

Sujets proposés (TSM)

SUJET N°1

Exercice

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n : $2^{3n} - 1$ est un multiple de 7 (on pourra utiliser un raisonnement par récurrence). En déduire que $2^{3n+1} - 2$ est un multiple de 7 et que $2^{3n+2} - 4$ est un multiple de 7.

2. Déterminer les restes de la division par 7 des puissances de 2.

3. Le nombre p étant un entier naturel, on considère le nombre entier $A_p = 2^p + 2^{2p} + 2^{3p}$.

a) Si $p = 3n$, quel est le reste de la division de A_p par 7 ?

b) Démontrer que si $p = 3n + 1$ alors A_p est divisible par 7.

c) Etudier le cas où $p = 3n + 2$

4. On considère les nombres entiers a et b écrits dans le système binaire : $a = \overline{1001001000}$ et

$b = \overline{1000100010000}$. Vérifier que ces deux nombres sont des nombres de la forme A_p . Sont-ils divisibles par 7 ?

Problème

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x + 1 - xe^{x-1}$. On note (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, i, j).

1) Etudier la limite de la fonction f en $-\infty$ et en $+\infty$ (on pourra écrire : $xe^{x-1} = \frac{1}{e}xe^x$)

2) Démontrer que la droite Δ d'équation $y = 2x + 1$ est asymptote à la courbe (C) en $-\infty$ et préciser la position de la courbe (C) par rapport à la droite Δ .

3.a) Calculer la dérivée f' et la dérivée seconde f'' de la fonction f

b) Dresser le tableau de variation de la fonction f' en précisant la limite de la fonction f' en $-\infty$

c) Calculer $f'(1)$ et en déduire le signe de $f'(x)$ pour tout réel x

d) Dresser le tableau de variation de la fonction f

4) Soit I l'intervalle $[1, 9]$. Démontrer que, sur I , l'équation $f(x) = 0$ a une solution unique α

5) Tracer la droite Δ et la courbe (C) (unité graphique : 2cm)

Sujet N° 2

Exercice :

Sur une droite (D) muni d'un repère (O, i, j), A_0 et B_0 sont les points d'abscisses respectives : -4 et 3 . Pour tout entier naturels n , on note :

A_{n+1} le barycentre de $\{(A_n; 1), (B_n; 4)\}$;

B_{n+1} le barycentre de $\{(A_n; 3), (B_n; 2)\}$;

1. Placer les points A_0, B_0, A_1 et B_1

2. Les points A_n et B_n ont pour abscisses a_n et b_n respectivement. Ainsi, $a_0 = -4$ et $b_0 = 3$. Démontrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, $a_{n+1} = \frac{1}{5}(a_n + 4b_n)$ et

$$b_{n+1} = \frac{1}{5}(3a_n + 2b_n).$$

3.a) Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n : $3a_n + 4b_n = 0$.

b) En déduire que : $a_{n+1} = -\frac{2}{5}a_n$ et $b_{n+1} = -\frac{2}{5}b_n$

4.a) Exprimer a_n et b_n à l'aide de n .

b) Déterminer les limites de a_n et b_n quand n tend vers $+\infty$.

c) Interpréter ce résultat à l'aide des points A_n et B_n .

Problème

On considère la fonction f définie sur $]0; \infty[$ par $f(x) = \frac{1+\ln x}{x}$; et on note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, i, j) (unité graphique 5cm)

Partie A : Etude de la fonction f

1. Etudier les limites de f en 0 et $+\infty$ (pour cette dernière, on pourra remarquer que : $(x) = \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x}$)

2.a) Montrer que : $f'(x) = -\frac{\ln x}{x^2}$ pour tout x appartenant à $]0, +\infty[$

b) En déduire le sens de variation de f

c) Dresser le tableau de variation de f

Partie B : Etude de quelques points particuliers de (C)

1. Déterminer l'abscisse x_1 du point d'intersection M_1 de (C) avec l'axe des abscisses.

2. Soit $x_2 = \frac{1}{\sqrt{e}}$. On note M_2 le point de (C) d'abscisse x_2

a) Déterminer une équation de la tangente Δ_2 au point M_2

b) Vérifier que Δ_2 passe par 0

3. Indiquer l'abscisse x_3 du point M_3 de (C) tel que la tangente Δ_3 à (C) en M_3 soit parallèle à l'axe des abscisses.

4. Soit f'' la dérivée de f' ; calculer $f''(x)$ pour x appartenant à $]0; +\infty[$. Déterminer le réel x_4 qui annule $f''(x)$. On appelle M_4 le point de (C) d'abscisse x_4 .

5. Vérifier que x_1, x_2, x_3 et x_4 sont quatre termes consécutifs d'une suite géométrique dont on indiquera la raison.

6) Placer les points M_1, M_2, M_3 et M_4 dans le repère (O, i, j). Construire les tangentes Δ_2 et Δ_3 puis la courbe (C).

Partie C : Calcul d'une aire

1. On note g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par

Sujets proposés (TSM)

$g(x) = (\ln x)^2$. Calculer la dérivée de g . En déduire une primitive de f sur $]0; +\infty[$, après avoir remarqué que

$$f(x) = \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x}$$

2) Hachurer le domaine plan limité par la courbe **(C)**, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = \frac{1}{e}$ et $x = 2$.

Calculer la valeur exacte de $\mathcal{A}$, l'aire de ce domaine, exprimée en cm^2 .

Sujet N° 3

Exercice :

On considère deux suites u et v par $u_0 = 1, v_0 = 12$ et

$$\text{pour tout entier naturel } n : \begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n + 2v_n) \\ v_{n+1} = \frac{1}{4}(u_n + 3v_n) \end{cases}$$

1. On appelle w la suite définie pour tout entier naturel n par $w_n = v_n - u_n$.

a) Montrer que w est une suite géométrique à termes positifs, dont on précisera la raison.

b) Déterminer la limite de la suite w .

2.a) Montrer que la suite u est croissante.

b) Montrer que la suite v est décroissante.

c) En déduire que, pour tout entier n , $u_0 \leq u_n \leq v_n \leq v_0$.

3. On admet que les suites u et v convergent. Montrer qu'elles ont la même limite que l'on appellera k .

4. On appelle t la suite définie pour tout entier naturel n par $t_n = 3u_n + 8v_n$.

a) Montrer que t est une suite constante. Déterminer cette constante.

b) Déterminer alors la valeur de k .

Problème :

Partie A : On considère la fonction numérique f définie sur $]0; \infty[$ par $f(x) = 2x^2 + 1 - \ln x$

1) Calculer la dérivée de f et en déduire le sens de variation de f .

2) Déduire de cette étude que $f(x)$ est positive sur $]0; \infty[$

Partie B : On considère la fonction numérique g définie sur $]0; \infty[$ par $g(x) = x + \frac{\ln x}{2x}$ et sa courbe représentative **(C)** dans un repère orthonormé (O, i, j) (unité graphique 2cm)

1) Calculer la dérivée g' de la fonction g et montrer que $g'(x)$ et $f(x)$ ont même signe sur $]0; +\infty[$

2) En utilisant les résultats de la question A.2°, établir le tableau de variation de la fonction g . On précisera le sens de variation de g et les limites en 0 et $+\infty$

3) Calculer la limite en $+\infty$ de $[g(x) - x]$; en déduire que la courbe **(C)** admet comme asymptote la droite **(D)**

d'équation $y = x$; on précisera la position relative de **(D)** et de **(C)** et les coordonnées de leur point commun.

4) Déterminer une équation de la tangente **(T)** à la courbe **(C)** au point d'abscisse e . Montrer que cette tangente est parallèle à la droite **(D)**.

5) Construire **(D)**, **T** et **C** dans le repère donné

6) Démontrer que la courbe **(C)** coupe une seule fois l'axe des abscisses en un point E d'abscisse x_0 tel que $0,5 < x_0 < 1$. Donner une valeur approchée de x_0 à 10^{-2} près.

7) Colorier sur la représentation graphique précédente, la partie du plan, ensemble des points $M(x; y)$ tels que $1 \leq x \leq e$ et $x \leq y \leq g(x)$. Calculer en cm^2 , l'aire $\mathcal{A}$ de cette partie du plan.

Sujet N° 4

Exercice :

Partie A : Une urne contient n boules blanches ($n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 2$), 5 boules rouges et 3 boules vertes. On tire simultanément et au hasard deux boules de l'urne.

1. Quelle est la probabilité de tirer deux boules blanches ?

2. On note $p(n)$ la probabilité de tirer deux boules de même couleur.

a) Montrer que $p(n) = \frac{n^2 - n + 26}{(n+8)(n+7)}$

b) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} p(n)$. Interpréter ce résultat.

Partie B : Pour les questions suivantes $n = 4$

1. Calculer $p(4)$

2. Un tirage consiste à tirer simultanément et au hasard deux boules de l'urne. Un joueur effectue deux tirages indépendants, en remettant dans l'urne avant le second tirage les deux boules tirées la 1ère fois. Il mise au départ la somme de 30 f. Pour chaque tirage :

- Si les deux boules sont de même couleur, il reçoit alors 40f ;

Sujets proposés (TSM)

- Si elles sont de couleurs différentes, il reçoit alors 5f.

On appelle gain du joueur la différence, à l'issue des deux tirages, entre la somme perçue par le joueur et sa mise initiale (ce gain peut être positif ou négatif). On désigne par X la variable aléatoire égale au gain du joueur.

- Quelles sont les valeurs prises par X ?
- Déterminer la loi de probabilité de X .
- Calculer l'Esperance de X .

Problème :

Partie A : On considère la fonction g_k de la variable réelle x définie par $g_k(x) = -2x + 1 + 2x \ln(kx)$, k étant un paramètre réel non nul.

- Déterminer, suivants les valeurs prises par k , l'ensemble de définition E_k de g_k .
- Calculer les limites de g_k aux bornes de E_k pour $k > 0$ et pour $k < 0$.
- Calculer la dérivée g'_k de g_k
- Etablir le tableau de variation de g_k pour chaque cas.
- a) Montrer que pour $k > 2$ et pour $x \in]0, +\infty[$, $g_k(x) > 0$
- b) Montrer que pour $k < 0$ l'équation $g_k(x) = 0$ admet une solution négative unique α_0 élément de l'intervalle $] -\infty; \frac{1}{k}[$
- c) Montrer que pour $0 < k < 2$, l'équation $g_k(x) = 0$ admet exactement deux solutions positives α_1 et α_2
- d) Etudier le signe de $g_2(x)$

Partie B : Soit la fonction numérique f_k de la variation réelle x , définie par $f_k(x) = \frac{1}{k} - \frac{\ln kx}{2x-1}$, k étant un paramètre réel supérieur ou égal à 2 ; on désigne par (C_k) , la représentation graphique de f_k dans le plan muni d'un repère orthonormé (o, i, j) , unité graphique 1cm.

- Déterminer l'ensemble D_k de la fonction f_k
- a) Montrer que la fonction f_2 admet un prolongement par continuité en $\frac{1}{2}$. On rappelle que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(h+1)}{h} = 1$
- b) Calculer aux bornes de D_k , les limites de f_k
- a) Calculer la fonction dérivée f'_k de f_k et établir une relation entre $f'_k(x)$ et $g_k(x)$ pour tout x de D_k
- b) Etudier le sens de variation de f_k et dresser son tableau de variation pour $k = 2$ et pour $k \neq 2$.
- Représenter C_2 et C_4 dans le même repère ; (préciser les asymptote à chacune de ces courbes)

Partie C :

1.a) A l'aide de f_2 , montrer que, $\forall x \in]\frac{1}{2}; +\infty[$, $0 < \ln 2x < 2x - 1$,

b) En déduire que : $\int_1^2 \ln 2x dx < 2$

2) A l'aide du graphique de la partie B Montrer que :

$$\frac{\ln 6}{5} < \frac{1}{2} - \int_2^3 f_2(x) dx < \frac{2 \ln 2}{3}$$

Sujet N°5 :

Exercice :

On définit, pour tout entier naturel $n \geq 0$, la suite (U_n) de nombres réels strictement positifs par $u_n = \frac{n^2}{2^n}$.

1. Pour tout entier naturel $n > 0$, on pose $v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$.

- Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \frac{1}{2}$
 - Montrer que pour tout entier naturel $n > 0$, $v_n > \frac{1}{2}$
 - Trouver le plus petit entier N tel que, si $n \geq N$, $v_n < \frac{3}{4}$
 - En déduire que si $n \geq N$ alors $u_{n+1} < \frac{3}{4} u_n$. On pose pour tout entier naturel $n \geq 5$, $S_n = u_5 + u_6 + \dots + u_n$
2. On se propose de montrer que la suite (S_n) ; $n \geq 5$ est convergente.

- Montrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 5$, $S_n \leq [1 + \frac{3}{4} + (\frac{3}{4})^2 + \dots + (\frac{3}{4})^{n-5}] u_5$
 - En déduire que pour tout entier naturel $n \geq 5$, $S_n \leq 4u_5$
3. Montrer que la suite (S_n) , $n \geq 5$ est croissante et en déduire qu'elle converge.

Problème

Partie A

- Montrer que pour tout $x > 0$, on a $e^{2x} - 1 > 0$
- Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = \frac{1}{e^{2x} - 1}$
- a) Déterminer les limites de g en 0 et en $+\infty$. Interpréter graphiquement les résultats
- b) Calculer $g'(x)$. Etudier le sens de variation de g puis dresser son tableau de variation.

Partie B :

On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ dont la courbe représentative C dans un repère orthogonal (o, i, j) est donnée en annexe avec sa tangente au point d'abscisse e . On admet l'égalité suivante :

$$f(x) = 2x[a(\ln x)^2 + b \ln x + c] \text{ ou } a, b \text{ et } c \text{ désignent trois réels.}$$

- Exprimer $f'(x)$ en fonction de a , b et c
- A l'aide des informations données sur le graphique, déterminer les valeurs de $f'(\frac{1}{e})$, $f'(\sqrt{e})$ et $f'(e)$.

Sujets proposés (TSM)

c) En déduire l'égalité : $f(x) = 2x[2(\ln x)^2 - 3\ln x + 2]$ pour tout $x \in]0, +\infty[$

2.a) Déterminer la limite de f en 0. On pourra poser $t = -\ln x$ et vérifier pour tout $x \in]0, +\infty[$ l'égalité : $f(x) = 2e^{-t}[2t^2 + 3t + 2]$

b) Déterminer la limite de f en $+\infty$

c) Montrer que pour tout $x \in]0, +\infty[$ l'égalité

$$f'(x) = 2(\ln x + 1)(2\ln x - 1).$$

d) Etudier le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f .

Partie C

1) Tracer, dans le repère (O, i, j) de la feuille annexe, la courbe représentative C_g de la fonction g étudiée en partie A

2.a) Montrer que pour tout $x \in]0, +\infty[$, on a

$$g(x) = \frac{e^{2x}}{e^{2x}-1} - 1$$

b) Calculer et exprimer en unité d'aire, l'aire de la surface délimitée par l'axe des abscisses, la courbe C_g et les droites d'équation $x = \frac{1}{4}$ et $x = 2$

3) Soit φ la fonction définie sur $[0,1 ; 0,3]$, par

$$\varphi(x) = f(x) - g(x)$$

a) Montrer que, pour tout $x \in [0,1 ; 0,3]$ on a $\varphi'(x) > 0$.

b) Montrer que, l'équation $f(x) = g(x)$ possède une solution unique α sur $[0,1;0,3]$ et déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}

Partie D

1) Montrer que pour tout $x > 0$, $f(x) > 0$.

2) On définit h sur $]0 ; +\infty[$ par l'expression suivante : $h = \text{gof}$

a) Déterminer les limites en 0 et en $+\infty$ de h

b) Déterminer le sens de variation de h sur $]0 ; +\infty[$

c) Montrer que $h(\alpha) = \text{gog}(\alpha)$. Déterminer une valeur approchée de $h(\alpha)$ à 10^{-4} près.

SUJET N°6

Exercice :

Dans le plan P , on donne un triangle équilatéral tel que : $\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{BC}\| = \|\overrightarrow{AC}\| = 1$. Soit A' le milieu du segment $[BC]$.

1. Montrer que le milieu G du segment $[AA']$ est le barycentre du système $\{(A ; 2), (B ; 1), (C ; 1)\}$
2. Trouver l'ensemble des points M du plan tel que : $2MA^2 + MB^2 + MC^2 = 2$

Problème

On considère la fonction f définie par $f(x) = e^{\frac{1}{x}} \ln|x-1|$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, i, j)

Partie A

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par

$$h(x) = 2x - 1 - \ln|x-1|$$

1) Calculer la limite de h en 1 et en $\pm\infty$

2) Etudier les variations de la fonction h

3.a) Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in]-\infty ; -1[$

b) Justifier que : $0,3 < \alpha < 0,4$;

$$h(0,3) \approx -0,4 \text{ et } h(0,4) \approx 0,3$$

4) En déduire que : $\begin{cases} \forall x \in]-\infty ; \alpha[; h(x) < 0 \\ \forall x \in]\alpha ; 1[\cup]1 ; +\infty[; h(x) > 0 \end{cases}$

Partie B:

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par :

$$g(x) = x^2 - (x-1)\ln|x-1|$$

1) Calculer la limite de g en 1 et en $\pm\infty$

2) Montrer que $g'(x) = h(x)$

3) Dresser le tableau de variation de la fonction g .

4.a) Montrer que $g(\alpha) = -\alpha^2 + 3\alpha - 1$

b) Donner un encadrement de $g(\alpha)$ à 10^{-1} près.

c) En déduire que $g(\alpha) < 0$

5.a) Montrer que l'équation : $g(x) = 0$ admet une solution unique $\beta \in]\alpha ; +\infty[$

b) Justifier que : $0,6 < \beta < 0,7$;

$$g(0,6) \approx -0,007 \text{ et } g(0,7) \approx 0,13$$

c) Calculer $g(0)$

d) En déduire le signe de la fonction g

Partie C

1) Calculer la limite de f en 1. Interpréter graphiquement le résultat

2) Montrer que f est continue à gauche en 0 et discontinue à droite en 0. Que peut-on dire de f en 0

3) Montrer que : $f'(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2(x-1)} g(x)$

4) Etudier les variations de la fonction f

5.a) Montrer que : $f(\beta) = \frac{\beta^2}{\beta-1} e^{\frac{1}{\beta}}$

b) Donner un encadrement à 10^{-1} près de $f(\beta)$. On

$$\text{donne } 4,2 < e^{\frac{1}{\beta}} < 5,3$$

c) En déduire que $f(\beta) < 0$

6) Démontrer que la tangente (T) au point d'abscisse 2 a pour équation : $y = \left(4 - \frac{\sqrt{e}}{4}\right)x - 8 - \frac{\sqrt{e}}{4}$

6) Tracer (C) et (T) .

SUJET N°7

Exercice

Une urne contient quatre boules noires et deux boules blanches. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On répète n fois l'épreuve qui consiste à tirer une boule puis à

Sujets proposés (TSM)

la remettre dans l'urne ; on suppose que toutes les boules ont la même probabilité d'être tirées et que les tirages sont indépendants. On note p_n la probabilité de tirer exactement une boule blanche lors des $n-1$ premiers tirages et une boule blanche lors du n ème tirage.

1. Calculer les probabilités p_2 , p_3 et p_4
2. On considère les événements suivants :

B_n : « On tire une boule blanche lors du n ème tirage »

U_n : « On tire une boule blanche et une seule lors des $n-1$ premiers tirages ».

- a) Calculer la probabilité de l'évènement B_n
- b) Exprimer la probabilité de l'évènement U_n en fonction de n .
- c) En déduire l'expression de p_n en fonction de n et vérifier l'égalité : $p_n = \frac{n-1}{4} \left(\frac{2}{3}\right)^n$.
3. On pose $S_n = p_2 + p_3 + \dots + p_n$.
 - a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on a : $S_n = 1 - \left(\frac{n}{2} + 1\right) \left(\frac{2}{3}\right)^n$.
 - b) Déterminer la limite de la suite (S_n)

Problème

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$. On appelle C la courbe représentative de f dans le repère (O, i, j)

Partie A

1. Etude de f

- a) Calculer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$. Justifier vos calculs.
- b) Préciser les équations des asymptotes.
2. Donner l'expression de $f'(x)$ ou f' est la dérivée de f . Dresser le tableau de variation de f . Préciser $f(0)$.
3. Déterminer une équation de la tangente à C au point d'abscisse $x = 0$; on note T_0 cette tangente.
4. courbe
 - a) Soit x un réel quelconque. Calculer $f(x) + f(-x)$.
 - b) Quelle propriété de symétrie peut-on déduire de la question précédente
 - c) Tracer (C) , ses asymptotes et la tangente T_0

Partie B

- 1.a) Soit $U(x) = 1 + e^{-x}$. Calculer $U'(x)$.
- b) En déduire la primitive F de f qui prend la valeur : $-\ln 2$ en $x = 0$.
- 2.a) On pose $A = \int_0^1 f(x) dx$. Calculer A .
- b) Déterminer le réel C tel que $A = \ln C$
3. Pour tout entier naturel n non nul on pose

$$V_n = \int_{\frac{1}{n}}^{1+\frac{1}{n}} f(x) dx.$$

- a) Exprimer V_n en fonction de n .
- b) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n$.

Sujet N° 8:

Exercice

On considère les suites (x_n) et (y_n) définies par :

$$x_0 = 1 ; y_0 = 8 \text{ et}$$

$$\begin{cases} x_{n+1} = \frac{7}{3}x_n + \frac{1}{3}y_n + 1 \\ y_{n+1} = \frac{20}{3}x_n + \frac{8}{3}y_n + 5 \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}$$

1. Montrer, par récurrence, que les points M_n de coordonnées $(x_n; y_n)$ sont sur la droite (Δ) dont une équation est $5x - y + 3 = 0$. En déduire que $x_{n+1} = 4x_n + 2$.
2. Montrer, par récurrence, que tous les x_n sont des entiers naturels. En déduire que tous les y_n sont aussi des entiers naturels.
3. Montrer que :

a) x_n est divisible par 3 si et seulement si y_n est divisible par 3.

b) si x_n et y_n ne sont pas divisibles par 3, alors ils sont premiers entre eux.

4. a) Montrer, par récurrence, que

$$x_n = \frac{1}{3}(4^n \cdot 5 - 2).$$

b. En déduire que $4^n \cdot 5 - 2$ est un multiple de 3, pour tout entier naturel n .

Problème :

Partie A : On considère la fonction g définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (x-1)e^{x-1} - 1$

- 1.a) Justifier que la limite de g en $-\infty$ est -1
- b) Déterminer la limite de g en $+\infty$
- 2.a) Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $g'(x) = xe^{x-1}$
- b) Etudier le sens de variation de g et dresser son tableau de variation.
- 3.a) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in]\frac{3}{2}; 2[$
- b) Vérifier que $]1,56; 1,57[$

Sujets proposés (TSM)

Partie B: On considère la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x-2)e^{x-1} - x + 1$. On désigne par $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; i, j)$ unité graphique 2cm.

- 1) Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$
- 2.a) Démontrer que f est une primitive de g sur $\mathbb{R}$
- b) Etudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variation
- 3.a) Démontrer que la droite (D) d'équation $y = -x + 1$ est asymptote à la courbe de f en $-\infty$
- b) Etudier les positions relatives de $\mathcal{C}$ et (D)
- 4) Démontrer que $\mathcal{C}$ admet en $+\infty$ une branche parabolique dont on précisera la direction
- 5) Déterminer une équation de la tangente T à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse -1
- 6) Démontrer que $f(\alpha) = 2 - \alpha - \frac{1}{\alpha-1}$
- 7) Montrer que $f(\alpha)$ est négatif
- 8) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions strictement positives.
- 9) Tracer (D) , (T) et $\mathcal{C}$
- 10) Soit μ un élément de $] -\infty, 2[$ et $A(\mu)$ l'aire en cm^2 de la parité du plan délimitée par $\mathcal{C}$, la droite (D) d'équation $y = -x + 1$ et les droites d'équation $x = \mu$ et $x = 2$.
- a) A l'aide d'une intégration par partie, calculer $A(\mu)$
- b) Déterminer la limite de $A(\mu)$ lorsque μ tend vers $-\infty$

Partie C :

Soit h la restriction de f à l'intervalle $] -\infty, \alpha[$

- 1) Démontrer que h est une bijection sur un intervalle J à préciser.
- 2) Soit h^{-1} la bijection réciproque de h
 - a) Préciser l'ensemble de dérivabilité de h^{-1} , puis dresser son tableau de variation.
 - b) Construire la courbe $\mathcal{C}'$ de h^{-1} dans le même que $\mathcal{C}$.

SUJET N° 9

Exercice

2°) Dans le plan muni d'un repère orthonormé. On considère les points $A(-2; -1)$, $B(1; 5)$, $C(3; 1)$ et le cercle d'équation $(\delta): x^2 + y^2 + 2x - 4y - 24 = 0$

Déterminer trois nombres réels α, β et γ et la constante k tel que (δ) soit une ligne de niveau k de la fonction numérique de Leibniz associée au système $\{(A; \alpha), (B; \beta), (C; \gamma)\}$

Problème

Partie A : Etude d'une fonction f et construction de sa courbe

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$f(x) = e^{-x} \ln(1 + e^x)$. On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan rapporté au repère orthonormé (O, i, j) . L'unité graphique est 1 cm sur l'axe des abscisses et 10 cm sur l'axe des ordonnées.

- 1.a) On rappelle que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$. Déterminer la limite de f en $-\infty$
- b) Vérifier que pour tout réel x :
 $f(x) = \frac{x}{e^x} + e^{-x} \ln(1 + e^{-x})$. Déterminer la limite de f en $+\infty$
- c) En déduire que la courbe $\mathcal{C}$ admet deux asymptotes que l'on précisera
2. On considère la fonction g définie sur $] -1; +\infty[$ par
 $g(t) = \frac{t}{1+t} - \ln(1+t)$.
- a) Démontrer que la fonction g est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$
- b) En déduire le signe de $g(t)$ lorsque $t > 0$
- 3.a) Calculer $f'(x)$ et l'exprimer en fonction de $g(e^x)$,
- b) En déduire le sens de variation de la fonction f puis dresser son tableau de variation
4. Tracer les asymptotes à la courbe $\mathcal{C}$.

Partie B : Comportement asymptotique d'une primitive F de f sur $\mathbb{R}$

Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \int_0^x f(t) dt$

- 1) Etudier le sens de variation de la fonction F
- 2.a) Vérifier que, pour tout nombre réel t , $\frac{1}{1+e^t} = 1 - \frac{e^t}{1+e^t}$ et calculer $\int_0^x \frac{dt}{1+e^t}$
- b) En déduire, à l'aide d'une intégration par parties, le calcul de $F(x)$
- c) Vérifier que $F(x)$ peut s'écrire sous les formes suivantes
 - c1) $F(x) = x - \ln(1 + e^x) - f(x) + 2 \ln 2$
 - c2) $F(x) = \ln\left(\frac{e^x}{1+e^x}\right) - f(x) + 2 \ln 2$
- 3) Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$
- 4) Déterminer $\lim_{x \rightarrow -\infty} (F(x) - x)$. Donner une interprétation graphique de ce résultat

Partie C Etude d'une suite

Soit (U_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par

$$U_n = f(1) + f(2) + \dots + f(n) = \sum_{k=1}^n e^{-k} \ln(1 + e^k)$$

- 1) Hachurer sur la représentation graphique un domaine dont l'aire en unité d'aire est U_4
- 2) Déterminer le sens de variation de la suite (U_n)
- 3.a) Justifier que, pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq n$, on a

Sujets proposés (TSM)

$$f(k) \leq \int_{k-1}^k f(t)dt$$

b) Comparer U_n et $F(n)$

4) La suite (U_n) est-elle convergente ?

Sujet N° 10

Exercice :

Deux personnes, A et B, écrivent chacune au hasard un nombre entier compris entre 1 et 50. On note a et b les nombres écrits respectivement par A et B. On suppose que tous les couples (a ;b) tels que $1 \leq a \leq 50$ et $1 \leq b \leq 50$ sont équiprobables.

1. Déterminer les probabilités des événements suivants :

a) $a = b$

b) $a + b = 20$

c) $b \geq 15$

d) $b \geq a$

2. Si A et B font cinq fois la même expérience, quelle est la probabilité pour que l'évènement $b \geq a$ soit réalisé au moins deux fois ? Le résultat sera arrondi à l'ordre 2.

Problème :

Partie A : Résolution de l'équation différentielle (1):

$$y' - 2y = xe^x$$

1) Résoudre l'équation différentielle (2) : $y' - 2y = 0$, où y désigne une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

2) Soient a et b deux réels et soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = (ax + b)e^x$

a) Déterminer a et b pour que u soit solution de l'équation (1)

b) Montrer que v est une solution de l'équation (2) si et seulement si $u + v$ est solution de (1)

c) En déduire l'ensemble des solutions de (1)

3) Déterminer la solution de l'équation (1) qui s'annule en 0

Partie B : Etude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2e^x - x - 2$

1) Déterminer la limite de g en $-\infty$ et la limite de g en $+\infty$

2) Etudier le sens de variation de la fonction g, puis dresser son tableau de variation

3) On admet que l'équation $g(x) = 0$ admet exactement deux solutions réelles

a) Vérifier que 0 est l'une de ses solutions

b) L'autre solution est appelée α . Montrer que:
 $-1,6 \leq \alpha \leq -1,5$

4) Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs du réel x

Partie C : Etude de la fonction principale

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = e^{2x} - (x + 1)e^x$$

1) Déterminer la limite de f en $-\infty$ et la limite de f en $+\infty$ (on pourra mettre e^{2x} en facteur)

2) Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x)$ et $g(x)$ ont le même signe. Etudier le sens de variation de f.

3) Montrer que $f(\alpha) = -\frac{\alpha^2 + 2\alpha}{4}$, où α est défini dans la

partie B. En déduire un encadrement de $f(\alpha)$, (On rappelle que : $-1,6 \leq \alpha \leq -1,5$)

4) Etablir le tableau de variation de f

5) Tracer la courbe $\mathcal{C}$, représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé (unité graphiquement 2cm)

Partie D : Calculer d'aire

1) Soit m un réel négatif. Interpréter graphiquement l'intégrale $\int_m^0 f(x)dx$. (On justifiera la réponse)

2.a) Calculer $\int_m^0 xe^x dx$ à l'aide d'une intégration par parties

b) En déduire $\int_m^0 f(x)dx$

3) Calculer la limite de $\int_m^0 f(x)dx$, lorsque m tend vers $-\infty$

Sujet N° ; 11

Exercice :

Une urne contient 6 boules rouges et 4 boules blanches indiscernables au toucher. On donnera les résultats sous forme de fractions irréductibles.

1. On tire au hasard une boule de l'urne. Calculer la probabilité d'obtenir une boule blanche.

2. On tire simultanément deux boules de l'urne. Calculer la probabilité de tirer deux boules de même couleur.

3. On tire une boule de l'urne, on note sa couleur et on la remet dans l'urne. On fait cette expérience 4 fois.

a) Calculer la probabilité de tirer exactement deux boules rouges.

b) Calculer la probabilité de tirer au moins une boule blanche.

Problème :

Le but de ce problème est d'étudier la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par :

$f(x) = -5e^{-2x} + 7e^{-x} + x - 1$. On désigne par $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, i, j) (unité graphique 2cm).

Partie A : Résolution d'une inéquation

1. Résoudre, dans l'ensemble des nombres réels,

l'inéquation: $10y^2 - 7y + 1 \leq 0$

2. Déduire de la question précédente que l'ensemble des nombres réels x tels que : $10e^{-2x} - 7e^{-x} + 1 \leq 0$ est l'intervalle $[\ln 2 ; \ln 5]$, (on pourra poser $e^{-x} = y$).

Partie B : Etude de la fonction f

Sujets proposés (TSM)

1. Calculer $f'(x)$. Etudier, en utilisant la **partie A**, le signe de $f'(x)$.
2. Déterminer la limite de f en $+\infty$
3. Donner les valeurs exactes, puis les valeurs décimales approchées à 10^{-2} près par défaut de $f(\ln 2)$ et de $f(\ln 5)$.
4. Dresser le tableau de variation de f
5. Donner le coefficient directeur de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}$ en son point d'abscisse 0

Partie C : Tracé de la courbe représentative de $\mathcal{C}$

1. Déterminer la limite de $f(x) - (x - 1)$ lorsque x tend vers $+\infty$. En déduire que la courbe $\mathcal{C}$ possède une asymptote oblique D dont on donnera une équation.
- 2 En remarquant que : $f(x) - (x - 1) = e^{-2x}(7e^x - 5)$, démontrer que la courbe $\mathcal{C}$ est au-dessus de la droite D . (On rappelle que x est un nombre positif)
3. A l'aide de la calculatrice, donner des valeurs décimales approchées à 10^{-2} près de $f(0,5)$, $f(1)$; $f(2)$; $f(3)$, $f(4)$ et $f(6)$. On présentera les résultats sous forme d'un tableau.
4. Tracer sur une figure, le repère (o, i, j) , la tangente T définie dans la **partie B**, la droite D et la courbe $\mathcal{C}$

Sujet N° 12

Exercice : Soit f la transformation du plan qui à tout point $M(x; y)$ associe le point $M'(x'; y')$ tel

$$\text{que : } \begin{cases} x' = x + \sqrt{3}y \\ y' = -\sqrt{3}x + y \end{cases}$$

1. Préciser la nature et les éléments caractéristiques de f .
2. Soit C l'ellipse d'équation : $4x^2 + y^2 = 4$. Déterminer une équation de C' , image de C par f .
3. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de C' . Tracer C et C' .

Problème

Partie A : Soit (E) l'équation différentielle définie par :

$$y'' - 4y' + y = x^2 - 8x + 1$$

- 1) Résoudre l'équation (E') : $y'' - 4y' + y = 0$
- 2) Déterminer un polynôme du second degré $P(x)$ solution de (E)
- 3) Montrer que f est solution de (E) si et seulement si $f - P$ est solution de (E')
- 4) En déduire la solution sur $\mathbb{R}$ de (E) puis celle qui vérifie les conditions $\begin{cases} y(0) = -1 \\ y'(0) = -1 \end{cases}$

Partie B : On considère la fonction h sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = -4(x + 1)e^{2x} + 2$$

- 1) Calculer les limites de h en $-\infty$ et en $+\infty$
- 2) Calculer la dérivée de h , puis dresser son tableau de variations

3.a) Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique α

b) Vérifier que : $-0,3 < \alpha < -0,2$

c) En déduire que : $\begin{cases} \forall x \in]-\infty; \alpha[; h(x) > 0 \\ \forall x \in]\alpha; +\infty[; h(x) < 0 \end{cases}$

Partie C

On considère la fonction g sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = (-2x - 1)e^{2x} + 2x$$

- 1) Calculer les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$
- 2) Démontrer que $g'(x) = h(x)$
- 3.a) Montrer que la tangente (T) à (Cg) au point d'abscisse 0 a pour équation $y = -2x - 1$
- b) Etudier la position relative de (T) et (Cg), (on étudiera les variations de la fonction $g(x) - (-2x - 1)$)
- 4.a) Montrer que la droite (D) d'équation $y = 2x$ est une asymptote à (Cg) en $-\infty$
- b) Etudier la position relative de (D) et (Cg)
- 5) Montrer que $g(\alpha) = 2\alpha - 1 + \frac{1}{2\alpha + 2}$
- 6) A partir de l'encadrement de α dans la **Partie B**, donner un encadrement de $f(\alpha)$
- 7) Dresser le tableau de variation de g
- 8) En déduire que $g(x) < 0$
- 9) Construire la courbe représentative de g (Cg), (T) et (D)

Partie D : On considère la fonction f sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -xe^{2x} + x^2 - 1$$

- 1) Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$
- 2) Démontrer que $f'(x) = g(x)$; en déduire les variations de f
- 3.a) Montrer que la parabole (P) d'équation $y = x^2 - 1$ est asymptote à (Cf.) en $-\infty$
- b) Etudier la position relative de (P) et (Cf.)
- 4) Montrer que la tangente (T') à (Cf) au point d'abscisse 0 a pour équation $y = -x - 1$
- 5) Construire la courbe représentative de f (Cf), (T') et (P) dans le même repère
- 6) On considère par f^{-1} la bijection réciproque de f sur $\mathbb{R}$
- a) Calculer $f(0)$

Sujets proposés (TSM)

- b) Démontrer que le nombre dérivée de f^{-1} en -1 existe
- c) Calculer $(f^{-1})'(-1)$
- d) Construire sur le même graphique la courbe de f^{-1}

Partie E : On considère par F l'intégrale définie par :

$$F(x) = -\int_0^1 f(x)dx$$

- a) Etudier l'existence de F(x)
- b) Donner la nature de F(x)
- c) Calculer alors F(x) en cm².

SUJET N° 13

Exercice

1. Trouver suivants les valeurs de l'entier n, le reste de la division de 4^n par 7.
2. Justifier que : $1999 \equiv 4[7]$
3. En déduire le reste de la division par 7 de $(1999)^{132}$.
4. Soit l'entier B_α tel que :
 $B_\alpha = 123^\alpha + 123^{2\alpha} + 123^{3\alpha} + 123^{4\alpha} + 123^{5\alpha}$. Discuter suivant les valeurs de l'entier naturel α , le reste de la division euclidienne de B_α par 7.
- 5a) Quels sont les entiers naturels dont le carré est un diviseur de 1998 ?
- b) Pour tout couple (a ; b) d'entiers naturels on a :
 $PPCM(a; b) = \mu$ et $PGCD(a; b) = \delta$
 Déterminer les couples (a ; b) tel que : $\mu^2 - 3\delta^2 = 1998$

Problème :

On considère la fonction f définie sur R par $(x) = \frac{e^x - 1}{xe^x + 1}$.

On désigne par $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal (o ; i ; j).

Partie A :

1. Soit h la fonction définie sur R par : $h(x) = xe^x + 1$. Etudier le sens de variation de h et démontrer que $h(x) > 0 \forall x \in R$
2. Soit g la fonction définie sur R par $g(x) = x + 2 - e^x$
 - a) Déterminer les limites de g en $-\infty$ et $+\infty$
 - c) Etudier le sens de variation de g et dresser son tableau de variation
 - d) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet deux solutions sur R. On note α et β ces deux solutions, sachant que $\alpha > \beta$. Prouver que $1.14 < \alpha < 1.15$.
 - e) En déduire le signe de $g(x)$ suivants les valeurs de x

Partie B :

1. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$, puis interpréter graphiquement les résultats.

2.a) Montrer que $\forall x \in R, f'(x) = \frac{e^x g(x)}{(xe^x + 1)^2}$

- b) En déduire le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.

3.a) Montrer que $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha + 1}$

- b) En utilisant l'encadrement de α établi dans la Partie A, déterminer un encadrement de $f(\alpha)$ d'amplitude 0.01.

4. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.

5.a) Etablir que $\forall x \in R, f(x) - x = \frac{(x+1)u(x)}{xe^x + 1}$ avec

$$u(x) = e^x - xe^x - 1$$

- b) Etudier le sens de variation de la fonction U et en déduire le signe de $u(x)$.

- c) Déduire des questions précédentes, la position de $\mathcal{C}$ par rapport à la droite (T).

6. Tracer $\mathcal{C}$ et (T). On prendra pour unité graphique 2cm sur l'axe des abscisses et 5cm sur l'axe des ordonnées.

On pourra admettre que $-1.85 < \beta < -1.84$ et $-1.19 < f(\beta) < -1.18$.

SUJET N° 14

Exercice

1. En utilisant l'algorithme d'Euclide, déterminer le PGCD(231 ; 3311)
 2. Soit n un entier naturel supérieur à 2. On pose :

$$\begin{cases} A(n) = 1 + 2 + 3 + \dots + n \\ B(n) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 \end{cases}$$
- On rappelle que : $A(n) = \frac{n(n+1)}{2}$

- a) Montrer par récurrence que $B(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- b) On suppose que n est un multiple de 3. Déterminer dans ce cas le PGCD de $A(n)$ et $B(n)$
- c) Vérifier le résultat obtenu dans le cas ou n = 21.

Problème

On considère la fonction f définie sur $] -1 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = 2x \ln(x+1) + \frac{x^2 + 2x + 3}{x+1}$$

Partie A

On considère la fonction g définie sur $] -1 + -\infty[$ par :

$$g(x) = 2 \ln(x+1) + \frac{3x^2 + 4x - 1}{(x+1)^2}$$

- 1) Calculer la limite de g en -1 et en $+\infty$
- 2) Etudier les variations de la fonction g
- 3.a) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in] -1 + -\infty[$
- b) Justifier que : $0,1 < \alpha < 0,2$;
 $g(0,1) \approx -0,28$ et $g(0,2) \approx 0,3$
- 4) En déduire que : $\begin{cases} \forall x \in] -1 ; \alpha[& g(x) < 0 \\ \forall x \in] \alpha ; +\infty[& g(x) > 0 \end{cases}$

Sujets proposés (TSM)

Partie B

- 1) Calculer la limite de f en -1 et en $+\infty$. En déduire une interprétation graphique du résultat.
- 2) Montrer que $\forall x \in]-1; +\infty[; f'(x) = g(x)$
- 3) Etudier les variations de la fonction f
- 4) Montrer que $f(\alpha) = -2\alpha + 3 + \frac{2\alpha}{(\alpha+1)^2}$
- 5) Donner un encadrement de $f(\alpha)$ à 10^{-1} près et prouver que $f(\alpha) > 0$. En déduire que $f(x) > 0$.
- 6) Montrer que la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 1 a pour équation $y = \left(2\ln 2 + \frac{3}{2}\right)x + \frac{3}{2}$
- 7) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$, donner une interprétation graphique du résultat.
- 8) Tracer (C) et (T)

Partie C

On considère la fonction h définie sur $] -1; +\infty[$ par : $h(x) = (x^2 + 1) \ln(x + 1) + 2x + 1$

- 1) Montrer que h est une primitive de f
- 2) Calculer la limite de h en -1 et en $+\infty$. En déduire les variations de la fonction h .
- 3) Calculer l'aire du domaine du plan limité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 2$.
- 4) Construire la courbe (C_h) dans le même repère
- 5.a) Montrer que (C_h) réalise une bijection de $] -1; +\infty[$ vers $\mathbb{R}$
- b) Construire la courbe $(C_{h^{-1}})$ dans le même repère.

Partie D

Soit (S) l'application du plan dans lui-même définie par : $Z' = Z + 1$

- 1) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de (S)
- 2) Déterminer l'expression analytique de (S)
- 3) Déterminer l'image de (T) par (S)
- 4) Démontrer que l'image de f par (S) est la courbe (D) d'équation :

$$y = 2(x + 1) \ln x + \frac{x^2 + 2}{x}$$

- 5.a) Montrer que $f(x - 1) = y$. Que peut-on déduire
- b) Tracer (D) sans étudier

SUJET N° 15

Exercice:

On considère l'équation (E) : $Z \in \mathbb{C}$,

$$Z^3 + (1 - 8i)Z^2 - (23 + 4i)Z - 3 + 24i = 0.$$

- 1.a) Démontrer que (E) admet une solution imaginaire pure que l'on déterminera.
- b) Résoudre l'équation (E).

2. Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $1+2i$, $3i$, $-2+3i$. Soit G le barycentre des points A, B et C affectés des coefficients respectifs 2, -2 et 1.

a) Déterminer puis écrire sous la forme trigonométrique les affixes des vecteurs $\overrightarrow{GA}$, $\overrightarrow{GB}$ et $\overrightarrow{GC}$.

b) Démontrer que les affixes des vecteurs $\overrightarrow{GA}$, $\overrightarrow{GB}$ et $\overrightarrow{GC}$ sont des termes d'une suite géométrique dont on déterminera la raison.

c) En déduire qu'il existe une similitude directe qui transforme A en B et B en C. Déterminer les éléments caractéristiques de cette similitude.

Problème :

Partie A : On considère la fonction numérique g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 2e^{2x} - 5e^x + 2$

1. Etudier les variations de g .
2. Résoudre l'équation $g(x) = 0$.
3. En déduire suivant les valeurs de x , le signe de $g(x)$.

Partie B :

On considère la fonction numérique f définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = 1 + 2x + \frac{e^x}{e^x - 1}$. Le plan P est rapporté à un repère orthogonal (o ; i ; j) d'unité graphique 2cm sur l'axe des abscisses et 1cm sur l'axe des ordonnées. On note C la courbe représentative de f dans ce plan.

1) Vérifier que, pour tout x de $]0; +\infty[$,

$$f(x) = 2 + 2x - \frac{1}{1 - e^x}.$$

2) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$. Que peut-on déduire pour la courbe C ?

3) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

4.a) f' étant la dérivée de f , montrer que $f'(x)$ peut s'écrire, pour tout x de $]0; +\infty[$, $f'(x) = \frac{g(x)}{(1 - e^x)^2}$

b) En déduire le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x , et le tableau de variation de f .

5) Montrer que la droite Δ d'équation $y = 2x + 2$ est asymptote à la courbe C. Préciser la position de C par rapport à Δ .

6) Construire C et Δ dans le repère (o, i, j).

Partie C : On donne la fonction numérique F définie sur $]0; +\infty[$ par : $F(x) = x + x^2 + \ln(e^x - 1)$.

1) Démontrer que F est une primitive de f sur $]0; +\infty[$

2) Démontrer que la valeur exacte, en cm^2 , de l'aire A de la partie du plan limitée par la courbe C, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = \ln 2$ et $x = \ln 3$ est $A = 2[\ln 3 + (\ln 3)^2 - (\ln 2)^2]$. On donnera ensuite une valeur décimale approchée à 0,01 près de l'aire A.

Sujets proposés (TSM)

Sujet N° 16

Exercice :

Une automobile rencontre sur son trajet cinq feux tricolores. Pour chacun de ces feux, le rouge dure 15 secondes, les jaunes 5 secondes et le vert 40 secondes. Les cinq feux ne sont pas synchronisés et l'on suppose les aléas de la circulation sont tels que l'état d'un feu devant lequel se présente l'automobile ne dépend pas de l'état des autres feux rencontrés.

1. L'automobile se présente devant un feu. Quelle est la probabilité pour que le feu soit vert ?
2. Déterminer la probabilité pour que l'automobile sur l'ensemble de son trajet rencontre exactement trois fois le feu vert sur les cinq feux rencontrés.
3. On considère la variable aléatoire X qui prend pour valeur le nombre de feux verts rencontrés lors d'un trajet. Déterminer la loi de probabilité de X et calculer l'Espérance mathématique $E(X)$ de la variable aléatoire X .

Problème

Partie A : On appelle (E) l'équation différentielle $y'' - y = 0$, où y est une fonction numérique définie et deux fois dérivable sur l'ensemble R des nombres réels.

- 1) Déterminer les réels r tels que la fonction h , définie par $h(x) = e^{rx}$, soit solution de (E)
- 2) Vérifier que les fonctions φ définies par $\varphi(x) = \alpha e^x + \beta e^{-x}$, où α et β sont deux nombres réels, solutions de l'équation (E). On admet qu'on obtient ainsi toutes les solutions de (E).
- 3) Déterminer la solution particulièrement de (E) dont la courbe représentative passe par le point de coordonnées $(\ln 2; \frac{3}{4})$ et admet en ce point une tangente dont le coefficient directeur est $\frac{5}{4}$

Partie B : On appelle f la fonction définie sur l'ensemble R des nombres réels par : $f(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$. On

désigne par C la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal (O, i, j)

- 1) Soit μ un réel. Montrer que, pour tout réel x , $f(x) = \mu$ équivaut à $e^{2x} - 2\mu e^x - 1 = 0$. En déduire que l'équation $f(x) = \mu$ a une solution unique dans R et déterminer sa valeur en fonction de μ
- 2.a) Déterminer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$
- b) Calculer $f'(x)$ pour tout nombre réel x et en déduire le sens de variation de f sur R .
- 3.a) Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 0.
- b) En étudiant le sens de variation de la fonction d définie sur R par $d(x) = f(x) - x$, préciser la position de (C) par rapport à (T)
- c) Tracer (C) et (T). (Unité graphique 2cm)
- 4) Soit D la partie représentant sur le graphique l'ensemble des points M de coordonnées (x, y) tels que :

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ x \leq y \leq f(x) \end{cases} \text{ calculer, en cm}^2, \text{ l'aire de } D$$

Partie C

On cherche à caractériser les fonctions θ , dérivables sur l'ensemble des nombres réels, telles que, pour tout réel x $\theta(x) - \int_0^x (x-t)\theta(t) dt = x$ (H)

- 1) On suppose qu'il existe une telle fonction θ
- a) Justifier que, pour tout nombre réel x , $\theta(x) = x + x \int_0^x \theta(t) dt - \int_0^x t\theta(t) dt$. Calculer $\theta(0)$
- b) Démontrer que, pour tout nombre réel x , $\theta'(x) = 1 + \int_0^x \theta(t) dt$. Calculer $\theta'(0)$
- c) Vérifier que θ est une solution de l'équation différentielle (E) de la partie A. Déterminer laquelle parmi toutes les solutions explicitées dans la question A.2
- 2.a) A l'aide d'une intégration par parties, calculer $\int_0^x t(e^t - e^{-t}) dt$

Sujets proposés (TSM)

b) Démontrer que la fonction trouvée à la question 1.C vérifie bien la relation (H)

Sujet N° 17

Exercice

Une urne contient quatre jetons marqués respectivement 1 ; 2 ; 3 et m ($m \in \mathbb{R}^*$). On tire au hasard un jeton dans l'urne. On note $P_1, P_2 ; P_3$ et P_m les probabilités respectives de tirer les jetons marqués 1 ; 2 ; 3 et m .

$P_1 ; P_2 ; P_3$ et P_m constituent dans cet ordre une suite arithmétique de raison $\frac{1}{8}$

1.a) Montrer que $P_1 = \frac{1}{36}$

b) Calculer $P_2 ; P_3$ et P_m

2. On considère X , la variable aléatoire qui, à chaque tirage, associe le nombre marqué sur le jeton tiré

a) Définir la loi de probabilité de X

b) Calculer m sachant que l'Espérance mathématique de X vaut 2.

Problème :

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + xe^{-x} \text{ et } g(x) = \frac{1}{2}x^2 - x.$$

On notera C_f et C_g les courbes représentatives de ces fonctions dans un repère orthonormé (unité graphique 2cm)

Partie A : Etude de f aux bornes de son intervalle de définition

1. Montrer que $f(x)$ peut s'écrire, pour tout x de $\mathbb{R}$, sous la forme $f(x) = xe^{-x}(\frac{1}{2}xe^x - e^x + 1)$; en déduire la limite en $-\infty$ de f .

2.a) Déterminer la limite en $+\infty$ de f

b) On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par

$$h(x) = f(x) - g(x). \text{ Déterminer la limite en } +\infty \text{ de } h.$$

Donner une interprétation graphique de ce résultat

c) En utilisant le signe de $h(x)$, étudier la position relative des courbes C_f et C_g .

Parité B : Sens de variation de f et représentation graphique

1.a) Calculer la dérivée f' de f . Montrer que pour tout nombre réel x , $f'(x) = (x - 1)(1 - e^{-x})$. Étudier le signe de $f'(x)$

b) Dresser le tableau de variation de f .

2) Donner le tableau de variation de g .

3) Tracer C_f et C_g

Partie C : Calcul d'une aire

1) Étant donnés deux nombres réels a et b , on considère la fonction H définie sur $\mathbb{R}$ par $H(x) = (ax + b)e^{-x}$.

Déterminer les valeurs de a et b pour que H soit une primitive de la fonction h sur $\mathbb{R}$.

2) On considère la partie du plan limitée par les deux courbes C_f et C_g et les droites d'équation $x = 2$ et $x = 6$. Calculer l'aire A , exprimée en cm^2 , de ce domaine. (On donnera sa valeur exacte puis son approximation décimale à 10^{-2} près, par défaut).

SUJET N°18

EXERCICE

On considère la suite (U_n) définie par

$$\begin{cases} U_0 = 0; U_1 = 1 \\ \forall n \geq 1; U_{n+1} = 7U_n + 8U_{n-1} \end{cases}$$

1. Montrer que la suite (S_n) définie par :

$S_n = U_n + U_{n-1}$ est une suite géométrique dont on précisera la raison. En déduire S_n en fonction de n

2. On pose $V_n = (-1)^n U_n$ et on considère la suite (t_n) définie par : $t_n = V_{n+1} - V_n$. Exprimer t_n en fonction de S_{n+1}

3. Exprimer V_n , puis U_n en fonction de n (on pourra calculer de deux manières, la somme $t_0 + t_1 + \dots + t_n$).

Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{U_n}{8^n}$.

Problème

PARTIE A : Etude d'une fonction f

On définit la fonction f sur $]0, +\infty[$ par

$$f(x) = \ln(\sqrt{1+x} - 1).$$

1. Calculer les limites de f en 0 et en $+\infty$

2. Étudier le sens de variation de f sur $]0, +\infty[$

3. Soit C la courbe représentative de f dans $(O; u; v)$ et A le point de C d'abscisse 3. Calculer l'ordonnée de A . Soit B le point de C d'abscisse $\frac{5}{4}$, P le projeté orthogonal de B sur l'axe (O, u) et H le projeté orthogonal de B sur l'axe (O, v) .

Déterminer les valeurs exactes des coordonnées des points B , P et H . Placer les points A , B , P et H dans le repère (O, u, v) et représenter la courbe C

Partie B : Utilisation d'une rotation

Soit r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$. À tout point M du plan d'affixe z , la rotation r associe le point M' d'affixe z' .

1.a) Donner z' en fonction de z . On note $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ ou (x, y, x', y') réels, exprimer x' et y' en fonction de x et y , puis exprimer x et y en fonction de x' et y' .

b) Déterminer les coordonnées des points A' , B' et P' l'image respectives des points A , B et P par la rotation r .

2. On appelle g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

Sujets proposés (TSM)

$g(x) = e^{-2x} + 2e^{-x}$ et φ sa courbe représentative dans le repère (o,u,v)

- a) Montrer que lorsqu'un point M appartient à C, son image M' par r appartient à φ . On admet que lorsque le point M décrit C, le point M' décrit φ .
- b) Tracer sur le graphique précédent les points A', B', P' et la courbe φ (l'étude des variations de g n'est pas demandée).

Partie C : Calcul d'intégrales

On rappelle que l'image d'un domaine plan par une rotation est un domaine plan de même aire.

1. Calculer l'intégrale $\int_0^{\ln 2} g(x) dx$. Interpréter graphiquement cette intégrale.
- 2.a) Déterminer, en unité d'aire, l'aire A du domaine plan D limité par les segments [AO], [OH] et [HB] et l'arc de courbe C d'extrémités B et A.
- b) On pose $I = \int_{5/4}^3 \ln(\sqrt{1+x} - 1) dx$. Trouver une relation entre A et I puis en déduire la valeur exacte de l'intégrale I.

SUJET N°19

Exercice

1. On considère dans l'ensemble C des nombres complexes, l'équation :
(E) : $Z^4 + (-5 + 3i)Z^3 + (8 - 9i)Z^2 + (-14 + 6i)Z + 10 = 0$
a) Vérifier que 1 et i sont des solutions évidentes de (E)
b) Résoudre l'équation (E)
2. Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct (O, $\vec{u}, \vec{v}$), on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives 1, i, $1 - 3i$ et $3 - i$.
a) Placer ces points dans le repère (O, $\vec{u}, \vec{v}$)
b) Soit S la similitude directe qui transforme A en C et B en D.
b1) Déterminer l'écriture complexe de S.
b2) Donner les éléments caractéristiques de S (centre Ω , rapport k et d'angle θ)
3. On considère la suite de points M_n d'affixe Z_n ($n \in \mathbb{N}$) avec $Z_0 = i$ et
 $Z_{n+1} = -2iZ_n + 1 - i$.
a) Calculer $\frac{Z_{n+1} - \omega}{Z_n - \omega}$ ou ω est l'affixe du centre Ω de la similitude S

En déduire la nature du triangle $\Omega M_n M_{n+1}$

- b) Démontrer que la suite (U_n) , $n \in \mathbb{N}$ définie par la relation : $U_n = |Z_{n+1} - Z_n|$ est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
- c) Exprimer en fonction de n la longueur $d_n = M_0 M_1 + M_1 M_2 + \dots + M_{n-1} M_n + M_n M_{n+1}$ avec $n \geq 2$

Problème

Partie A

On considère la fonction numérique de f définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par : $f(x) = x + 1 - (2x + 1)\ln x$ ou ln est la fonction logarithme népérien.

- 1°a) Calculer les fonctions $f'(x)$ et $f''(x)$ dérivées première et seconde de f.
- b) Déterminer le sens de variation de f'. En déduire que pour tout réel x strictement positif $f'(x) < 0$.
- 2°a) Indiquer le sens de variation de f
- b) Déterminer les limites de f aux bornes de l'intervalle de définition.
- c) Démontrer qu'il existe un et un seul nombre réel α tel que $f(\alpha) = 0$. Justifier que 1,83 est une valeur décimale approchée de α à 10^{-2} par défaut.
- d) Donner les signes de f(x) selon les valeurs de x.

Partie B

Etude de la fonction numérique g définie sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = \frac{\ln x}{x^2 + x}$

On désigne par (C) la courbe représentative de g dans le plan rapporté au repère orthonormé (o, i, j) d'unité 4cm sur (ox) et 12 cm sur (oy).

- 1°a) Déterminer le sens de variation de g (on montrera que $g'(x)$ a le même signe que $f(x)$). Vérifier que $g(\alpha) = \frac{1}{\alpha(2\alpha+1)}$ (α est le nombre réel défini dans la

partie A)

- b) Déterminer les limites de g aux bornes de l'intervalle de définition. Interpréter graphiquement ces résultats.
- 2°) Tracer la courbe (C) et sa tangente au point d'abscisse 1.

Parti C

Majoration de l'intégrale

$$I(\theta) = \int_1^\theta \frac{\ln x}{x^2 + 1} dx \text{ ou } \theta \text{ est un reel telque } \theta > 1$$

- 1°) Donner l'interprétation générale de $I(\theta)$.
- 2°a) Montrer que $I(\theta) \leq \int_1^\theta \frac{\ln x}{x^2} dx$
- b) A l'aide d'une intégration par partie calculer $\int_1^\theta \frac{\ln x}{x^2} dx$.
En déduire que pour tout réel θ élément de $[1; +\infty[$, $I(\theta) < 1$.

SUJET N 20

Sujets proposés (TSM)

Exercice

Soit la suite U_n définie par :

$$U_1 = -1 \text{ et } U_{n+1} = \frac{n}{2(n+1)} U_n + \frac{3(n+2)}{2(n+1)} \text{ pour } n > 0$$

1. Montrer, en raisonnant par récurrence, que la suite U_n est majorée par 3
2. Etudier le sens de variations de la suite U_n
3. On considère la suite V_n définie pour tout entier naturel n non nul : $V_n = n(3 - U_n)$. Montrer que V_n est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
4. Exprimer V_n puis U_n en fonction de n .

Problème :

On considère la fonction numérique f de la variable réelle

$$x \text{ définie par } f(x) = \frac{e^x}{x+2}$$

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (o, i, j) , l'unité graphique étant égale à 2cm.

1.a) Déterminer l'ensemble de définition de f . Etudier les limites de f aux bornes du Df. Préciser les asymptotes de la courbe (C).

b) Etudier les variations de f ; dresser son tableau de variation. Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0.

c) Construire avec soin (T) et la courbe (C).

2. On se propose de montrer que l'équation $f(x) = x$ admet sur $[0; 1]$ une solution unique.

a) Etudier les variations de la fonction dérivée f' sur $[0; 1]$. Démontrer que pour tout x de l'intervalle $[0; 1]$, on a :

$$\frac{1}{4} < f'(x) < \frac{2}{3}$$

b) Etudier les variations de la fonction numérique g définie sur $[0; 1]$ par $g(x) = f(x) - x$. Démontrer que l'équation $f(x) = x$ dans $[0; 1]$ une solution unique α . Vérifier que :

$$\frac{1}{4} \leq \alpha \leq \frac{e}{3}$$

3. On se propose de déterminer une valeur approchée de α .

Soit (U_n) la suite définie par :
$$\begin{cases} U_0 = \frac{1}{2} \\ \forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$$

a) Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{2} \leq U_n \leq \frac{e}{3}$

b) En utilisant l'inégalité des accroissements finis, démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N} |U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{2}{3} |U_n - \alpha|$.

En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N} |U_n - \alpha| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n |U_0 - \alpha| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$$

c) Démontrer que la suite (U_n) est convergente. Quelle est sa limite ?

d) Déterminer un entier n_0 tel que : Si $n \geq n_0$, alors

$$|U_n - \alpha| \leq 10^{-2}$$

4. Ne connaissant pas de primitive de la fonction f

sur $\left[0; \frac{1}{2}\right]$, on se propose de déterminer un encadrement de

$$\text{l'intégrale } I = \int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx.$$

a) Justifier l'existence de I et en donner une interprétation graphique.

b) On pose $J = \int_0^{\frac{1}{2}} (2-x)e^x dx$ et $K = \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 f(x) dx$.

Vérifier que : $4I = J+K$.

c) Calculer J .

d) Quelle est l'image par f du segment $\left[0; \frac{1}{2}\right]$?

En déduire un encadrement de K par deux intégrales simples que l'on calculera.

a) A l'aide des questions précédentes, écrire un encadrement de l'intégrale I . En déduire un encadrement de I , d'amplitude 10^{-2} par des nombres décimaux.

SUJET N° 21

Exercice

Une variable aléatoire X prend les valeurs : 1; -1 et 2 avec les probabilités respectives : e^a, e^b et e^c ou a, b et c sont en progression arithmétique. On suppose que l'espérance mathématique $E(X) = 1$.

1. Calculer a, b et c et la variance $V(X)$.

2. Soit A, B et C trois points d'abscisses respectifs : 1; -1 et 2 d'une droite graduée (D)

a) Calculer l'abscisse du point G barycentre de $\{(A; 1), (B; 2), (C; 4)\}$

b) On pose : $\varphi(M) = \frac{1}{7}(MA^2 + 2MB^2 + 4MC^2)$, ou M est un point de (D). Montrer que $\varphi(G) = V(X)$.

c) Déterminer l'ensemble (T) des points M de (D) tels que $\varphi(M) = 3$

Problème :

On considère la fonction f dérivable sur l'intervalle

$$]0; +\infty[\text{ et définie par : } f(x) = \frac{1}{2}x - 1 + \frac{2\ln x}{x}. \text{ (C) est la}$$

représentation graphique de f dans le repère orthonormé (o, i, j) . Unité 2cm.

Partie A

On considère la fonction u dérivable sur l'intervalle

$$]0; +\infty[\text{ et définie par } u(x) = x^2 + 4 - 4\ln x$$

1. Etudier les variations de u .

2. Justifier que $\forall x \in]0; +\infty[, u(x) > 0$

Partie B

1. Calculer la limite de f en 0 et interpréter graphiquement le résultat.

Sujets proposés (TSM)

- 2.a) Calculer la limite de f en $+\infty$
- b) Démontrer que la droite (D) d'équation $y = \frac{1}{2}x - 1$ est asymptote à (C) en $+\infty$
- 3.a) Vérifier que $\forall x \in]0; +\infty[, f(x) = \frac{U(x)}{2x^2}$
- b) En déduire le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.
- 4.a) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution α telle que $1 < \alpha < e$
- b) Déterminer une valeur approchée à 10^{-1} près de α
- 5.a) Démontrer qu'il existe un point A de (C) où la tangente (T) est parallèle à la droite (D).
- b) Donner les coordonnées du point A.
- c) Etudier la position relative de (D) par rapport à (C)
- d) Construire (T), (D) et (C).

SUJET N° 22

Exercice

On lance deux dés non pipés, dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et on désigne par X la variable aléatoire qui, à chaque lancer associe la valeur absolue de la différence des nombres obtenus.

- Déterminer la loi de probabilité de X
- Définir la fonction de répartition de X et tracer sa courbe représentative.
- Calculer l'espérance mathématique et l'écart type de X .

Problème

La partie A est l'étude d'une fonction auxiliaire g nécessaire à l'étude de la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1+\ln x}{x}$. L'étude de la fonction f fait l'objet de la partie B. La partie C est l'étude de deux suites numériques associées.

Partie A

On considère la fonction numérique g définie sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = x^2 - 2\ln x$

- Etudier le sens de variation de g .
- En déduire le signe de $g(x)$ sur $]0; +\infty[$.

Partie B

On considère la fonction numérique f définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1+\ln x}{x}$. On appelle (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; i; j)$ (unité graphique 2cm).

- Déterminer la limite de f en 0. Interpréter graphiquement le résultat.
- a) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

- b) Déterminer, sur $]0; +\infty[$, la position de (C) par rapport à la droite (D) d'équation $y = \frac{x}{2}$. Montrer en particulier que (D) coupe (C) en un point A que l'on déterminera.
- 3°) Etudier le sens de variation de f . Dresser le tableau de variation de f .
- 4) Montrer qu'il existe un point B, et un seul, de la courbe (C) où la tangente (T) à (C) est parallèle à (D). Préciser les coordonnées de B.
- 5) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ a une solution unique α . Justifier l'encadrement : $0,34 < \alpha < 0,35$.
- 6) Tracer la courbe (C) et les droites (D) et (T).1

Partie C

On considère la fonction numérique x_n définie par $x_n = e^{\frac{n-2}{2}}$ pour tout nombre entier naturel n .

- a) Montrer que x_n est une suite géométrique dont on déterminera le premier terme et la raison.
 - b) Montrer que x_n est une suite croissante.
- 2°) Pour tout entier naturel n , on pose :

$$a_n = 4 \int_{x_n}^{x_{n+1}} \left(f(x) - \frac{x}{2} \right) dx$$

- a) Donner une interprétation géométrique de a_n .
- b) Montrer que $a_n = \frac{2n+1}{2}$ pour tout nombre entier naturel n . En déduire que (a_n) est une suite arithmétique.

SUJET N°23

Exercice:

- Trouver les nombres de trois chiffres dont le produit de chacun par 4 se termine par 364.
- Trouver les nombres de deux chiffres qui sont multiples du produit de leurs chiffres.

Problème

Partie A

On considère la fonction de variable réel x définie par : $g(x) = (1-x)e^{1-x} - 1$

- a) Justifier que la limite de g en $+\infty$ est -1
- b) Déterminer la limite de g en $-\infty$
- 2°a) Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = (x-2)e^{1-x}$
- b) Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation
- 3°a) Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = 0$ admet une solution unique α
- b) En déduire que :
$$\begin{cases} \forall x \in]-\infty; \alpha[& g(x) > 0 \\ \forall x \in]\alpha; +\infty[& g(x) < 0 \end{cases}$$

Sujets proposés (TSM)

Partie B

On considère la fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par :

$$f(x) = xe^{1-x} - x + 2$$

On note par (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; i; j)$. L'unité graphique est 2cm

1°) Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$

2°a) Démontrer que f est une primitive de g

b) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

3°a) Démontrer que la droite (D) d'équation $y = -x + 2$ est une asymptote oblique à (C) en $+\infty$.

b) Etudier la position relative de (D) et (C)

4°) Démontrer que (C) admet en $-\infty$ une branche parabolique de direction (OJ).

5) Déterminer l'équation de la tangente (T) à (C) au point $x = 1$.

6°) Démontrer que $f(\alpha) = 1 - \alpha + \frac{1}{1-\alpha}$

7°) Justifier que, pour tout nombre réel x ,

$$f(-x + 2) = e^{x-1}f(x)$$

8°) On admet que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions. On appelle β l'une de ses solutions.

Démontrer que $-\beta + 2$ est l'autre solution.

9°) Tracer (D), (T) et (C)

On prendra $\alpha = 0,4$ et $\beta = 2,5$

Partie C

Soit θ un nombre réel strictement positif et $S(\theta)$ l'aire en cm^2 de la partie du plan délimitée par (C) la droite (D) d'équation $y = -x + 2$ et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = \theta$.

1°) Calculer $S(\theta)$ à l'aide d'une intégration partielle.

2°) Déterminer la limite de $S(\theta)$ lorsque θ tend vers $+\infty$.

SUJET N° 24

EXERCICE:

On compose un jury en tirant au sort 3 personnes parmi 7 volontaires : 4 hommes et 3 femmes. X désigne la variable aléatoire qui associe à chaque tirage le nombre de femme qu'il présente.

1. Déterminer la loi de probabilité de X et calculer son espérance mathématique.

2. Calculer la probabilité pour qu'il ait au moins une femme dans le jury.

Problème

Partie A

Soit la fonction g de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$g(x) = -x|x| + 1 - \ln|x|.$$

1) Etudier le sens de variation de la fonction g et dresser son tableau de variation.

(On ne demande pas de calculer les limites aux bornes du D_f)

2.a) Déterminer le signe de $g(x)$ sur $]-\infty; 0[$

b) Calculer $g(1)$. Déterminer le signe de $g(x)$ sur $]0; +\infty[$.

Partie B

Soit la fonction f de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = -|x| + \frac{\ln|x|}{x}$$

Soit (C) la représentation graphique de f dans un repère orthonormé $(o; i; j)$

(Unité sera égale à 1cm)

1.a) En utilisant les résultats de la partie A, étudier le sens de variation de f .

b) Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition et dresser son tableau de variation.

2. Déterminer le signe de $f(x)$ sur $]0; +\infty[$

3. Démontrer que les droites (D_1) d'équation $y = x$ et (D_2) d'équation $y = -x$ sont asymptotes à (C) respectivement en $+\infty$ et $-\infty$

4.a) Détermine l'intersection de (C) et (D_2) sur $]0; +\infty[$

b) Etudier la position relative de (C) et (D_2) sur $]0; +\infty[$

5.a) Déterminer l'intersection de (C) et (D_1) sur $]-\infty; 0[$

b) Etudier la position relative de (C) et (D_1) sur $]-\infty; 0[$

6) Tracer (C), (D_1) et (D_2)

Partie C

On se propose de déterminer l'intersection de (C) et (D_2) sur $]-\infty; 0[$

Soit h la fonction définie sur $]-\infty; 0[$ par :

$$h(x) = f(x) + x$$

1.a) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 0} h(x)$

b) Etudier le sens de variation de la fonction h et dresser son tableau de variation.

2.a) Démontrer que pour tout $x \in]-\infty; 0[$, l'équation $f(x) = -x$ admet une solution unique α

b) Démontrer que : $-1 < \alpha < -\frac{1}{2}$

Partie D

1. Soit t un nombre réel tel que $t \geq 1$.

Calculer l'aire $A(t)$ de la partie du plan délimité par (D_2) , (C) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = t$

2. On pose, pour tout nombre réel t tel que $t \geq 1$;

Sujets proposés (TSM)

$$J(t) = \int_1^t \frac{\ln x}{x^2} dx$$

- A l'aide d'une intégration par partie, calculer $J(t)$
- Démontrer que : $0 \leq J(t) \leq 1$
- Déterminer $\lim_{t \rightarrow +\infty} J(t)$.

SUJET N° 25

Exercice

- On choisit une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes. Toutes les cartes ont la même probabilité d'être choisies. Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :
 A : « La carte choisie est la dame de cœur »
 B : « La carte choisie est un cœur »
 C : « La carte choisie est un cœur ou un as »
 D : « La carte choisie n'est ni un cœur, ni un as »
- On choisit une carte au hasard parmi les cœurs. Tous les cœurs ont la même probabilité d'être choisis. Calculer la probabilité de l'évènement F :
 « La carte choisie est une figure ».

Problème

Partie A :

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \frac{e^x}{1+2e^x} - \ln(1+2e^x)$$

- Calculer $g'(x)$ et montrer que ce nombre est strictement négatif pour tout x de $\mathbb{R}$.
- Déterminer les limites de g en $-\infty$ et $+\infty$.
- Dresser le tableau de variation de g .
- Donner le signe de $g(x)$.

Partie B :

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-2x} \ln(1+2e^x)$

On note (C) sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthogonal (unités graphiques 4cm sur l'axe des abscisses et 1cm sur l'axe des ordonnées).

- calculer $f'(x)$ et montrer que pour tout réel x ,
 $f'(x) = 2e^{-2x} g(x)$.
- a) Déterminer la limite de f en $-\infty$.
 b) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
- Dresser le tableau de variation de f .
- Tracer (C).
- Soit α un nombre réel strictement positif.
 a) Vérifier que, pour tout réel x , $\frac{e^{-x}}{1+2e^x} = e^{-x} - 2 \frac{e^{-x}}{e^{-x}+2}$.
 En déduire la valeur de l'intégrale $I(\alpha) = \int_0^\alpha \frac{e^{-x}}{1+2e^x} dx$.

- Calculer, à l'aide d'une intégration par parties, l'intégrale : $J(\alpha) = \int_0^\alpha f(x) dx$. Donner une interprétation graphique de $J(\alpha)$.

Partie C

On considère l'équation différentielle (E) : $y' + 2y = 2 \frac{e^{-x}}{1+2e^x}$

Vérifier que la fonction f étudiée dans la partie B est solution de (E).

SUJET N°26

Exercice :

On considère l'équation (E) : $z \in \mathbb{C}$,

$$z^3 + (1 - 8i)z^2 - (23 + 4i)z - 3 + 24i = 0.$$

- Démontrer que (E) admet une solution imaginaire pure que l'on déterminera.
- Résoudre l'équation (E).
- Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct, on considère les points A, B et C d'abscisses respectives $1+2i$, $3i$, $-2+3i$. Soit G le barycentre des points A, B et C affectés des coefficients respectifs 2, -2 et 1.
 a) Déterminer puis écrire sous la forme trigonométrique les affixes des vecteurs $\overrightarrow{GA}$, $\overrightarrow{GB}$ et $\overrightarrow{GC}$.
 b) Démontrer que les affixes des vecteurs $\overrightarrow{GA}$, $\overrightarrow{GB}$ et $\overrightarrow{GC}$ sont des termes d'une suite géométrique dont on déterminera la raison.
 c) En déduire qu'il existe une similitude directe qui transforme A en B et B en C. Déterminer les éléments caractéristiques de cette similitude.

Problème

Partie A :

Résolution de l'équation différentielle (E): $y' + y = x - 1$.

- A l'aide d'une intégration par parties, calculer $\int_1^x e^t(t-1)dt$
- a) Soit z une fonction dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels. On pose $f(x) = z(x)e^{-x}$. Montrer que la fonction f est solution de (E) si et seulement si pour tout x de $\mathbb{R}$, $z'(x) = e^x(x-1)$.
 b) A l'aide de la première question, déterminer toutes les fonctions z vérifiant pour tout x de $\mathbb{R}$, $z'(x) = e^x(x-1)$.
- Déduire de la question précédente les solutions de (E)
 b) Déterminer la solution de (E) pour laquelle l'image de 1 est 0.

Partie B :

Etude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - 2 + e^{1-x}$. Le plan est rapporté à un repère orthonormé (o, i, v) (unité graphique : 1cm). On désigne par (Cf) la courbe représentative de f .

- Etudier le sens de variation de f .
- Déterminer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- a) Montrer que la droite (D), d'équation $y = x - 2$, est asymptote à la courbe (Cf).

Sujets proposés (TSM)

b) Préciser la position de (C_f) par rapport à (D) .

3. Tracer (D) et (C_f) .

Partie C :

Calcul d'aire

1. On considère le domaine limité par la courbe (C_f) , son asymptote (D) et les droites d'équations

$x = 0$ et $x = x_0$. Exprimer, à l'aide de x_0 , l'aire S_1 de ce domaine.

2. On considère la fonction g , définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = e^{1-x}.$$

a) Étudier g , puis tracer sa courbe représentative (C_g) .

b) Donner une interprétation, en terme d'aire, de l'intégrale ayant servi au calcul de S_1 à l'aide de la courbe (C_g) .

3. A est le point de coordonnées $(x_0; 0)$. B est le point de la courbe (C_g) d'abscisse x_0 . Soit (T) la tangente à la courbe (C_g) au point d'abscisse x_0 . C est le point d'intersection de (T) et de l'axe des abscisses. Déterminer les coordonnées de C .

4. Calculer (en unités d'aire) l'aire S_2 du triangle ABC .

Vérifier que $S_1 + 2S_2 = 0$.

SUJET N°27

Exercice

Soit dans $\mathbb{C}$ l'équation : $Z^2 - (4 + 3i\sqrt{3})Z + 6i\sqrt{3} = 0$.

1. Résoudre cette équation. Soient Z_1 et Z_2 les solutions ;

$Z_1 \in \mathbb{R}$. A , B et C sont les points du plan complexe

d'affixes respectives Z_1 , Z_2 et $-7 + 6i\sqrt{3}$.

2. Déterminer les éléments caractéristiques de la similitude directe S telles que $S(A) = B$ et $S(B) = C$

3. Déterminer l'expression analytique de S .

Problème

Partie A : Soit f la fonction numérique d'une variable réelle x définie par :

$$f(x) = -\frac{x}{2} + \ln \left| \frac{x-1}{x} \right|$$

1. Déterminer l'ensemble de définition D_f de f .

2. Étudier les variations de f .

3. On désigne par (C_f) la courbe de f dans un repère orthonormé (O, i, j)

(Unité 2cm). Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = -\frac{x}{2}$ est asymptote à (C_f) . Préciser la position de (C_f) par rapport à (Δ) .

4. Montrer que le point $I(\frac{1}{2}; -\frac{1}{4})$ est centre de symétrie pour (C_f) .

5. Donner une équation de la tangente de la tangente en I à (C_f) .

6. Construire (C_f) .

7. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution

unique x_0 et que : $\frac{2}{5} < x_0 < \frac{9}{20}$ (on donne :

$$\ln 2 = 0.693; \ln 3 = 1.099; \ln 11 = 2.398)$$

Partie B

Soit $\theta \in]1; 2[$.

1. A l'aide d'une intégration par parties, calculer :

$$\int_{\theta}^2 \ln\left(\frac{x-1}{x}\right) dx$$

2. En déduire l'aire $A(\theta)$, en cm^2 , de la partie du plan dont les points ont des coordonnées

$$x \text{ et } y \text{ telles que: } \begin{cases} \theta \leq x \leq 2 \\ f(x) \leq y \leq \frac{-x}{2} \end{cases}$$

3. Calculer : $\lim_{\theta \rightarrow +\infty} A(\theta)$, avec $\theta > 1$

SUJET N°28

Exercice

ABC est un triangle équilatéral de sens direct et de centre

O . Déterminer les applications suivantes :

$$a) r(B; \frac{\pi}{3}) \text{ or } (C; \frac{\pi}{3})$$

$$b) r(C; \frac{\pi}{3}) \text{ or } (O; \frac{2\pi}{3})$$

Problème

Pour tout entier naturel n , on considère la fonction f_n

définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f_n(x) = x^n \ln x - \frac{x^{n+1}-1}{n+1} & \text{si } x > 0 \\ f_n(0) = \frac{1}{n+1} \end{cases}$$

On désigne par (C_n) la représentation graphique de f_n dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, i, j) (unité 2cm)

Partie A

1. Étudier la continuité de f_n à droite en 0.

2. Déterminer la limite de $\frac{f_n(x) - \frac{1}{n+1}}{x}$ lorsque x tend vers 0

par valeurs supérieures (on distinguera les cas $n = 1$ et $n > 1$). Interpréter géométriquement les résultats obtenus.

3. Étudier le sens de variation de f_n . Préciser la nature de la branche infinie.

4. Construire (C_1) et (C_2) .

Partie B

Soit λ un réel strictement positif.

1. A l'aide d'une intégration par parties, calculer en

fonction de λ l'intégrale : $\int_{\lambda}^1 x^2 \ln x dx$.

Sujets proposés (TSM)

2. En déduire la valeur, en fonction de λ , de $I(\lambda)$ tel que :

$$I(\lambda) = \int_{\lambda}^1 f(x) dx.$$

3. Calculer la limite de $I(\lambda)$ quand λ tend vers 0. En déduire l'aire en cm^2 de la portion de plan limitée par (C_2) , l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$.

Partie C

1. On pose, pour tout x de l'intervalle $]0; 1[$, $g(x) = f_2(x) - x$. Dresser le tableau de variation de g . En déduire que l'équation $f_2(x) = x$ admet une solution unique α dans l'intervalle $]0; 1[$.

2.a) Etudier le sens de variation de $f_2'(x)$, sur l'intervalle $]0; 1[$ et dresser son tableau de variation.

b) Démontrer que, pour tout

x de l'intervalle $[0; 1]$, on a : $|f_2'(x)| \leq \frac{2}{e}$

3. On considère la suite (U_n) définie :

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = f_2(U_n) \end{cases}$$

a) A l'aide d'un raisonnement par récurrence, démontrer que, pour tout entier naturel n , $U_n \in [0; 1]$

b) α étant le nombre réel défini à la question C.1, démontrer que pour tout entier naturel n , on a :

$$|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{2}{e} |U_n - \alpha|,$$

c) Démontrer par récurrence que : $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{2}{e}\right)^n |1 - \alpha|$.

d) En déduire que la suite (U_n) converge vers α .

SUJET N°29

Exercice

Une urne U contient une boule portant le numéro 1 et deux boules portant le numéro 2. Une urne V contient une boule portant le numéro 4 et n boules portant le numéro 3. On tire au hasard une boule de U, une boule de V et on désigne par X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe la somme des numéros portés par les deux boules.

1. Déterminer en fonction de n la loi de probabilité de X.
2. Calculer en fonction de n l'Espérance mathématique $E(X)$.
3. Déterminer n pour que : $E(X) = \frac{59}{12}$.
4. Déterminer la plus petite valeur de n pour laquelle $E(X) < 4,8$.

Problème

Partie A : Soit la fonction définie par :

$f(0) = 0$ et pour tout réel strictement positif x par $f(x) = \frac{x \ln x}{x+1}$.

1. Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0.

2. Soit φ la fonction dérivable sur $]0, +\infty[$ et définie par : $\varphi(x) = \ln x + x + 1$.

a) Etudier le sens de variation de φ .

b) Démontrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une solution unique β telle que $0,27 \leq \beta \leq 0,28$.

3.a) Exprimer $f'(x)$ en fonction de $\varphi(x)$.

En déduire les variations de f .

b) Vérifier que : $f(\beta) = -\beta$

c) Calculer la limite de f en $+\infty$

d) Dresser le tableau de variation de f .

4. Tracer la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, i, j) , (unité graphique 2cm).

Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = 1 - (x^2 - 2x + 2)e^{-x}.$$

1. Etudier les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$.

2. Calculer la dérivée de g et déterminer son signe.

3. En déduire le tableau de variation de g .

Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans d'un repère orthonormé (O, i, j)

On placera en particulier les pions d'abscisses 1 ; 3 ; 4 ; e^2 ; 12.

On prendra : $\ln 0,27 \approx -1,31$; $\ln 0,28 \approx -1,27$; $\ln 2 \approx 0,7$; $\ln 3 \approx 1,1$;

$\ln 5 \approx 1,6$.

Partie B

a) Démontrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une solution unique α dans $[3; 4]$.

b) Démontrer que les équations $f(x) = 1$ et $e^{1+\frac{1}{x}} = x$ sont équivalentes. Soit g la fonction dérivable sur $]0, +\infty[$ et définie pour tout réel strictement positif x par :

$$g(x) = e^{1+\frac{1}{x}}$$

a) Etudier le sens de variation de g .

b) Démontrer que pour tout x élément de $[3; 4]$, $g(x)$ est un élément de $[3; 4]$

c) Démontrer que : $\forall x \in [3; 4], |g'(x)| \leq \frac{1}{2}$.

On prendra $e^{\frac{4}{3}} \approx 3,8$; $e^{\frac{5}{4}} \approx 3,49$.

3. Soit (U_n) la suite définie par : $U_0 = 3$ et la relation de récurrence $U_{n+1} = g(U_n)$.

a) Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \in [3; 4]$.

b) Démontrer que pour tout entier naturel n non nul :

$$|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |U_n - \alpha|.$$

En déduire que $|U_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n}$.

Sujets proposés (TSM)

c) Démontrer que la suite (U_n) est convergente. Calculer sa limite.

d) Pour quelles valeurs de n , (U_n) est une valeur approchée de α à 10^{-2} près ?

Partie C

1. Soit n un entier naturel non nul. Démontrer que l'équation $f(x) = n$ admet une solution α_n et une seule. Placer α_1 et α_2 dans le même repère que précédemment.

2.a) Démontrer que, pour tout entier naturel non nul n , on a : $\alpha_n \geq e^n$.

b) Démontrer que, pour tout entier naturel non nul n , on : $f(\alpha_n) = n$ est équivalent à $\ln \frac{\alpha_n}{e^n} = \frac{n}{\alpha_n}$.

c) Dédurre des questions 2.a et 2.b que la suite $\frac{\alpha_n}{e^n}$ $n \in \mathbb{N}^*$ est convergente et calculer sa limite.

SUJET N°30

Exercice

1. Une urne contient trois boules : une rouge, une verte, une bleue. On tire successivement deux boules de l'urne. Avant de tirer la deuxième la boule, on remet dans l'urne la première boule obtenue. On suppose que tous les tirages sont équiprobables.

Donner l'ensemble des neuf tirages possibles.

2. On convient de la règle suivante : le tirage d'une boule rouge fait marquer 1 point, celui d'une verte fait marquer 2 points et celui d'une bleue fait marquer -3 points.

On note X la variable aléatoire qui à chaque tirage de deux boules associe la somme des points marqués.

Par exemple : au tirage (rouge, rouge), on associe +2 ; au tirage (verte, bleue) on associe -1.

a) Déterminer l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire X .

b) Déterminer la loi de probabilité de X .

c) Calculer la probabilité de perdre (c'est-à-dire d'obtenir une somme de points négative).

d) Calculer l'Espérance mathématiques $E(X)$ de X . Que représente $E(X)$?

Problème :

Partie A : Etude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$

par : $f(x) = x + \frac{\ln x}{x}$. Soit C la courbe représentative de

f dans le plan rapporté à un repère orthonormé (O, i, j) ; unité graphique 5cm.

1. Calculer les limites de f en 0 et $+\infty$. Déterminer les asymptotes de C .

2. Etudier le sens de variation de f . Dresser le tableau de variation de f .

3. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet sur l'intervalle $[\frac{1}{e} ; 1]$ une solution unique notée α . Déterminer un encadrement de α d'amplitude 0,01. Donner suivants les valeurs de x , le signe de $f(x)$ sur $]0 ; +\infty[$.

4. Tracer la courbe C .

Partie B : Calcul d'aire

1. Déterminer une équation de la tangente (D) à C au point d'abscisse 1.

2.a) Soit φ la fonction définie, pour tout $x > 0$ par : $\varphi(x) = x - x^2 + \ln x$.

Calculer $\varphi'(x)$. En déduire le sens de variation de φ , puis le signe de $\varphi(x)$ sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

b) Montrer que pour tout $x > 0$, $f(x) - x = \frac{\varphi(x)}{x}$

c) En déduire la position relative de C et de (D) .

3. On considère le domaine limité sur le graphique par l'axe des abscisses, la courbe C et la tangente (D) .

a) Hachurer ce domaine

b) Soit $\mathcal{A}$ son aire, en cm^2 . Ecrire la valeur exacte de $\mathcal{A}$ comme expression polynomiale du second degré en α .

Partie C : Etude d'une suite

Soit x_0 un réel appartenant à l'intervalle $]\frac{1}{e} ; \alpha]$. On note M_0 le point de C d'abscisse x_0 .

1.a) Donner une équation de la tangente T_0 à C en M_0 , en fonction de x_0 , $f(x_0)$ et $f'(x_0)$.

b) Soit x_1 l'abscisse du point d'intersection de T_0 avec l'axe des abscisses. Ecrire x_1 en fonction de x_0 , $f(x_0)$ et $f'(x_0)$.

2. On considère la fonction h définie sur $]\frac{1}{e} ; \alpha]$ par :

$$h(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}, \text{ (On remarquera que } h(x_0) = x_1 \text{)}$$

a) Calculer $f''(x)$ et étudier son signe sur $]\frac{1}{e} ; \alpha]$

b) Montrer que $h'(x) = \frac{f''(x).f(x)}{[f'(x)]^2}$

c) En déduire que h est strictement croissante sur $]\frac{1}{e} ; \alpha]$ puis montrer que $x_1 < \alpha$.

d) En écrivant $h(x) - x = -\frac{f(x)}{f'(x)}$, étudier le signe

$h(x) - x$ sur $]\frac{1}{e} ; \alpha]$. En déduire que $\frac{1}{e} < x_0 < x_1 < \alpha$.

3.a) Démontrer que, pour tout $x \in]\frac{1}{e} ; \alpha]$, $h(x) \in]\frac{1}{e} ; \alpha]$.

b) On considère la suite (x_n) de réels définie par x_0 et $x_{n+1} = h(x_n)$ pour tout entier naturel n .

Montrer que la suite (x_n) est strictement croissante.