$$\begin{cases} x' = x - \sqrt{3}y \\ y' = \sqrt{3}x + y - \sqrt{3} \end{cases} \text{ est une}$$

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
Isométrie	Rotation	Symétrie axiale	Homothétie

Exercice 2. Arithmétique / 35 points

Partie A : ROC

Soit n un entier non nul.

- Montrer que pour tout $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$, si $a \equiv b[n]$ alors $ac \equiv bc[n]$.
- Montrer que pour tout $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ et tout $k \in \mathbb{N}$, si $a \equiv b[n]$ alors $a^k \equiv b^k[n]$.

Partie B : Equation dans $\mathbb{Z}$.

- Résoudre dans $\mathbb{Z}$ les équations suivantes :
 - $3x + 7 \equiv 0[8]$ (On pourra utiliser la question 1 de la partie A.)
 - $x^3 \equiv 2[5]$.
- On se propose de résoudre l'équation (E) dans $\mathbb{N}$:

$$(E) : n \times 7^n + 4n + 1 \equiv 0[8]$$

- Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, n pair on a $7^n \equiv 1[8]$.
- L'équation (E) admet-elle des entiers naturels pairs pour solutions ?
- Déterminer les entiers naturels impairs solutions de l'équation (E) .

Exercice 3. Nombres complexes et Isométries du plan.../ 55 points

Partie A. Nombres complexes.

Pour tout nombre complexe z , on définit : $P(z) = z^3 + 2(\sqrt{2} - 1)z^2 + 4(1 - \sqrt{2})z - 8$.

- Calculer $P(2)$. Déterminer une factorisation de $P(z)$ par $z - 2$.
- a) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $P(z) = 0$. On appelle z_1 et z_2 les solutions de l'équation autre que 2, z_1 ayant une partie imaginaire positive.

- b) Vérifier que $z_1 + z_2 = -2\sqrt{2}$.
- c) Déterminer le module et un argument de z_1 et de z_2 .
3. a) Placer dans le plan, muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ (Unité graphique 2cm), les points : A d'affixe 2, B et C d'affixes respectives z_1 et z_2 , et I milieu de $[AB]$.
- b) Démontrer que le triangle OAB est isocèle. En déduire une mesure de l'angle $(\vec{u}, \vec{OI})$.
- c) Calculer l'affixe z_I de I , puis le module de z_I .
- d) En déduire des résultats précédents les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right)$.

Partie B. Isométries du plan.

Le plan $\mathcal{P}$ est rapporté au repère orthonormé direct $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

On donne les points $A(1; 1), B(-3; 3), C(2; 2), D(-4; 4)$. On appelle E et F les milieux respectifs des segments $[AC]$ et $[BD]$.

- Démontrer qu'il existe une rotation unique r telle que : $r(A) = B$ et $r(C) = D$.
Déterminer son angle et son centre I .
- Démontrer qu'il existe une rotation unique r' telle que : $r'(A) = D$ et $r'(C) = B$.
Déterminer son angle et son centre I' .
- Que peut-on dire du quadrilatère $IEI'F$?

Problème. Intégrale de Laplace-Gauss.../ 80 points

Les parties A, B et C peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A. Dérivée d'une intégrale.

Soit a un réel strictement positif. On considère une fonction $t \mapsto b(t)$ continue sur l'intervalle $[0, a]$ et la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la relation

$$f(x) = \int_0^a e^{xb(t)} dt.$$

- 1) Montrer que si le maximum M de la fonction b sur $[0, a]$ est strictement négatif, on a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

- 2) Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\varphi(x) = e^x - 1 - x - \frac{1}{2}e^\alpha x^2$.

- Dresser le tableau de variation de φ sur $\mathbb{R}$.
- En déduire l'implication suivante :

$$\forall \alpha > 0, \forall x \in \mathbb{R}, \left(x \leq \alpha \Rightarrow e^x - 1 - x \leq \frac{1}{2}e^\alpha x^2 \right) \quad (1)$$

- 3) On admet que :

$$\forall \alpha > 0, \forall x \in \mathbb{R}, \left(x \geq -\alpha \Rightarrow e^x - 1 - x \geq \frac{1}{2}e^\alpha x^2 \right) \quad (2)$$

Déduire des relations (1) et (2) qu'on a :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{\frac{x^2}{2}} = 1 \quad (3)$$

- 4) Déduire des relations (1), (2) et (3) qu'il existe une fonction numérique g qui est continue sur $\mathbb{R}$ et telle que $\forall \alpha > 0$ et $\forall x \in [-\alpha, \alpha]$ on ait :

$$e^{-\alpha} \leq g(x) \leq e^\alpha \text{ et } e^u \leq 1 + u + \frac{u^2}{2} g(u) \quad (4)$$

5) Soit x un réel quelconque et h un réel différent de 0. Calculer le quotient $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ en utilisant le développement (4), et montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \int_0^a b(t) e^{xb(t)} dt$$

Partie B : Changement de variable dans une intégrale.

1) Soient α et β des réels tels que $\alpha < \beta$. Soit u une fonction dérivable sur $[\alpha, \beta]$. On suppose de plus que sa dérivée u' est continue sur $[\alpha, \beta]$. Soit f une fonction continue sur un intervalle I contenant les réels $u(\alpha)$ et $u(\beta)$.

Démontrer que :

$$\int_{u(\alpha)}^{u(\beta)} f(s) ds = \int_{\alpha}^{\beta} f(u(t)) u'(t) dt$$

On pourra considérer une primitive F de f sur I .

2) En déduire que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \int_0^x e^{-s^2} ds = x \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{e^{-x^2 \tan^2 t}}{\cos^2 t} dt$$

Partie C : Calcul de l'intégrale de Laplace-Gauss.

On spécifie les données de la partie A en prenant dorénavant $a = \frac{\pi}{4}$ et $b = \frac{1}{\cos^2 t}$. On a donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \exp\left(-\frac{x}{\cos^2 t}\right) dt$$

On considère la fonction g définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = f(x^2)$.

1) Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et qu'on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = -2e^{-x^2} \int_0^x e^{-s^2} ds$$

2) Montrer que la fonction : $x \mapsto g(x) + \left(\int_0^x e^{-s^2} ds\right)^2$ est constante sur $\mathbb{R}$. En déduire le calcul de $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x e^{-s^2} ds$

NB : L'usage du correcteur (Blanco) est strictement interdit