

Exercice 1

Soit n un entier naturel non nul

- 1) On considère l'équation notée $(E) : 3x + 7y = 10^{2n}$ où x et y sont des entiers relatifs

- a) Déterminer un couple (u, v) d'entiers relatifs tels que $3u + 7v = 1$

En déduire une solution particulière (x_0, y_0) de l'équation (E)

- b) Déterminer l'ensemble des couples d'entiers relatifs solutions de (E)

- 2) On considère l'équation notée $(G) : 3x^2 + 7y^2 = 10^{2n}$ où x et y sont des entiers relatifs

- a) Montrer que $100 \equiv 2 \pmod{7}$

Démontrer que si $(x; y)$ est solution de (G) alors $3x^2 \equiv 2^n \pmod{7}$

- b) Reproduire et compléter le tableau suivant

Reste de la division euclidienne de x par 7	0	1	2	3	4	5	6
Reste de la division de $3x^2$ par 7							

- c) Démontrer que 2^n est congru à 1, 2 ; ou 4 modulo 7

En déduire que l'équation (G) n'admet pas de solution

Exercice 2

On donne trois points A, B, C distincts non alignés du plan et on note a, b, c les longueurs des cotés du triangle ABC : $a=BC, b=AC, c=AB$. Soit G l'isobarycentre du triangle ABC

- 1) On note I le milieu du segment

- a) Montrer que : $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$

- b) Calculer $AB^2 + AC^2$ en fonction de AI^2 et BC^2

- c) En déduire $AG^2 = \frac{1}{9}(2b^2 + 2c^2 - a^2)$

- d) Écrire de même les expressions de BG^2 et CG^2

- 2) a) Montrer que $AG^2 + BG^2 + CG^2 = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2)$

- b) Déterminer l'ensemble (E) des points M du plan tels que $MA^2 + MB^2 + MC^2 = a^2 + b^2 + c^2$

- 3) On choisit $a=5, b=4, c=3$. Placer trois points A, B, C et dessine (E) dans ce cas particulier

Problème

Partie A : Résolution d'une équation différentielle

Soit l'équation différentielle (E) $y'' - 2y' + y = x^2 - 4x + 1$

1. Déterminer le polynôme g du second degré solution particulière de (E)
2. Résoudre dans l'équation différentielle (E₀) $y'' - 2y' + y = 0$
3. Montrer que f est solution de (E) si, et seulement si la fonction $h=f-g$ est une solution générale de (E₀)
4. En déduire la forme générale des solutions de (E)
5. En déduire la solution f de (E) dont la courbe passe par 0 et admet en ce point une tangente parallèle à l'axe des abscisses

Partie B Étude d'une fonction f

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 - xe^x + e^x & \text{si } x \geq 0 \\ 3x - \ln\left(1 + e^{\frac{1}{x}}\right) & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

1. Étudier la continuité de f en 0
 2. Étudier la dérivabilité de f en 0. Puis donner une interprétation graphique des résultats
 3. Déterminer l'ensemble de dérivabilité de f
 4. Calculer $f'(x)$ dans les intervalles où f est dérivable
 5. Dresser le tableau de variation de f
 6. Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - 3x + \ln 2]$ conclure
 7. Étudier la nature de la branche infinie en $+\infty$
 8. Étudier la position relative de (C_f) avec son asymptote en $-\infty$
 9. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet sur $] \ln 2; +\infty[$ une solution unique α
 10. Déterminer la valeur exacte de α
 11. Déterminer l'équation de la tangente (T) en (C_f) en α
- Soit la parabole d'équation $(\Gamma): y = x^2 - 1$
12. Étudier la position relative de (C_f) par rapport à (Γ) sur $[0; 1]$
 13. Tracer (C_f) et (Γ) unité = 2cm

Partie C Calcul d'aire

Soit un réel λ tel que $0 < \lambda < 1$

1. Soit $I(\lambda) = \int_{\lambda}^1 xe^x dx$ calculer $I(\lambda)$
2. On appelle $A(\lambda)$ l'aire en cm^2 du domaine du plan délimité par les courbes (C_f) et (Γ) et les droites d'équations $x = \lambda$ et $x = 1$
 - a) Montrer que : $A(\lambda) = (4e - 8e^{\lambda} + 4\lambda e^{\lambda}) \text{cm}^2$
 - b) Déterminer la limite de $A(\lambda)$ quand λ tend vers 0^+