

Exercice 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On considère la fonction f_n définie sur l'intervalle $[0,1]$ par : $f_n(x) = e^{-x} - x^{2n+1}$

1) Etudier les variations de la fonction f_n .

2) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution u_n et que $u_n \in]0,1[$.

On définit ainsi une suite numérique $(u_n)_{n \geq 1}$

3) a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]0,1[$. Comparer $f_n(x)$ et $f_{n+1}(x)$

b) Montrer que pour tout entier naturel non nul n , $f_n(u_{n+1}) < 0$.

c) Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est croissante puis déduire qu'elle est convergente.

4) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\ln(u_n) = -\frac{u_n}{2n+1}$.

b) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Exercice 2

Soit m un nombre complexe non nul tel que : $m \neq \frac{2}{5} + \frac{1}{5}i$.

On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation $(E): z^2 - [1 + m(2+i)]z + 2m(1+im) = 0$

1) a) Vérifier que le discriminant de l'équation (E) est $\Delta = [1 + m(-2+i)]^2$

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) .

2) On suppose que $m \neq i$ et on pose $u = \frac{2m}{1+im}$.

a) Montrer que : $u \in \mathbb{R} \Leftrightarrow |m|^2 = \text{Im}(m)$

b) En déduire l'ensemble des points $M(m)$ pour que $u \in \mathbb{R}$.

3) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

Soient M, A et B les points d'affixes respectives m , $-i$ et u .

a) Montrer que les points A, M et O sont alignés si et seulement si m est un imaginaire pur.

b) Montrer que : $\frac{u+i}{u} = \frac{1}{2} \times \frac{m+i}{m}$

c) En déduire que si $m \notin i\mathbb{R}$, alors les points A, M, O et B sont cocycliques.

Exercice 3

Partie I :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = 1 - x^2 e^x ; x \leq 0 \\ f(x) = e^{x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)} ; x > 0 \end{cases}$$

On désigne par (C_f) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 2 cm.



- 1) Montrer que la fonction f est continue en $x_0 = 0$.
- 2) Etudier la dérivabilité à gauche en $x_0 = 0$ de la fonction f .
- 3) Montrer que f n'est pas dérivable à droite en $x_0 = 0$.
- 4) Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
- 5) a) Déterminer $f'(x)$ sur chacun des intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$ où f' désigne la fonction dérivée de f .

b) On pose $g(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) + \frac{x}{x+1} - 1$.

Etudier les variations de la fonction g sur l'intervalle $]0, +\infty[$ puis en déduire le signe de $g(x)$ et celui de $f'(x)$ sur $]0, +\infty[$.

c) Dresser le tableau de variation de f .

- 6) Construire la courbe (C_f) en précisant les deux demi-tangentes au point d'abscisse $x_0 = 0$.

Partie II :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite numérique définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$.

Soit φ_n la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par : $\varphi_n(x) = \ln[1 + (n+1)x] - \frac{n+1}{n+2} \ln x$ où $n \in \mathbb{N}^*$.

- 1) a) Montrer que φ_n admet un minimum dont on déterminera sa valeur en fonction de n .

b) En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) (\forall x \in \mathbb{R}^{++} - \{1\}) : \left[\frac{1 + (n+1)x}{n+2}\right]^{n+2} > x^{n+1}$ (I)

- 2) A l'aide de l'inégalité (I) déterminer le sens de variation de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

(On pourra poser $x = \frac{n}{n+1}$ où $n \in \mathbb{N}^*$)

- 3) a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, établir que $\frac{1}{n+1} \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{t} dt$ et que $(\forall n \in \mathbb{N}^*), u_n \geq e$.

b) Déduire des résultats des questions précédentes, l'étude de la convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

c) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

Exercice 4

On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$, l'équation d'inconnue z , $(E) : z^2 - 2e^{i\theta}z + e^{i\theta} \sin \theta = 0$ où $\theta \in]0, \pi[$.

- 1) Déterminer les deux solutions de l'équation (E) .

2) On pose $z_1 = \frac{e^{i\theta} + 1}{2}$ et $z_2 = \frac{e^{i\theta} - 1}{2}$.

a) Déterminer $z_1 \times z_2$ sous la forme trigonométrique.

b) Montrer que $z_1 = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}$ et déduire l'écriture trigonométrique du nombre complexe z_2 .



3) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points $M; I; J; M_1$ et M_2 d'affixes respectives $e^{i\theta}; 1; -1; z_1$ et z_2 .

a) Montrer que le triangle MIJ est rectangle au point M.

b) Montrer que $(IJ) \parallel (M_1M_2)$

4) Soit h l'homothétie de centre M et de rapport 2 et soit r la rotation de centre M et d'angle $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$.

a) Montrer que $h(M_1) = I$ et $h(M_2) = J$

b) Montrer que les points M, J et $r(I)$ sont alignés et en déduire que $\frac{1 + e^{i\theta}}{i(1 - e^{i\theta})} \in \mathbb{R}$.

5) Déterminer les valeurs de θ pour lesquels le périmètre du triangle MIJ soit maximal.

Exercice 1

Dans $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes, on considère l'équation

$$(E): z^3 - (2 + 3i)z^2 + (4i - 1)z + 2 - i = 0.$$

1) a) Montrer que l'équation (E) admet une solution réelle z_0 que l'on déterminera.

b) Résoudre l'équation (E) .

2) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on désigne par A, B et C les points

d'affixes respectives $1, i$ et $2 + i$. A tout point M d'affixe z on associe le point M' d'affixe z' tels que $z' = \frac{1}{z^2}$ où $z \in \mathbb{C} - \{-1, 0, 1\}$.

a) Montrer que le triangle AMM' est rectangle en A si et seulement si $\frac{z+1}{z^2} \in \mathbb{R}^*$.

b) On pose : $z = e^{i\theta}$ où $\theta \in]0, \pi[$. Donner la forme trigonométrique de $\frac{z+1}{z^2}$.

c) Déduire les valeurs de θ pour lesquelles le triangle AMM' soit rectangle en A.

3) Soit N le point d'affixe $z_N = \frac{(1+i)z}{z-i}$ où $z \in \mathbb{C} - \{i\}$.

a) Montrer que $N \in \mathcal{C}(O, 1)$ si et seulement si M appartient à la médiatrice du segment $[AB]$. (On note par $\mathcal{C}(O, 1)$ le cercle de centre O et de rayon 1)

b) Montrer que : $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}) \equiv \frac{\pi}{4} - (\vec{u}, \overrightarrow{BM}) [2\pi]$.

c) En déduire l'ensemble des points M pour lesquels les points O, M et N soient alignés.

Exercice 2

On considère dans $\mathbb{Z}$, le système $(S): \begin{cases} n \equiv 13 [19] \\ n \equiv 6 [12] \end{cases}$

1) Démontrer qu'il existe un couple (u, v) d'entiers relatifs tels que : $19u + 12v = 1$. (On ne demande pas dans cette question de donner un exemple d'un tel couple).

Vérifier que pour un tel couple, le nombre $N = 13 \times 12v + 6 \times 19u$ est une solution de (S) .

2) a) Soit n_0 une solution de (S) , vérifier que le système (S) équivaut à $\begin{cases} n \equiv n_0 [19] \\ n \equiv n_0 [12] \end{cases}$.

b) Montrer que le système $\begin{cases} n \equiv n_0 [19] \\ n \equiv n_0 [12] \end{cases}$ équivaut à $n \equiv n_0 [12 \times 19]$.

(on rappelle que $a \equiv b [c] \Leftrightarrow c \mid (a - b)$)

3) a) Trouver un couple (u, v) solution de l'équation $19u + 12v = 1$ et calculer la valeur de n correspondante.

b) Déterminer l'ensemble des solutions du système (S) . (on pourra utiliser la question 2)b).

4) Soit n une solution du système (S) . Déterminer le reste de la division euclidienne de n par $228 = 12 \times 19$.

Exercice 3

On rappelle que $(\mathbb{R}, +, \times)$ et $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), +, \times)$ sont deux anneaux.

On considère l'ensemble $\mathcal{E} = \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{3}\right\}$ et pour tout a et b de $\mathcal{E}$, on pose : $a * b = a + b - 3ab$.



1) Montrer que $*$ est une loi de composition interne dans $\mathcal{E}$.

2) Montrer que $(\mathcal{E}, *)$ est un groupe commutatif.

3) Pour tout entier naturel non nul n et pour tout réel a tel que $a \neq \frac{1}{3}$, on pose : $a^{(n)} = \underbrace{a * a * \dots * a}_{n \text{ fois } a}$.

Montrer que : $a^{(n)} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}(1-3a)^n$.

4) Pour tout réel a , on considère la matrice : $M(a) = \begin{pmatrix} 1-2a & a & a \\ a & 1-2a & a \\ a & a & 1-2a \end{pmatrix}$.

a) Montrer que : $(\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2), M(a) \times M(b) = M(a * b)$.

b) On considère l'ensemble $G = \{M(a) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) / a \in \mathcal{E}\}$ et l'application : $\varphi: \mathcal{E} \rightarrow G$

$$a \mapsto M(a)$$

Montrer que φ est un morphisme bijectif de $(\mathcal{E}, *)$ vers $(G, \times)$.

c) Dédurre la structure de $(G, \times)$ puis déterminer $M^{-1}(a)$ la matrice inverse de $M(a)$.

d) Déterminer $M^n(a)$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$.

Exercice 4

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $\begin{cases} f_n(x) = x \ln^n(x), \text{ si } x > 0 \\ f_n(0) = 0 \end{cases}$

On désigne par $(\mathcal{E}_n)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. (unité : 2 cm)

Partie A

1) a) Montrer que la fonction f_n est continue à droite en 0.

b) Etudier la dérivabilité de f_n à droite en 0.

c) Calculer $f'_n(x)$ pour tout $x > 0$.

2) a) Dresser le tableau de variation de la fonction f_n . On distinguera deux cas suivant la parité de n .

b) Montrer que toutes les courbes $(\mathcal{E}_n)$ passent par trois points fixes : l'origine du repère et deux autres points

A et B tels que $0 < x_A < x_B$.

3) a) Etudier la position relative de $(\mathcal{E}_1)$ et $(\mathcal{E}_2)$ et construire ces deux courbes dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

b) Calculer, en cm^2 , l'aire de la partie du plan limitée par $(\mathcal{E}_1)$ et $(\mathcal{E}_2)$ et les droites d'équations $x=1$ et $x=e$

Partie B

On pose : $F_n(\alpha) = \int_{\alpha}^1 f_n(x) dx$ où $n \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha \in]0, 1[$.

1) a) Sans calculer $F_n(\alpha)$, prouver que $F_n(\alpha)$ admet une limite finie u_n lorsque α tend vers 0^+ .

b) Calculer $F_1(\alpha)$ et en déduire que $u_1 = -\frac{1}{4}$.

2) a) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$(\forall \alpha \in]0, 1[)(\forall n \in \mathbb{N}^*), F_{n+1}(\alpha) = -\frac{\alpha^2}{2} \ln^{n+1}(\alpha) - \frac{n+1}{2} F_n(\alpha)$$

b) En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*), u_{n+1} = \frac{n+1}{2} u_n$.



3) Soit $\mathcal{A}_n$, l'aire de la partie du plan limitée par la courbe $(\mathcal{C}_n)$, l'axe des abscisses et les droites d'équations : $x = 0$ et $x = 1$.

a) Montrer que : $\mathcal{A}_n = 4|u_n| \text{ cm}^2$.

b) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) . \mathcal{A}_n = \frac{n!}{2^{n-1}}$.

c) Montrer que pour tout $n \geq 3$, $\mathcal{A}_{n+1} \geq 2 \mathcal{A}_n$ puis en déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{A}_n$.

Partie C

On pose $G(x) = \int_1^{e^x} t \ln(t) dt$ avec $x \in \mathbb{R}$.

1) a) Sans calculer $G(x)$, montrer que G est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $G'(x)$.

b) Déterminer le sens de variation de G .

2) a) Calculer $G(x)$ en fonction de x .

b) Dresser le tableau de variation de G .

Exercice 1

On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $(E): 2013x - 1962y = 54$.

- 1) a) Déterminer $PGCD(2013, 1962)$ et en déduire que l'équation (E) admet des solutions dans $\mathbb{Z}^2$.
 b) Sachant que le couple $(78, 80)$ est une solution particulière de l'équation (E) , résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E) en précisant les étapes de la résolution.
- 2) Montrer que si le couple (x, y) est une solution de l'équation (E) , alors $x \equiv 0[6]$.
- 3) On pose $d = x \wedge y$ où (x, y) est une solution de l'équation (E) .
 Déterminer les valeurs possibles du nombre d .
- 4) Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ le système
$$\begin{cases} 671a - 654b = 18 \\ a \wedge b = 18 \end{cases}$$

Exercice 2

On rappelle que $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau unitaire. Soit $G = \left\{ M(a, b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & b \end{pmatrix} / (a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^* \right\}$.

Partie 1

- 1) Montrer que G est une partie stable de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$.
- 2) Montrer que $(G, \times)$ est un groupe. Ce groupe est-il commutatif ?
- 3) Soit H l'ensemble des matrices $M(a, b)$ de G telles que $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$.
 Montrer que H est un sous-groupe de $(G, \times)$.

- 4) Soit A un élément de G tel que $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}$ où $a \in \mathbb{R}$.

On pose : $A^1 = A$, $A^2 = A \times A$, $A^3 = A^2 \times A$, ..., $A^{n+1} = A^n \times A$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Donner l'expression de A^n en fonction de a et de n .

Partie 2

Pour tout (a, b) et (x, y) de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$, on définit la loi de composition interne T par : $(a, b)T(x, y) = (a + bx, by)$.

Soit l'application $\varphi : G \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$

$$M(a, b) \mapsto (a, b)$$

- 1) Montrer que φ est un morphisme bijectif de $(G, \times)$ vers $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*, T)$.
- 2) En déduire la structure algébrique de $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*, T)$.
- 3) Pour tout $a \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer le symétrique de $\underbrace{(a, 1)T(a, 1)T \dots T(a, 1)}_{n \text{ fois}}$ dans $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*, T)$.

Exercice 3

Soit a un nombre complexe non nul.

I - On considère, dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E): z^2 + [(1-a)i - a]z + a + a^2i = 0$

1/ Développer le nombre complexe : $[(1+a)i - a]^2$

2/ Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E)



3/ Montrer que l'équation (E) admet une unique solution dans $\mathbb{C}$ si et seulement si $a = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\frac{3\pi}{4}}$.

II - On suppose que $a \neq -1$, $a \neq -i$ et $a \neq \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\frac{3\pi}{4}}$ et on considère dans le plan complexe rapporté à un repère

orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ les points A, B, C et D d'affixes respectives $a, ai, a-i$ et $-i$.

1/ Montrer que les points A, B et C sont alignés si et seulement si on a : $\arg(a) \equiv \frac{3\pi}{4} [\pi]$.

2/ On suppose que $a = e^{i\theta}$ où $\theta \in]-\pi; \pi[$ et $\theta \neq \frac{3\pi}{4}$ et $\theta \neq -\frac{\pi}{2}$

a/ Donner l'écriture trigonométrique du nombre complexe $1+a$.

B / Montrer que les points A, B, C et D sont cocycliques si et seulement si $\arg(a) \equiv \frac{\pi}{6} \left[\frac{2\pi}{3} \right]$.

3/ On pose dans cette question : $a = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et on considère la rotation R de centre D et qui transforme C en B .

a/ Déterminer une mesure de l'angle de la rotation R .

b/ Donner l'écriture complexe de la rotation R .

C/ Déterminer l'affixe ω du point Ω l'image du point A par la rotation R .

Exercice 4

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (1+x^2)e^{-x}$.

On désigne par (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Partie 1

1) Etudier les deux branches infinies de la courbe (C_f) aux voisinages de $-\infty$ et de $+\infty$.

2) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -(x-1)^2 e^{-x}$, puis dresser le tableau de variations de f .

3) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f''(x) = (x^2 - 4x + 3)e^{-x}$, étudier la concavité de la courbe (C_f) .

4) Construire la courbe (C_f) dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$. (l'unité est 1 cm)

5) a) Vérifier que f est une solution particulière de l'équation différentielle $(E): y'' + 2y' + y = 2e^{-x}$.

b) Déterminer la solution générale de l'équation différentielle (E) .

6) Calculer l'aire du domaine plan délimité par la courbe (C_f) , l'axe des abscisses et les deux droites d'équations $x=0$ et $x=1$.

Partie 2

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite numérique définie par : $u_0 = \frac{1}{3} \ln 2$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.



1) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$ et que $\alpha \in \left] \frac{\ln 2}{3}, 1 \right[$.

2) a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}), \frac{1}{3} \ln 2 \leq u_n \leq 1$.

b) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}), e^{-x} \geq 1 - x$ et $\left(\forall x \in \left[\frac{\ln 2}{3}, 1 \right] \right), |f'(x)| \leq \frac{1}{2}$

c) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}), |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|$ puis en déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Partie 3

Soient $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ deux suites numériques définies par :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) : a_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \text{ et } b_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \left[f\left(\frac{k}{n}\right) \right]^2$$

1) Montrer que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 0$

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $c_n = \prod_{k=1}^n \left[1 + \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \right]$.

a) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}^+), x - \frac{1}{2} x^2 \leq \ln(1+x) \leq x$.

b) En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*), a_n - \frac{1}{2} b_n \leq \ln(c_n) \leq a_n$

c) Montrer que la suite $(c_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente et calculer sa limite.

Exercice 5

Soit F la fonction numérique définie par : $F(x) = \int_x^{4x} \frac{\ln t}{2t-1} dt$

1) Montrer que F est définie sur $D = \left] 0, \frac{1}{8} \right[\cup \left] \frac{1}{2}, +\infty \right[$.

2) Montrer que F est dérivable sur D et calculer $F'(x)$ pour tout x de D .

3) Soit $x \in]1, +\infty[$.

a) Montrer que : $(\exists c \in [x, 4x]) : F(x) = \frac{3x \ln c}{2c-1}$

b) Déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty$ et calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x}$.

4) Soit $x \in \left] 0, \frac{1}{16} \right[$. Montrer que $|F(x)| \leq -\int_x^{4x} 2 \ln t \cdot dt$ puis déduire $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x)$.

Exercice 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère la fonction numérique f_n de la variable réelle x définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f_n(x) = x(1 - \ln x)^n; \text{ si } x > 0 \\ f_n(0) = 0 \end{cases}$$

Partie 1

Soit (C_n) la courbe représentative de la fonction f_n dans un repère orthonormé direct.

1) a) Montrer que la fonction f_n est continue à droite en zéro.

b) Etudier la dérivabilité de la fonction f_n à droite en zéro.

c) Déterminer les limites suivantes : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_2(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_1(x)}{x}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_2(x)}{x}$.

2) a) Etudier les variations de la fonction f_1 .

b) Etudier les variations de la fonction f_2 .

3) a) Déterminer la position relative des deux courbes (C_1) et (C_2) .

b) Construire les courbes (C_1) et (C_2) dans le même repère. (on admet que le point $A(1,1)$ est un point d'inflexion de la courbe (C_2)).

Partie 2

On considère la fonction numérique F de la variable réelle x définie sur $]-\infty, 0]$ par : $F(x) = \int_{e^x}^1 \frac{f_1(t)}{1+t^2} dt$

1) a) Montrer que la fonction F est dérivable sur l'intervalle $]-\infty, 0]$, et que pour tout $x \in]-\infty, 0]$ on a :

$$F'(x) = \frac{(x-1)e^{2x}}{1+e^{2x}}$$

b) En déduire les variations de la fonction F sur l'intervalle $]-\infty, 0]$.

2) a) Montrer que pour tout $x \in]-\infty, 0]$ on a : $\frac{1}{2} \int_{e^x}^1 f_1(t) dt \leq F(x) \leq \frac{1}{1+e^{2x}} \int_{e^x}^1 f_1(t) dt$.

b) Vérifier que la fonction $v : x \mapsto x^2 \left(\frac{3}{4} - \frac{\ln x}{2} \right)$ est une primitive de la fonction f_1 sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

c) Montrer que $\lim_{x \rightarrow -\infty} \int_{e^x}^1 f_1(t) dt = \frac{3}{4}$.

3) On suppose que la fonction F admet une limite finie L quand x tend vers $-\infty$. Prouver que $\frac{3}{8} \leq L \leq \frac{3}{4}$.

Partie 3

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $u_n = \int_1^e f_n(x) dx$.



1) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geq 0$.

b) Déterminer le signe de $f_{n+1}(x) - f_n(x)$ sur l'intervalle $[1, e]$.

c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} \leq u_n$.

d) En déduire que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ converge.

2) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = -\frac{1}{2} + \frac{n+1}{2}u_n$.

b) En déduire l'aire du domaine plan limité par la courbe (C_1) et (C_2) et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = e$.

3) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$, $\frac{1}{n+1} \leq u_n \leq \frac{1}{n-1}$.

b) Déterminer les limites éventuelles des suites $(u_n)_{n \geq 1}$ et $(nu_n)_{n \geq 1}$.

4) Soit a un nombre réel tel que $a \neq u_1$.

On considère la suite numérique $(v_n)_{n \geq 1}$ définie par : $v_1 = a$ et $v_{n+1} = -\frac{1}{2} + \frac{n+1}{2}v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

On pose $d_n = |v_n - u_n|$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $d_n = \frac{n!}{2^{n-1}}d_1$.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$, $\frac{n!}{2} \geq 3^{n-2}$.

c) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} d_n = +\infty$

d) En déduire que la suite $(v_n)_{n \geq 1}$ diverge.

Exercice 2

Partie 1

On considère dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation $(E): 17x - 11y = 2021$.

1) Montrer que si (x, y) est une solution de l'équation (E) , alors $x \equiv 5[11]$.

2) Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E) .

Partie 2

Soit p un entier naturel tel que $p \geq 3$ et $p \neq 43$ et $p \neq 47$.

(on rappelle que $2021 = 43 \times 47$)

On considère dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation $(E_p): 17x^{p-1} - 11y^{p-1} = 2021$.

1) Soit (x, y) de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ une solution de l'équation (E_p) .

a) Montrer que pour tout entier a , on a : $a^{p-1} \equiv 0[p]$ ou $a^{p-1} \equiv 1[p]$.

b) Vérifier que p et 2021 sont premiers entre eux.

c) En déduire que : $x \wedge p = 1$ ou $y \wedge p = 1$.

d) Montrer que : $17x^{p-1} - 11y^{p-1} \equiv -11[p]$ ou $17x^{p-1} - 11y^{p-1} \equiv 6[p]$ ou $17x^{p-1} - 11y^{p-1} \equiv 17[p]$.

2) Déduire que l'équation (E_{17}) n'admet pas de solutions dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Exercice 3

On rappelle que $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}); +, \times)$ est un anneau unitaire.

On pose : $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $E = \left\{ M(x, y) = \begin{pmatrix} x & y & 0 \\ y & x & 0 \\ 0 & 0 & x+y \end{pmatrix} / (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

1) a) Montrer que $(E, +)$ est un groupe commutatif.

b) Soit $M(x, y) \in E$, Ecrire $M(x, y)$ en fonction de I et J et calculer J^2 .

2) a) Montrer que E est stable dans $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), \times)$.

b) Montrer que $(E, +, \times)$ est un anneau commutatif unitaire.

3) a) Calculer $M(1, 1) \times M(1, -1)$.

b) Est-ce que $(E, +, \times)$ est un corps. (justifier la réponse)

Exercice 4

Partie 1

Dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$, on considère l'équation

$$(E): z^2 - (3a - 2i)z + 2a^2 - 4ai = 0, \text{ où } a \in \mathbb{C}$$

1) a) Montrer que $\Delta = (a + 2i)^2$, où Δ est le discriminant de l'équation (E) .

b) Résoudre l'équation (E) .

2) Dans cette question on suppose que $a = 1 + i$. On note z_1 et z_2 les solutions de l'équation (E) telles que

$$|z_1| < |z_2|.$$

a) Ecrire z_1 et z_2 sous la forme trigonométrique puis vérifier que $z_1^3 + z_2 = 0$.

b) Déterminer sous forme algébrique les racines cubiques du nombre complexe z_2 .

Partie 2



Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points I, J et K d'affixes respectives $z_I = i$, $z_J = 2a$ et $z_K = a - 2i$.

1) Montrer que les points I, J et K sont alignés si et seulement si $a \in i\mathbb{R}$.

2) On suppose que $a \notin i\mathbb{R}$.

Soit H le point à l'extérieur du triangle IJK tel que le triangle JKH est rectangle et isocèle en H .

a) Montrer que l'affixe du point H est : $z_H = \frac{(3-i)a + 2 - 2i}{2}$ ou $z_H = \frac{(3+i)a - 2 - 2i}{2}$.

b) Déterminer les valeurs de a pour lesquelles le quadrilatère $IJHK$ soit un carré.



Exercice 1

Soit p un nombre premier tel que : $p \equiv 5[6]$ et $p > 3$.

On considère dans $\mathbb{N}^{*2}$ l'équation $(E): x^3 + y^3 = p(1 + xy)$.

Soit $(x, y) \in \mathbb{N}^{*2}$ une solution de l'équation (E) , on pose $d = x \wedge y$, et soit $(a, b) \in \mathbb{N}^{*2}$ tel que $x = da$ et $y = db$

1) a) Justifier que $a \wedge b = 1$ et $d^3(a^3 + b^3) = p(1 + d^2 ab)$.

b) En remarquant que $1 = (1 + d^2 ab) - d^2 ab$, montrer que $d^3 \wedge (1 + d^2 ab) = 1$.

c) Dédurre que $d = 1$ et que $\begin{cases} a^3 + b^3 = p(1 + ab) \\ a \wedge b = 1 \end{cases}$

2) Montrer que $p \wedge a = 1$ et $p \wedge b = 1$.

3) Montrer que $a^3 \equiv -b^3[p]$ et que $a^{p-1} \equiv b^{p-1}[p]$.

4) En déduire que $a \equiv -b[p]$ (on pourra écrire $p = 5 + 6k$ avec $k \in \mathbb{N}^*$)

5) En posant $a + b = pu$ avec $u \in \mathbb{N}^*$, montrer que : $u(a - b)^2 + (u - 1)ab = 1$ et en déduire que $\begin{cases} a + b = p \\ |a - b| = 1 \end{cases}$.

6) Dédurre dans $\mathbb{N}^{*2}$, l'ensemble des solutions de l'équation (E) .

Exercice 2

On pose $I =]0, +\infty[$ et pour tout $(x, y) \in I^2 : x * y = e^{1 + (1 - \ln x)(1 - \ln y)}$.

1) Montrer que $*$ est une loi de composition interne dans I .

2) Montrer que la loi $*$ est associative et commutative dans I .

3) Montrer que la loi $*$ admet un élément neutre ε dans I que l'on déterminera.

4) Montrer que $(I, *)$ est un groupe commutatif.

5) Montrer que l'ensemble $H = \{e^{1+2^n} / n \in \mathbb{Z}\}$ est un sous-groupe de $(I, *)$.

6) Soit T la loi de composition interne définie dans $J =]1, +\infty[$ par : $(\forall (x, y) \in J^2), xTy = (x - 1)(y - 1) + 1$.

On considère l'application $\varphi : I \rightarrow J$

$$x \mapsto \ln x$$

a) Montrer que φ est un isomorphisme de $(I, *)$ dans (J, T) .

b) En déduire que (J, T) est un groupe commutatif.

Exercice 3

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

**Partie 1**

Soit $m \in \mathbb{C}^*$. On considère dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation

$$(E_m): z^2 - [1 + (1+i)m]z + im^2 + m = 0$$

1) Vérifier que m est une solution de l'équation (E_m) .

2) On note z_1 et z_2 les solutions de l'équation (E_m) telles que $z_1 = m$.

a) Déterminer z_2 et vérifier que $z_2 = iz_1 + 1$.

b) Dans le plan complexe, on note A et B les points d'affixes respectives z_1 et z_2 .

Montrer que B est l'image de A par la rotation r dont on déterminera le centre et une mesure de son angle.

Partie 2

1) Soit $z \in \mathbb{C}$.

a) Montrer que : $|z| = |1 + iz| \Leftrightarrow \operatorname{Im}(z) = \frac{1}{2}$.

b) Dédire que : $\begin{cases} |z| = |1 + iz| \\ |z| = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = e^{i\frac{\pi}{6}} \text{ ou } z = e^{i\frac{5\pi}{6}} \end{cases}$

2) On considère dans $\mathbb{C}$ le système suivant $(S): \begin{cases} z^n(1 + iz) = 1 \\ |z| = 1 \end{cases}$ où $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Montrer que si z est une solution du système (S) , alors $z \in \left\{ e^{i\frac{\pi}{6}}, e^{i\frac{5\pi}{6}} \right\}$.

b) Vérifier que : $1 + e^{i\frac{\pi}{6}} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $1 + e^{i\frac{5\pi}{6}} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$

c) Dédire que $e^{i\frac{\pi}{6}}$ est une solution du système (S) si et seulement si $n \equiv -2[12]$, et que

$e^{i\frac{5\pi}{6}}$ est une solution du système (S) si et seulement si $5n \equiv 2[12]$.

d) Justifier que : $5n \equiv 2[12] \Leftrightarrow n \equiv -2[12]$.

e) Dédire suivant les valeurs de l'entier naturel n l'ensemble des solutions du système (S) .

Exercice 4**Partie 1**

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$

On désigne par (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.



- 1) Vérifier que la fonction f est impaire et calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
- 2) Etudier les variations de la fonction f .
- 3) Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ vers l'intervalle $J =]-1, 1[$. (on note f^{-1} sa bijection réciproque)
- 4) Ecrire l'équation réduite de la tangente (T) à la courbe (C_f) au point d'abscisse 0.
- 5) Vérifier que : $(\forall x \in \mathbb{R}), f'(x) = 1 - f^2(x)$ et en déduire que : $(\forall x \geq 0), 0 \leq f(x) \leq x$.
- 6) Justifier que : $(\forall x \geq 0), 0 \leq 1 - f'(x) \leq x^2$ et en déduire que : $(\forall x \geq 0), 0 \leq x - f(x) \leq \frac{x^3}{3}$.
- 7) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $S_n = \sum_{k=1}^n f\left(\frac{1}{n+k}\right)$ et $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}$.
 - a) Vérifier que $(\forall n \in \mathbb{N}^*), u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \left(\frac{k}{n}\right)}$ et en déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ln 2$.
 - b) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*), 0 \leq u_n - S_n \leq \frac{1}{3n^2}$ et calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.
- 8) Construire dans le même repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, la tangente (T) et les courbes (C_f) et $(C_{f^{-1}})$.
- 9) Soit $\lambda \in]0, 1[$. On note S_λ l'aire en cm^2 du domaine plan

$$D_\lambda = \left\{ M(x, y) / x \in [0, \lambda], y \in [0, \lambda] \text{ et } f(x) \leq y \leq f^{-1}(x) \right\}$$

- a) Montrer que la fonction $x \mapsto \ln\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)$ est une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
- b) Montrer que $S_\lambda = \left(\lambda^2 - 2 \ln\left(\frac{e^\lambda + e^{-\lambda}}{2}\right) \right) cm^2$

Partie 2

Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$\begin{cases} F(x) = \int_x^{2x} \frac{f(t)}{t} dt; x \neq 0 \\ F(0) = 0 \end{cases}$$

- 1) Montrer que F est une fonction impaire
- 2) Montrer que : $(\forall x > 0); f(x) \times \int_x^{2x} \frac{1}{t} dt \leq F(x) \leq f(2x) \times \int_x^{2x} \frac{1}{t} dt$.
- 3) Déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \ln 2$ et que F est continue en 0.
- 4) Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que : $(\forall x > 0); F'(x) = \frac{f(2x) - f(x)}{x}$.
- 5) a) En appliquant le théorème des accroissements finies deux fois de suite à la fonction F puis à la fonction f

montrer que : $(\forall x > 0); 1 - f^2(2x) \leq \frac{F(x) - F(0)}{x} \leq 1 - f^2(x)$.

b) En déduire que F est dérivable en 0 et que $F'(0) = 1$.

6) Dresser le tableau de variation de F sur $\mathbb{R}^+$.

Partie 3

On considère la suite numérique $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}); I_n = \int_0^{\ln(\sqrt{3})} (f(t))^n dt$

1) Calculer I_0 et I_1 .

2) a) Vérifier que $(\forall t \in [0, \sqrt{3}]); 0 \leq f(t) \leq \frac{1}{2}$.

b) En déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}); 0 \leq I_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \ln(\sqrt{3})$ et calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.

3) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}); I_{n+2} = I_n - \frac{1}{n+1} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$.

4) Déduire que $(\forall p \in \mathbb{N}^*); \begin{cases} I_{2p} = I_0 - \sum_{k=1}^{k=p} \frac{1}{2k-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{2k-1} \\ I_{2p+1} = I_1 - \sum_{k=1}^{k=p} \frac{1}{2k} \left(\frac{1}{2}\right)^{2k} \end{cases}$.

5) On pose $v_n = \sum_{k=1}^{k=2p} \frac{1}{k 2^k}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Montrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 1

On pose $I =]e, +\infty[$ pour tout x et y de I on pose $x * y = e^{1+(1-\ln x)(1-\ln y)}$

- 1) Montrer que $*$ est une loi de composition interne dans I .
- 2) Montrer que $*$ est associative et commutative dans I .
- 3) Montrer que la loi $*$ admet un élément neutre ε dans I à déterminer.
- 4) Montrer que $(I, *)$ est un groupe commutatif.
- 5) Montrer que l'ensemble $H = \{e^{1+2^n} / n \in \mathbb{Z}\}$ est un sous-groupe de $(I, *)$.
- 6) soit T la loi de composition interne définie dans $J =]1, +\infty[$ par :

$$xTy = (x-1)(y-1)+1$$

Et on considère l'application

$$\begin{array}{l} \varphi : I \longrightarrow J \\ x \longrightarrow \ln x \end{array}$$

- a) Montrer que φ est un isomorphisme de $(I, *)$ sur (J, T) .
- b) En déduire que (J, T) est un groupe commutatif.

Exercice 2

Le plan complexe étant rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$

Les deux parties de cet exercice sont largement indépendantes

PARTIE I

Soit $a \in \mathbb{C}^*$, on considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E_a) : z^2 - (1 + (1+i)a)z + ia^2 + a = 0$

- 1) Vérifier que a est une solution de (E_a)
- 2) On note par z_1 et z_2 les solutions de l'équation (E_a) tels que $z_1 = a$
 - a) Déterminer z_2 et vérifier que $z_2 = iz_1 + 1$
 - b) Dans le plan complexe on note par A et B les points d'affixe z_1 respectivement z_2
Montrer B est l'image de A par une rotation r dont on déterminera le centre et une mesure de son angle

PARTIE II

- 1) Soit $z \in \mathbb{C}$

a) Montrer que $|z| = |1+iz| \Leftrightarrow \operatorname{Im}(z) = \frac{1}{2}$

b) Déduire l'équivalence $\begin{cases} |z| = |1+iz| \\ |z| = 1 \end{cases} \Leftrightarrow z = e^{i\frac{\pi}{6}} \text{ ou } z = e^{i\frac{5\pi}{6}}$

- 2) On considère dans $\mathbb{C}$ le système suivant $(S) \begin{cases} z^n(1+iz) = 1 \\ |z| = 1 \end{cases}$ où n est un entier naturel non nul

a) Montrer que si z est une solution de (S) alors $z \in \left\{ e^{i\frac{\pi}{6}}, e^{i\frac{5\pi}{6}} \right\}$

b) Vérifier que $1 + ie^{i\frac{\pi}{6}} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $1 + ie^{i\frac{5\pi}{6}} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$

- c) Déduire que $e^{i\frac{\pi}{6}}$ est une solution de (S) si et seulement si $n \equiv -2[12]$
montrer de même que $e^{5i\frac{\pi}{6}}$ est une solution de (S) si et seulement si $5n \equiv 2[12]$
d) Justifier l'équivalence $5n \equiv 2[12] \Leftrightarrow n \equiv -2[12]$
e) Déduire suivant l'entier naturel n l'ensemble des solutions de (S)

Exercice 3

Dans tout ce qui suite p est un nombre premier tel que $p \equiv 5[6]$ et $p > 3$.

Et on considère dans $\mathbb{N}^{*2}$ l'équation $(E) \quad x^3 + y^3 = p(1 + xy)$

Soit $(x, y) \in \mathbb{N}^{*2}$ une solution de (E)

On pose $d = x \wedge y$ et soit $(a, b) \in \mathbb{N}^{*2}$ tel que $x = da$ et $y = db$

- 1) (a) Justifier que $a \wedge b = 1$ et $d^3(a^3 + b^3) = p(1 + d^2ab)$
(b) En remarquant que $1 = (1 + d^2ab) - d^2ab$ montrer que $d^3 \wedge (1 + d^2ab) = 1$
(c) Déduire que $d = 1$ ainsi on a donc
$$\begin{cases} (a^3 + b^3) = p(1 + ab) \\ a \wedge b = 1 \end{cases}$$
- 2) Montrer que $p \wedge b = 1$ et $p \wedge a = 1$
- 3) Montrer que $a^3 \equiv -b^3[p]$ et que $a^{p-1} \equiv b^{p-1}[p]$
- 4) En déduire que $a \equiv -b[p]$ on pourra écrire p sous la forme $p = 5 + 6k$ avec $k \in \mathbb{N}^*$
- 5) On pose donc $a + b = pu$ avec $u \in \mathbb{N}^*$, montrer que $u(a - b)^2 + (u - 1)ab = 1$
en déduire que
$$\begin{cases} a + b = p \\ |a - b| = 1 \end{cases}$$
- 6) Déduire dans $\mathbb{N}^{*2}$ l'ensemble des solutions de l'équation (E) .

Exercice 4**PARTIE I**

Soit la fonction définie par $f(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$

- 1) Vérifier que f est impaire et calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$
- 2) Etudier les variations de f
- 3) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans vers l'intervalle $I =]-1, 1[$, on note f^{-1} sa bijection réciproque (expression de f^{-1} non demand  e)
- 4) Ecrire l'équation de la tangente T au point $O(0, 0)$

5) Vérifier que $\forall x \in \mathbb{R} : f'(x) = 1 - f^2(x)$ en déduire que $\forall x \geq 0 : 0 \leq f(x) \leq x$

6) Justifier que $\forall x \geq 0 : 0 \leq 1 - f'(x) \leq x^2$ en déduire $\forall x \geq 0 : 0 \leq x - f(x) \leq \frac{x^3}{3}$

7) Pour chaque entier naturel n non nul

on pose $S_n = \sum_{k=1}^n f\left(\frac{1}{n+k}\right)$ et on pose $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}$

8)

a. Vérifier que $u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \frac{k}{n}}$ en déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ln 2$

b. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^* : 0 \leq u_n - S_n \leq \frac{1}{3n^2}$ en déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$

(utiliser la question 6 partie 1)

9) Construire dans le même repère la tangente T et les courbes (C_f) et $(C_{f^{-1}})$

soit $\lambda \in]0, 1[$. On note S_λ l'aire en cm^2 du domaine

$$D_\lambda = \{M(x, y) \in P / x \in [0, \lambda], y \in [0, \lambda], f(x) \leq y \leq f^{-1}(x)\}$$

10) Montrer que la fonction $x \rightarrow \ln\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$

11) Déduire $S_\lambda = \lambda^2 - 2 \ln\left(\frac{e^\lambda + e^{-\lambda}}{2}\right) cm^2$

PARTIE II

Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
$$\begin{cases} F(x) = \int_x^{2x} \frac{f(t)}{t} dt & ; x \neq 0 \\ F(0) = 0 \end{cases}$$

1) Montrer que F est une fonction impaire

2) Montrer que $\forall x > 0 : f(x) \int_x^{2x} \frac{1}{t} dt \leq F(x) \leq f(2x) \int_x^{2x} \frac{1}{t} dt$

3) Déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \ln 2$ et que F est continue en 0

4) Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}^{**}$ et que $\forall x > 0 : F'(x) = \frac{f(2x) - f(x)}{x}$

5) En appliquant le théorème des accroissements finis deux fois de suite à la fonction F puis

à f montrer que $(\forall x > 0) : 1 - f^2(2x) \leq \frac{F(x) - F(0)}{x} \leq 1 - f^2(x)$

6) Déduire que F est dérivable en 0 et que $F'(0) = 1$

7) Donner le tableau de variation de F sur $\mathbb{R}^+$

Exercice 1

On rappelle que $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau unitaire non commutatif.

On considère l'ensemble $\mathcal{E} = \left\{ M(a, b) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} / (a, b) \in \mathbb{R}^2 \text{ et } a^2 + b^2 = 1 \right\}$.

1) a) Vérifier que $(\forall (a, b, x, y) \in \mathbb{R}^4) : M(a, b) \times M(x, y) = M(ax - by, ay + bx)$.

b) En déduire que $\mathcal{E}$ est une partie stable dans $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$.

2) On pose $\mathcal{U} = \{z \in \mathbb{C} / |z| = 1\}$.

Montrer que $\mathcal{U}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$.

3) On considère l'application définie par $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{E}$
 $a - ib \mapsto M(a, b)$.

a) Montrer que f est un isomorphisme de $(\mathcal{U}, \times)$ vers $(\mathcal{E}, \times)$.

b) En déduire la structure de $(\mathcal{E}, \times)$ en précisant l'inverse de la matrice $M(a, b)$.

4) On pose $A = M\left(\frac{-1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. On note $A^{2024} = \underbrace{A \times A \times \dots \times A}_{2024 \text{ fois}}$.

a) Montrer que $A^{2024} = A$

b) Déterminer l'inverse de la matrice A^{2024} .

5) On pose $I = M(1, 0)$ et $J = M(0, 1)$.

Résoudre dans $\mathcal{E}$ l'équation : $J \times X^3 = I$

Exercice 2

Partie A

Soient p et q deux nombres premiers tels que $p \neq q$ et soit r un entier naturel tel que $r \wedge p = 1$ et $r \wedge q = 1$.

1) a) Montrer que p divise $(r^{p-1} - 1)$ et que q divise $(r^{q-1} - 1)$.

b) En déduire que p et q divisent $(r^{(p-1)(q-1)} - 1)$.

c) Montrer que pq divise $(r^{(p-1)(q-1)} - 1)$.

2) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation : $2025^{192} \equiv 3 [221]$ (Remarquer que : $221 = 13 \times 17$ et $2025 = 3^4 \times 5^2$).

Partie B

On admet que 1013 est premier.

1) Montrer que : $(\forall a \in \mathbb{Z}) : a \wedge 1013 \Rightarrow a^{2024} \equiv 1 [1013]$.

2) On considère dans $\mathbb{Z}$ l'équation $(E) : x^{2023} \equiv 2 [1013]$.

Soit x une solution de l'équation (E) .

a) Montrer que $x \wedge 1013 = 1$.

b) Déduire les solutions de l'équation (E) dans $\mathbb{Z}$.

Partie C

On considère la suite numérique (a_n) définie par : $a_n = 2 \times 5^n + 7$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

- 1) a) Justifier que pour tout entier naturel n , a_n est impair.
 b) Déterminer suivant les valeurs de n , le reste de la division euclidienne de 5^n par 8.
 c) En déduire que pour tout n de $\mathbb{N}$, $a_n \equiv 1 [8]$.
- 2) a) Montrer que si $\begin{cases} x \equiv 1 [8] \\ x \equiv 7 [125] \end{cases}$, alors : $x \equiv 257 [1000]$.
 b) Montrer que pour tout $n \geq 3$, $a_n \equiv 257 [1000]$.
 c) Déterminer les trois derniers chiffres (chiffres des unités, des dizaines et des centaines) de $(2 \times 5^{2020} + 7)(2 \times 5^{2021} + 7)$?
- 3) a) Vérifier que pour tout n de $\mathbb{N}$, $5a_{2n} - a_{2n+1} = 28$
 b) Soit $d = \text{PGCD}(a_{2n}, a_{2n+1})$. Montrer que $d \neq 7$.
 c) Trouver la valeur de d .
- 4) Soit p un nombre premier, déterminer la valeur de p pour que a_p soit divisible par p .

Exercice 3

Partie 1

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E): z^2 + (4 - 3i)z + 1 - 7i = 0$.

- 1) a) Déterminer les racines carrées du nombre complexe $3 + 4i$.
 b) En déduire les solutions a et b de l'équation (E) telles que $\text{Re}(b) < \text{Re}(a)$
- 2) Soit α un argument de a et soit β un argument de b .
 a) Donner la forme trigonométrique du nombre complexe $c = 1 - 7i$ en fonction de α et β .
 b) Déterminer sous forme exponentielle en fonction de α et β chacune des solutions de l'équation $(F): z^4 + (4 - 3i)z^2 + 1 - 7i = 0$.

Partie 2

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

On considère les points A et B d'abscisses respectives a et b . Soit R la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{4}$ et

soit H l'homothétie de centre O et de rapport $\sqrt{2}$. On pose $F = R \circ H$.

- 1) a) Montrer que l'écriture complexe de la transformation F est $z' = (1 + i)z$.
 b) Justifier que $F(A) = B$
- 2) On pose $M_0 = A$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $M_{n+1} = F(M_n)$ et on désigne par z_n l'abscisse du point M_n .
 Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) : z_n = (1 + i)^n (-1 + 2i)$.
- 3) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le triangle $OM_n M_{n+1}$ est rectangle et isocèle.
 b) Déterminer tous les entiers naturels n pour que les points O , A et M_n soient alignés.
 c) Montrer qu'il n'existe aucun point M_n appartenant à l'axe des réels.

Exercice 4

Partie 1

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = x e^{-x}$

Soit (C_g) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1) a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ et interpréter ce résultat graphiquement.

b) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{g(x)}{x}$ et en déduire que la courbe (C_g) admet une branche parabolique au voisinage de $-\infty$ dont on précisera la direction.

2) Montrer que pour tout réel x , $g'(x) = (1-x)e^{-x}$ puis dresser le tableau de variation de g .

3) Montrer que pour tout réel x , $g''(x) = (x-2)e^{-x}$ puis étudier la concavité de la courbe (C_g) et déterminer son point d'inflexion.

4) Construire la courbe (C_g) dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

5) Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, on pose : $\mathcal{A}(\lambda) = \int_0^\lambda g(x) dx$.

a) Vérifier que $(\forall x \in \mathbb{R}) : g(x) + 2g'(x) + g''(x) = 0$, et en déduire qu'une primitive de g est la fonction $G : x \mapsto -2g(x) - g'(x)$.

b) Exprimer $\mathcal{A}(\lambda)$ en fonction de λ puis calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \mathcal{A}(\lambda)$ et donner une interprétation graphique du résultat.

6) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{2n} k \times \sqrt[n]{e^{-k}}$.

Vérifier que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : S_n = \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{2n} g\left(\frac{k}{2n}\right)$ et en déduire que la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente en précisant sa limite.

Partie 2

Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(0) = \frac{1}{2}$ et $F(x) = \frac{2}{x^2} \int_0^x \frac{g(t)}{1+e^{-t}} dt$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.

1) a) En utilisant une intégration par changement de variable, montre que :

$$(\forall x \in \mathbb{R}^*); \int_0^{-x} \frac{g(t)}{1+e^{-t}} dt = \int_0^x \frac{u}{1+e^{-u}} du$$

b) En déduire que $(\forall x \in \mathbb{R}); F(-x) = 1 - F(x)$.

2) a) Vérifier que $(\forall t \in \mathbb{R}^+); 0 \leq g(t) \leq e^{-t}$, puis en déduire que $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*); 0 \leq F(x) \leq \frac{2e^{-1}}{x}$.

b) Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$, puis calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x)$ en justifiant la réponse.

3) Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*); F'(x) = \frac{2}{x} \left(\frac{1}{1+e^x} - F(x) \right)$.

4) a) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, en utilisant une intégration par parties, montrer que :

$$F(x) = \frac{1}{1+e^x} + \frac{1}{x^2} \int_0^x \left(\frac{t}{1+e^t} \right)^2 e^t dt.$$

b) En déduire que : $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*); F'(x) = \frac{-2}{x^3} \int_0^x \left(\frac{t}{h(t)} \right)^2 dt$ où $h(t) = e^{\frac{t}{2}} + e^{-\frac{t}{2}}$

5) a) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*); \frac{x^3}{3(h(x))^2} \leq \int_0^x \left(\frac{t}{h(t)} \right)^2 dt \leq \frac{x^3}{12}$.

(Remarque que h est croissante sur $\mathbb{R}_+$)

b) En déduire que : $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*); \frac{-1}{6} \leq F'(x) \leq \frac{-2}{3(h(x))^2}$.

6) a) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*); \frac{1}{1+e^x} \leq F(x) \leq \frac{1}{1+e^x} + \frac{x}{3}$.

(On pourra utiliser le résultat de la question Partie 2/4)a))

b) En déduire que F est continue à droite en 0.

7) Montrer que F est dérivable en 0 et que $F'(0) = \frac{-1}{6}$.

(On pourra appliquer le théorème des accroissements finis à F).

8) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $F(x) = nx$ admet une solution unique a_n dans $\mathbb{R}$.

b) Justifier que $(\forall n \in \mathbb{N}^*); a_n > 0$.

9) Justifier que la suite $(a_n)_{n \geq 1}$ est convergente, puis montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$.

10) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} n a_n = \frac{1}{2}$ et en déduire la valeur de $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(n a_n - \frac{1}{2} \right)$.



Sujet 8

Exercice 1

I - Soit m un nombre complexe tel que $m \neq i$.

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + (m - i)z + (m - i)^2 = 0$

II - On considère, dans le plan complexe rapporté à un repère ortho-normé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, les points A, B, C et D d'afixes respectives

$$z_A = i - m, z_B = (m - i)j, z_C = (m - i)\bar{j} \text{ et } z_D = (i - m)j \text{ où } j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Soit R_1 la rotation de centre A et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ et R_2 la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

- 1
 - a Vérifier que $j^2 = \bar{j}$, $1 + j + \bar{j} = 0$ et $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$.
 - b Montrer que $R_1(C) = B$.
 - c Donner l'écriture complexe puis la nature de la transformation $R_2 \circ R_1$
- 2 Montrer que les points A, B, C et D appartiennent à un même cercle dont on déterminera le centre et le rayon.
- 3 Montrer que le quadrilatère ABOC est un losange.

Exercice 2

Partie I :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère la fonction g_n définie sur $] -1, +\infty[$ par :

$$g_n(x) = n \ln(1 + x) + \frac{x}{1 + x}.$$

- 1 Montrer que la fonction g_n est dérivable sur $] -1, +\infty[$ et calculer $g'_n(x)$ pour tout $x \in] -1, +\infty[$.
- 2 Étudier le sens de variation de la fonction g_n puis dresser son tableau de variation.
- 3 En déduire le signe de $g_n(x)$ pour tout $x \in] -1, +\infty[$.

Partie II :

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note f_n la fonction définie sur $] -1, +\infty[$ par :

$$f_n(x) = x^n \ln(1+x)$$

et soit (C_n) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- 1 Calculer les limites $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$.

(On distinguera les cas de la parité de n pour la première limite).

- 2 a Montrer que la fonction f_n est dérivable sur $] -1, +\infty[$ et que

$$(\forall x \in] -1, +\infty[) : f'_n(x) = x^{n-1} g_n(x)$$

- b Étudier le sens de variation de f_n selon la parité de n puis dresser son tableau de variation.

- 3 Construire dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ les courbes (C_1) et (C_2) .

Partie III :

On considère la suite numérique $(u_n)_{n \geq 1}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = \int_0^1 f_n(x) dx.$$

- 1 a Calculer l'intégrale $\int_0^1 \frac{t^2}{1+t} dt$.

- b Montrer que $u_1 = \frac{1}{4}$.

- 2 a Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est monotone.

- b Dédire que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est convergente.

- c Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : 0 \leq u_n \leq \frac{\ln 2}{n+1}$.

- d Dédire la limite de la suite $(u_n)_{n \geq 1}$.

- 3 Pour tout $x \in [0, 1]$ et pour tout entier naturel $n \geq 2$, on pose :

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^k$$

- a Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^* - 1) : S_n(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{1+x}$.

- b En déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}^* - 1) : \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln 2 + (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t} dt$.

- c Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^* - 1) : u_n = \frac{\ln 2}{n+1} + \frac{(-1)^n}{n+1} \left(\ln 2 - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1} \right)$.

- d En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n \geq 1}$.

(On pourra montrer que $\int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t} dt \leq \frac{1}{n+2}$)

Exercice 3

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

Pour tout $z \in \mathbb{C} - \{i\}$, on pose $\varphi(z) = i \left(\frac{z-2i}{z-i} \right)$.

Soient A et B les points d'affixes respectives $z_A = 2i$ et $z_B = i$ et M le point d'affixe un nombre complexe z .

I - ① Montrer que $\forall z \in \mathbb{C} - \{i\} : |\varphi(z)| = \frac{AM}{BM}$

et $\forall z \in \mathbb{C} - \{i, 2i\} : \arg(\varphi(z)) \equiv \left(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM} \right) + \frac{\pi}{2} [2\pi]$

② Déterminer la nature de chacun des deux ensembles :

$$(E) = \{M(z)/\varphi(z) = 1\} \quad ; \quad (F) = \{M(z)/\varphi(z) \in i\mathbb{R}\}$$

II - ① Montrer que $\forall z \in \mathbb{C} - \{i\} : \begin{cases} |\varphi(z) - i| = \frac{1}{|z - i|} \\ \arg(\varphi(z) - i) \equiv -\arg(z - i) [2\pi] \end{cases}$.

② Montrer que si le point $M(z)$ appartient au cercle (C) de centre B et de rayon $\frac{1}{2}$, alors le point $M'(\varphi(z))$ appartient à un cercle (C') dont on déterminera les éléments caractéristiques.

③ Construire le point $M'(\varphi(z))$ à partir du point $M(z)$.

III - ① Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\varphi(z) = z$. On notera par u et v les solutions de cette équation tel que $\operatorname{Re}(u) = 1$.

② Soit $z \in \mathbb{C} - \{i, u, v\}$. On considère les points $M(z)$; $M'(\varphi(z))$; $C(u)$ et $D(v)$.

a Montrer que $\frac{\varphi(z) - u}{\varphi(z) - v} = -\frac{z - u}{z - v}$

b En déduire que $\left(\overrightarrow{M'D}, \overrightarrow{M'C} \right) \equiv \left(\overrightarrow{MD}, \overrightarrow{MC} \right) [2\pi]$.

c Montrer que si les points M, C et D sont alignés, alors les points M', M, C et D sont alignés.

Et si les points M, C et D ne sont pas alignés, alors les points M', M, C et D sont cocycliques.

IV - On pose $z = i + e^{i\theta}$ où $\theta \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$. Déterminer le module et un argument de $\varphi(z)$.

Exercice 4

Partie I :

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = (2 - x)e^x - 2$.

- 1 Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$.
- 2 Dresser le tableau de variation de la fonction g .
- 3 Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[1, +\infty[$ et que $1 < \alpha < 2$.
- 4 Déterminer le signe de $g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Partie II :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2}{e^x - 1} & ; \quad x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ tel que $\|\vec{i}\| = 2cm$.

- 1 Étudier la continuité de la fonction f en 0.
- 2 Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$
- 3
 - a Étudier la dérivabilité de f en 0
 - b Montrer que f est dérivable sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$ et que

$$\forall x \in \mathbb{R}^* : f'(x) = \frac{x g(x)}{(e^x - 1)^2}$$

- c Montrer que $f(\alpha) = \alpha(2 - \alpha)$ et dresser le tableau de variation de la fonction f .
- 4 Étudier les branches infinies de la courbe (C_f) .
- 5 Construire la courbe (C_f) .

Partie III :

Soit $x \in \mathbb{R}^+$, on pose : $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ et $G(x) = \int_0^x t^2 e^{-t} dt$

- 1 Calculer $G(x)$ en fonction de x puis calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x)$.
- 2 Montrer que la fonction F est croissante sur $\mathbb{R}^+$.
- 3
 - a Montrer que $\forall t \in [\ln 2, +\infty[: f(t) \leq 2te^{-t}$.
 - b Montrer que la fonction F est majorée sur $\mathbb{R}^+$.

Partie IV :

On admet que $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = L$ où $L \in \mathbb{R}$.

- 1
 - a Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)(\forall x \in \mathbb{R}^*) : \frac{1}{e^x - 1} = \frac{e^{-nx}}{e^x - 1} + \sum_{p=1}^n e^{-px}$.
 - b Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)(\forall x \in \mathbb{R}^+) : 0 \leq \int_0^x f(t)e^{-nt} dt \leq \frac{\alpha(2-\alpha)}{n}$.
 - c Calculer en fonction de n et x , l'intégrale $I_n(x) = \int_0^x t^2 e^{-nt} dt$.
 - d Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} I_n(x)$.
- 2
 - a Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)(\forall x \in \mathbb{R}^+) : \int_0^x f(t)e^{-nt} dt = F(x) - \sum_{p=1}^n I_p(x)$.
 - b En déduire que la fonction $x \mapsto \int_0^x f(t)e^{-nt} dt$ admet une limite finie au voisinage de $+\infty$.
 - c Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $L_n = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x f(t)e^{-nt} dt$.
Montrer que $L - L_n = 2\left(1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{n^3}\right)$.
 - d Montrer que la suite réelle $(L_n)_{n \geq 1}$ est convergente.
 - d On considère la suite numérique $(U_n)_{n \geq 1}$ définie par : $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^3}$.
Montrer que $(U_n)_{n \geq 1}$ est convergente et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \frac{L}{2}$.



Sujet 9



Exercice 1

On note par $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ et $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \times)$ respectivement l'espace vectoriel réel et l'anneau unitaire des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels.

On pose $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$

et on considère l'ensemble $\mathcal{E} = \{M = aI + bA / (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$.

- 1
 - a Montrer que $(\mathcal{E}, +)$ est un sous-groupe du groupe $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +)$.
 - b Établir que $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est stable pour la multiplication des matrices par un réel.
 - c En déduire que $(\mathcal{E}, +, \cdot)$ est un espace vectoriel réel.
 - d Montrer que (I, A) est une base de l'espace vectoriel $\mathcal{E}$.
- 2 Soit $(x, y, a, b) \in \mathbb{R}^4$ tel que $(a, b) \neq (0, 0)$.
Montrer que
$$\begin{cases} ax - 2by = 0 \\ bx + (a - 2b)y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x, y) = (0, 0).$$
- 3 $(\mathbb{C}^*, \times)$ est le groupe des nombres complexes non nuls. On pose $\mathcal{E}^* = \mathcal{E} - \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$
 - a Montrer que $A^2 + 2A + 2I = O$, où $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
 - b Montrer que : $\forall (M, M') \in \mathcal{E}^{*2}; M \times M' \in \mathcal{E}^*$.
- 4 On considère l'application $\varphi : \begin{cases} \mathbb{C}^* & \rightarrow & \mathcal{E}^* \\ a + ib & \mapsto & \varphi(a + ib) = (a + b)I + bA \end{cases}$
 - a Montrer que φ est une bijection de $\mathbb{C}^*$ sur $\mathcal{E}^*$.
 - b Établir que φ est un homomorphisme de $(\mathbb{C}^*, \times)$ sur $(\mathcal{E}^*, \times)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
 - c En déduire la structure de $(\mathcal{E}^*, \times)$.

Exercice 2

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

On considère pour tout réel $\theta \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$, l'équation

$$E_\theta : z^2 - 2ie^{i\theta}z - 4(1-i)e^{i2\theta} = 0$$

- 1 Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation E_θ .
- 2 On considère dans le plan complexe, les points M et M' d'affixes respectives $2e^{i\theta}$ et $-2(1-i)e^{i\theta}$ et le point N l'image de M par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
 - a Déterminer l'ensemble décrit par les points M lorsque θ varie dans l'intervalle $]0, \frac{\pi}{2}[$.
 - b Déterminer l'affixe du point N .
 - c Montrer que le quadrilatère $OMNM'$ est un parallélogramme.
 - d En déduire une construction du point M' à partir du point M .
- 3
 - a Déterminer en fonction de θ , le module et un argument de $-2(1-i)e^{i\theta}$.
 - b Déterminer l'ensemble décrit par les points M' lorsque θ varie dans l'intervalle $]0, \frac{\pi}{2}[$.
- 4 On considère l'équation $E'_\theta : (z\sqrt{2} - 1)^3 = (-2 + 2i)e^{i\theta}z^3$.
 - a Déterminer les racines cubiques du nombre complexe $(-2 + 2i)e^{i\theta}$.
 - b Soit $\alpha \in]0, \pi[$. Montrer l'équivalence suivante :

$$\left[\forall z \in \mathbb{C}^*; \frac{z\sqrt{2} - 1}{z} = \sqrt{2}e^{i\alpha} \right] \Leftrightarrow z = \frac{\sqrt{2}}{4} \left(1 + i \frac{1}{\tan \frac{\alpha}{2}} \right).$$
 - c En déduire les solutions de l'équation E'_θ .

Exercice 3

Partie I

Soit x un nombre réel.

- 1 Montrer que : $x^4 + 4 = (x^2 + 2)^2 - 4x^2$.
- 2 En déduire que $x^4 + 4$ peut s'écrire sous forme de produit de deux trinômes à coefficients réels.

Partie II

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On considère les entiers $A = n^2 - 2n + 2$ et $B = n^2 + 2n + 2$ et on note $d = A \wedge B$.

- 1 Montrer que $n^4 + 4$ n'est pas premier.
- 2 Montrer que, tout diviseur de A qui divise n , divise 2.
- 3 Montrer que, tout diviseur commun de A et B , divise $4n$.

- 4 Dans cette question , on suppose que n est impair.
- a Montrer que A et B sont impairs et en déduire que d est impair.
 - b Montrer que d divise n .
 - c En déduire que d divise 2 puis que A et B sont premiers entre eux.
- 5 Dans cette question, on suppose que n est pair.
- a Montrer que $n^2 - 2n + 2$ est divisible par 4.
 - b Montrer que d s'écrit sous la forme $d = 2p$ où p est impair.
 - c Montrer que p divise n , et en déduire que $d = 2$.

Exercice 4

Soit f la fonction numérique définie sur $]0, +\infty[$ par : $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$.

- 1
- a Dresser le tableau de variation de la fonction f .
 - b Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 6$, l'équation $f(x) = \frac{1}{n}$ admet une unique solution a_n dans l'intervalle $[1, \sqrt{e}]$.
 - c Prouver que la suite $(a_n)_{n \geq 6}$ est décroissante et déduire qu'elle est convergente.

- 2
- a Montrer que pour tout entier naturel $k > 1$, on a :

$$\frac{\ln(k+1)}{(k+1)^2} \leq \int_k^{k+1} \frac{\ln x}{x^2} dx \leq \frac{\ln k}{k^2}$$

- b En utilisant une intégration par parties, exprimer en fonction de n , l'intégrale $\int_2^n \frac{\ln x}{x^2} dx$.

- 3 Pour tout entier naturel $n > 1$, on pose $S_n = \frac{\ln 2}{2^2} + \frac{\ln 3}{3^2} + \frac{\ln 4}{4^2} + \dots + \frac{\ln n}{n^2}$.

- a Montrer que, pour tout entier naturel $n > 1$, on a :

$$S_n - \frac{\ln 2}{2^2} \leq \int_2^n \frac{\ln x}{x^2} dx \leq S_n - \frac{\ln n}{n^2}$$

- b En déduire que : $\frac{1 + \ln 2}{2} - \frac{n + (n-1) \ln n}{n^2} \leq S_n \leq \frac{2 + 3 \ln 2}{4} - \frac{1 + \ln n}{n}$.

- 4 Pour tout entier naturel non nul n , on pose $U_n = \sum_{k=1}^n \frac{(\ln 2)^{k-1}}{k!}$ et

$$I_n = \frac{1}{n!} \int_1^2 \frac{(\ln x)^n}{x^2} dx.$$

- a Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*); 0 \leq I_n \leq \frac{(\ln 2)^n}{n!}$ et en déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.
- b Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*); I_{n+1} = I_n - \frac{1}{2} \frac{(\ln 2)^{n+1}}{(n+1)!}$.

- c En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; I_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left[\frac{\ln 2}{1!} + \frac{(\ln 2)^2}{2!} + \dots + \frac{(\ln 2)^n}{n!} \right]$.
- d Exprimer U_n en fonction de I_n puis calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$.

Exercice 5

On considère la fonction numérique g de la variable réelle x définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2} dt$$

et soit $(\mathcal{C}_g)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- 1 a Calculer $g(0)$.
- b Montrer que : $(\forall x > 0) ; \frac{\pi}{4} e^{-2x} \leq g(x) \leq \frac{\pi}{4} e^{-x}$ et déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.
- 2 Montrer que $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$ et que $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{g(x)}{x} = -\infty$, puis donner une interprétation géométrique aux résultats.

- 3 a En utilisant une intégration par parties, montrer que :

$$(\forall u \in \mathbb{R}) ; \int_0^u (u-t) e^t dt = e^u - 1 - u.$$

- b Montrer que : $(\forall u \in \mathbb{R}^+) ; 0 \leq \int_0^u (u-t) e^t dt \leq \frac{u^2}{2} e^u$.

- c En déduire que : $(\forall u \in \mathbb{R}) ; |e^u - 1 - u| \leq \frac{u^2}{2} e^{|u|}$.

- 4 Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et soit $h \in]-1, 0[\cup]0, 1[$.

- a Vérifier que :

$$\frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h} + \int_0^1 e^{-x_0(1+t^2)} dt = \int_0^1 e^{-x_0(1+t^2)} \left(\frac{e^{-h(1+t^2)} - 1 + h(1+t^2)}{h(1+t^2)} \right) dt$$

- b En utilisant la question 3)c), montrer que :

$$\left| \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h} + \int_0^1 e^{-x_0(1+t^2)} dt \right| \leq |h| e^2 \int_0^1 e^{-x_0(1+t^2)} dt.$$

- c Déduire que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que :

$$(\forall x \in \mathbb{R}) ; g'(x) = - \int_0^1 e^{-x(1+t^2)} dt.$$

- 5 a Dresser le tableau de variation de g .
- b Déterminer l'équation de la tangente (T) à la courbe $(\mathcal{C}_g)$ au point d'abscisse 0.
- b Construire la courbe $(\mathcal{C}_g)$ et la droite (T) .

FIN



Sujet 10



Exercice 1

On pose $G = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$.

Soit $\perp$ la loi de composition interne définie sur G par :

pour tout (a, b) et (x, y) de G : $(a, b) \perp (x, y) = (ax, ax + ay + bx)$.

Partie I

- 1/ Montrer que $\perp$ est une loi associative.
- 2/ Montrer que $(G, \perp)$ est un groupe commutatif.
- 3/ Soit n de $\mathbb{N}^*$, calculer : $\underbrace{(a; b) \perp (a; b) \perp \cdots \perp (a; b)}_{n \text{ fois}}$

Partie II

On rappelle que $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ est un espace vectoriel réel et que $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ est un anneau unitaire.

On pose : $\mathcal{E} = \left\{ M(a, b) = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} / (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

- 1/ a) Montrer que $(\mathcal{E}, +)$ est un groupe commutatif.
b) Calculer J^2 et $(I + J)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- 2/ On pose $K = \{ M(a; b) / (a; b) \in G \}$ et soit φ l'application définie de G vers $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ par : $\forall (a; b) \in G \quad \varphi((a; b)) = M(a; a + b)$
 - a) Montrer que φ est un homomorphisme de $(G; \perp)$ vers $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}); \times)$
 - b) Déterminer la structure de $(K; \times)$ en justifiant votre réponse.
 - c) $(K; +; \times)$ est-il un corps ?
- 3/ On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.
En utilisant l'homomorphisme φ déterminer A^{-1} et A^{2023} .

Exercice 2

Partie I

- 1/ En utilisant l'algorithme d'EUCLIDE, déterminer une solution particulière de l'équation diophantienne (E) : $27x - 31y = 1$.
- 2/ Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E).

Partie II

On considère l'ensemble $A = \{0; 1; 2; \dots; 30\}$

- 1/ Déterminer le nombre a de l'ensemble A tel que $27a \equiv 1 \pmod{31}$.
- 2/ Soit f l'application de A vers A qui à chaque élément n de A associe le reste de la division euclidienne de $27n + 4$ par 31.
 - a) Soient n et m deux entiers de l'ensemble A .
Montrer que $f(n) = f(m) \Rightarrow n = m$.
 - b) Soit m un élément de A , déterminer n de A tel que $m = f(n)$.
 - c) Montrer que f est bijective puis déterminer sa bijection réciproque f^{-1} .

Exercice 3

le plan complexe $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$ et soit $m \in \mathbb{C}^* - \{i\}$

Partie I

- 1/ On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2 - m(m+i)z + im^3 = 0$
 - a) Soit Δ le discriminant de l'équation (E). Montrer que $\Delta = (m(m-i))^2$
 - b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E)
 - c) Déterminer sous forme exponentielle les valeurs de m pour que le produit des solutions soit $8e^{i\frac{\pi}{3}}$
- 2/ On note F_m la transformation du plan $\mathcal{P}$ d'expression complexe $z' = imz + m^2$. Trouver m sous forme exponentielle pour que la transformation F_m soit une rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$ et déterminer dans ce cas l'axe du centre Ω de la rotation.

Partie II

On considère les points $A(m)$, $B(im)$, $C(m(1+i))$

- 1/ Montrer que le triangle (OAB) est un triangle isocèle rectangle en O
- 2/ Montrer que $(OACB)$ est un carré
- 3/ Soit $P(p)$ et $Q(q)$ des points du plan tels que :

* P l'image de A par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$

* Q est l'image de C par la rotation de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{3}$

- Montrer que $p = me^{i\frac{\pi}{3}}$ et $q = m(e^{i\frac{\pi}{6}} + 1)$
- Vérifier que $q - p = m(e^{i\frac{\pi}{6}} + e^{-i\frac{\pi}{3}})$ et $im - p = m(e^{i\frac{\pi}{2}} - e^{i\frac{\pi}{3}})$
- Déduire que les points B, P et Q sont alignés

Exercice 4

Partie I

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x + e^{-x}$

On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$

- Étudier les variations de f (limites aux bornes + dérivée + Tableau de variation)
- Montrer que (C) admet une asymptote oblique dont on précisera l'équation
- Tracer la courbe (C)

Partie II

On considère la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ définies par :

$$u_1 = 0, \quad \text{et pour tout entier naturel } n \text{ non nul, } u_{n+1} = f(u_n)$$

- Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : \ln(n+1) \leq \ln(n) + \frac{1}{n}$.
- Vérifier que, $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : f(\ln(n)) = \ln(n) + \frac{1}{n}$
 - Déduire par récurrence que, $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : \ln(n) \leq u_n$
 - Calculer la limite de la suite $(u_n)_{n \geq 1}$
- En utilisant 2)b) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : u_{n+1} - u_n \leq \frac{1}{n}$
 - Déduire que $(\forall n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}) : u_n \leq 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n-1}$
- Montrer que : $(\forall k \in \mathbb{N} - \{0, 1\}) : \frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^k \frac{1}{x} dx$.
 - Montrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on a : $u_n \leq 1 + \ln(n-1)$
 - Déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{\ln(n)} = 1$
- Pour tout entier naturel non nul n on pose : $b_n = e^{u_n}$
Vérifier que pour tout entier naturel non nul $n : b_{n+1} = b_n \times e^{\frac{1}{b_n}}$

6/ a) Soit $x \in]0, 1]$ on pose pour chaque $t \in \mathbb{R}^+ : \varphi(t) = e^{\sqrt{t}} - 1 - \sqrt{t}$
 En appliquant le théorème des accroissements finis à φ sur $[0, x^2]$,
 montrer que $\exists c \in]0, x^2[: \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \frac{1}{2} \frac{e^{\sqrt{c}} - 1}{\sqrt{c}}$. puis déduire que
 $\exists d \in]0, x[: \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \frac{1}{2} e^d$.

b) Montrer que $(\forall x \in]0, 1]) : 0 \leq e^x - x - 1 \leq \frac{x^2}{2} e$.

c) Déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : 0 \leq b_{n+1} - b_n - 1 \leq \frac{1}{2n} e$.

d) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}) : 0 \leq b_n - n \leq \frac{e}{2} (1 + \ln(n-1))$,

en déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b_n}{n} = 1$.

7/ Montrer alors que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - \ln(n)) = 0$

Partie III

soit g et h les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad : \quad g(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad h(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

1/ Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}) : g'(x) = h(x)$ et $h'(x) = g(x)$.

2/ Montrer que g réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ et donner sa bijection réciproque g^{-1} .

Partie IV

soit G la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} G(x) = \int_x^{2x} \frac{g(t)}{t^2} dt ; & x \neq 0 \\ G(0) = \ln 2 \end{cases}$$

1/ Montrer que G est paire

2/ Montrer que $(\forall x \in]0, +\infty[) : G(x) \geq g(x) \int_x^{2x} \frac{1}{t^2} dt$

3/ Vérifier que $(\forall x \in]0, +\infty[) : \int_x^{2x} \frac{1}{t^2} dt = \frac{1}{2x}$

Déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{G(x)}{x} = +\infty$

4/ Soit $x > 0$

a) Montrer que $\int_0^x (x-t) g(t) dt = g(x) - x$. On pourra appliquer $g' = h$ et $h' = g$

b) Soit $t > 0$, montrer que $0 \leq \int_0^t (t-u)g(u)du \leq g(t) \int_0^t (t-u)du$

et déduire que $0 \leq \frac{g(t)-t}{t^2} \leq \frac{1}{2}g(t)$

c) Soit $x > 0$, montrer que $0 \leq G(x) - \ln 2 \leq \frac{1}{2} \int_x^{2x} g(t)dt$

d) Déduire que G est continue en 0

5/ En appliquant le théorème de la valeur moyenne, montrer que

$$(\forall x > 0) : g(x) \leq \frac{1}{x} \int_x^{2x} g(t)dt \leq g(2x)$$

Et déduire que G est dérivable en 0 et que $G'(0) = 0$

6/ Montrer que G est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $(\forall x \in \mathbb{R}^*) : G'(x) = \frac{g(2x) - 2g(x)}{x^2}$

7/ Montrer que $(\forall x > 0) : g(2x) - 2g(x) > 0$ et donner le tableau de variation de G sur $\mathbb{R}^+$



FIN



Sujet 11



Exercice 1

On pose $A =]e, +\infty[$ pour tout x et y de A on pose $x * y = e^{1+(1-\ln x)(1-\ln y)}$

- 1/ Montrer que $*$ est une loi de composition interne dans A .
- 2/ Montrer que $*$ est associative et commutative dans A .
- 3/ Montrer que la loi $*$ admet un élément neutre ε dans A à déterminer.
- 4/ Montrer que $(A, *)$ est un groupe commutatif.
- 5/ Montrer que l'ensemble $H = \{e^{1+2^n} \mid n \in \mathbb{Z}\}$ est un sous-groupe de $(A, *)$.
- 6/ Soit T la loi de composition interne définie dans $B =]1, +\infty[$ par :

$$xTy = (x-1)(y-1) + 1$$

Et on considère l'application
$$\begin{cases} \varphi : A \longrightarrow B \\ x \mapsto \ln x \end{cases}$$

- a) Montrer que φ est un isomorphisme de $(A, *)$ sur (B, T) .
- b) En déduire que (B, T) est un groupe commutatif.

Exercice 2

Le plan complexe étant rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$
Les deux parties de cet exercice sont largement indépendantes

PARTIE I

Soit $a \in \mathbb{C}^*$, on considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E_a) : z^2 - (1 + (1+i)a)z + ia^2 + a = 0$

- 1/ Vérifier que a est une solution de (E_a)
- 2/ On note par z_1 et z_2 les solutions de l'équation (E_a) tels que $z_1 = a$
 - a) Déterminer z_2 et vérifier que $z_2 = iz_1 + 1$
 - b) Dans le plan complexe on note par A et B les points d'affixe z_1 respectivement z_2
Montrer que B est l'image de A par une rotation r dont on déterminera le centre et une mesure de son angle

PARTIE II

- 1/ Soit $z \in \mathbb{C}$

a) Montrer que $|z| = |1 + iz| \Leftrightarrow \text{Im}(z) = \frac{1}{2}$

b) Déduire l'équivalence $\begin{cases} |z| = |1 + iz| \\ |z| = 1 \end{cases} \Leftrightarrow z = e^{i\frac{\pi}{6}} \quad \text{ou} \quad z = e^{i\frac{5\pi}{6}}$

2/ On considère dans $\mathbb{C}$ le système suivant (S) : $\begin{cases} z^n(1 + iz) = 1 \\ |z| = 1 \end{cases}$ où n est un entier naturel non nul

a) Montrer que si z est une solution de (S) alors $z \in \{e^{i\frac{\pi}{6}}, e^{i\frac{5\pi}{6}}\}$

b) Vérifier que $1 + ie^{i\frac{\pi}{6}} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $1 + ie^{i\frac{5\pi}{6}} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$

c) Déduire que $e^{i\frac{\pi}{6}}$ est une solution de (S) si et seulement si $n \equiv -2 \pmod{12}$.

Montrer de même que $e^{i\frac{5\pi}{6}}$ est une solution de (S) si et seulement si $5n \equiv 2 \pmod{12}$

d) Justifier l'équivalence $5n \equiv 2[12] \Leftrightarrow n \equiv -2[12]$

e) Déduire suivant l'entier naturel n l'ensemble des solutions de (S)

Exercice 3

Dans tout ce qui suit p est un nombre premier tel que $p \equiv 5[6]$ et $p > 3$.

Et on considère dans $\mathbb{N}^{*2}$ l'équation (E) : $x^3 + y^3 = p(1 + xy)$

Soit $(x, y) \in \mathbb{N}^{*2}$ une solution de (E)

On pose $d = x \wedge y$ et soit $(a, b) \in \mathbb{N}^{*2}$ tel que $x = da$ et $y = db$

1/ a) Justifier que $a \wedge b = 1$ et $d^3(a^3 + b^3) = p(1 + d^2ab)$

b) En remarquant que $1 = (1 + d^2ab) - d^2ab$ montrer que $d^3 \wedge (1 + d^2ab) = 1$

c) Déduire que $d = 1$ ainsi on a donc $\begin{cases} (a^3 + b^3) = p(1 + ab) \\ a \wedge b = 1 \end{cases}$

2/ Montrer que $p \wedge b = 1$ et $p \wedge a = 1$

3/ Montrer que $a^3 \equiv -b^3[p]$ et que $a^{p-1} \equiv b^{p-1}[p]$

4/ En déduire que $a \equiv -b[p]$ on pourra écrire p sous la forme $p = 5 + 6k$ avec $k \in \mathbb{N}^*$

5/ On pose donc $a + b = pu$ avec $u \in \mathbb{N}^*$, montrer que $u(a - b)^2 + (u - 1)ab = 1$

en déduire que $\begin{cases} a + b = p \\ |a - b| = 1 \end{cases}$

6/ Déduire dans $\mathbb{N}^{*2}$ l'ensemble des solutions de l'équation (E).

Exercice 4

PARTIE I

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$

- 1/ Vérifier que f est impaire et calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$
- 2/ Étudier les variations de f
- 3/ Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans vers l'intervalle $I =]-1, 1[$, on note f^{-1} sa bijection réciproque (expression de f^{-1} non demandée)
- 4/ Écrire l'équation de la tangente T au point $O(0, 0)$
- 5/ Vérifier que $\forall x \in \mathbb{R} : f'(x) = 1 - f^2(x)$ en déduire que $\forall x \geq 0 : 0 \leq f(x) \leq x$
- 6/ Justifier que $\forall x \geq 0 : 0 \leq 1 - f'(x) \leq x^2$ en déduire $\forall x \geq 0 : 0 \leq x - f(x) \leq \frac{x^3}{3}$
- 7/ Pour chaque entier naturel n non nul

on pose $S_n = \sum_{k=1}^n f\left(\frac{1}{n+k}\right)$ et on pose $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}$

a) Vérifier que $u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \frac{k}{n}}$ en déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ln 2$

b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^* : 0 \leq u_n - S_n \leq \frac{1}{3n^2}$ en déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$

(utiliser la question 6 **partie 1**)

- 8/ Construire dans le même repère la tangente T et les courbes (C_f) et $(C_{f^{-1}})$ soit $\lambda \in]0, 1[$. On note S_λ l'aire en cm^2 du domaine

$$D_\lambda = \left\{ M(x, y) \in P / x \in [0, \lambda], y \in [0, \lambda], f(x) \leq y \leq f^{-1}(x) \right\}$$

- 9/ Montrer que la fonction $x \rightarrow \ln\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$

- 10/ Déduire $S_\lambda = \lambda^2 - 2 \ln\left(\frac{e^\lambda + e^{-\lambda}}{2}\right) cm^2$

PARTIE II

Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$\begin{cases} F(x) = \int_x^{2x} \frac{f(t)}{t} dt & ; \quad x \neq 0 \\ F(0) = 0 \end{cases}$$

1/ Montrer que F est une fonction impaire

2/ Montrer que $\forall x > 0 : f(x) \int_x^{2x} \frac{1}{t} dt \leq F(x) \leq f(2x) \int_x^{2x} \frac{1}{t} dt$

3/ Déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \ln 2$ et que F est continue en 0

4/ Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}^{++}$ et que $\forall x > 0 : F'(x) = \frac{f(2x) - f(x)}{x}$

5/ En appliquant le théorème des accroissements finis deux fois de suite à la fonction F puis à f montrer que

$$(\forall x > 0) : 1 - f^2(2x) \leq \frac{F(x) - F(0)}{x} \leq 1 - f^2(x)$$

6/ Déduire que F est dérivable en 0 et que $F'(0) = 1$

7/ Donner le tableau de variation de F sur $\mathbb{R}^+$

PARTIE III

On considère la suite (I_n) définie par : $I_n = \int_0^{\ln(\sqrt{3})} (f(t))^n dt$

1/ Calculer I_0 et I_1

2/ a) Vérifier que $\forall t \in [0, \ln(\sqrt{3})] : 0 \leq f(t) \leq \frac{1}{2}$

b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N} : 0 \leq I_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \ln(\sqrt{3})$ et calculer alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$

3/ Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} : I_{n+2} = I_n - \frac{1}{n+1} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

4/ Déduire que $\forall p \in \mathbb{N}^* : \begin{cases} I_{2p} = I_0 - \sum_{k=1}^{k=p} \frac{1}{2k-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{2k-1} \\ I_{2p+1} = I_1 - \sum_{k=1}^{k=p} \frac{1}{2k} \left(\frac{1}{2}\right)^{2k} \end{cases}$

5/ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $v_n = \sum_{k=1}^{k=2n} \frac{1}{k \times 2^k}$

montrer que (v_n) est convergente et déterminer sa limite

FIN



Corrigé du sujet 11



Exercice 1

On a $x * y = e^{1+(1-\ln x)(1-\ln y)}$ pour tout x et y de A . et comme $A =]e, +\infty[$, donc pour tout $x \in A : \ln x > 1$, soit $1 - \ln x < 0$.

1/ Montrons que $*$ est une loi de composition interne dans A .

Soit x et y de A , posons $u = 1 - \ln x < 0$ et $v = 1 - \ln y < 0$. Donc $x * y = e^{1+uv}$.

Comme $u < 0$ et $v < 0$, on a $uv > 0$, donc $1 + uv > 1$, donc :

$$x * y = e^{1+uv} > e^1 = e.$$

Donc $x * y \in A$.

D'où $*$ est une loi de composition interne dans A . ■

2/ Associativité et commutativité de $*$.

• Commutativité : Soit x et y de A , on a : $(1 - \ln x)(1 - \ln y) = (1 - \ln y)(1 - \ln x)$, donc $e^{1+(1-\ln x)(1-\ln y)} = e^{1+(1-\ln y)(1-\ln x)}$, d'où $x * y = y * x$.

Par conséquent $*$ est commutative. ■

• Associativité : Soit x et y de A , posons $\alpha = 1 - \ln x$, $\beta = 1 - \ln y$, $\gamma = 1 - \ln z$. Donc $\ln(x * y) = 1 + \alpha\beta \Rightarrow 1 - \ln(x * y) = -\alpha\beta$, par suite

$$(x * y) * z = e^{1+(1-\ln(x*y))(1-\ln z)} = e^{1+(-\alpha\beta)\gamma} = e^{1-\alpha\beta\gamma}. (1)$$

De même on a : $x * (y * z) = e^{1+(1-\ln x)(1-\ln(y*z))} = e^{1+\alpha(-\beta\gamma)}$. D'où :

$$x * (y * z) = e^{1+\alpha(-\beta\gamma)} = e^{1-\alpha\beta\gamma}. (2)$$

De (1) et (2) on déduit que $x * (y * z) = (x * y) * z$.

Alors $*$ est associative. ■

3/ Élément neutre ε .

On cherche $\varepsilon \in A$ tel que $x * \varepsilon = x$ pour tout $x \in A$.

$$x * \varepsilon = x \Leftrightarrow e^{1+(1-\ln x)(1-\ln \varepsilon)} = x \Leftrightarrow 1 + (1 - \ln x)(1 - \ln \varepsilon) = \ln x$$

$$\Leftrightarrow (1 - \ln x)(1 - \ln \varepsilon) = \ln x - 1 = -(1 - \ln x)$$

$$\Leftrightarrow (1 - \ln x)(2 - \ln \varepsilon) = 0 \Leftrightarrow 2 - \ln \varepsilon = 0 \text{ car } 1 - \ln x \neq 0$$

Donc $\varepsilon = e^2$

Comme $e^2 > e$ donc $\varepsilon \in A$. Alors $\varepsilon = e^2$ est l'élément neutre de $*$ dans A . ■

4/ Montrons que $(A, *)$ est un groupe commutatif.

On a déjà montré que la loi $*$ est associative, commutative et admet un élément neutre $e = e^2$ il reste à montrer que tout élément de A est symétrisable pour $*$.

Soit $x \in A$, cherchons $x' \in A$ tel que $x * x' = e^2$:

$$x * x' = e^2 \Leftrightarrow e^{1+(1-\ln x)(1-\ln x')} = e^2 \Leftrightarrow 1 + (1 - \ln x)(1 - \ln x') = \ln(e^2) = 2$$

$$\Leftrightarrow (1 - \ln x)(1 - \ln x') = 1 \Leftrightarrow 1 - \ln x' = \frac{1}{1 - \ln x} \Leftrightarrow \ln x' = \frac{\ln x}{\ln x - 1}$$

$$\Leftrightarrow x' = e^{\frac{\ln x}{\ln x - 1}}$$

$$\text{Or } x \in A \Rightarrow x > e \Rightarrow \ln x > 1 \Rightarrow \ln x > \ln x - 1 > 0 \Rightarrow \frac{\ln x}{\ln x - 1} > 1 \Rightarrow$$

$$e^{\frac{\ln x}{\ln x - 1}} > e \Rightarrow x' \in A.$$

Donc tout élément de A admet un symétrique pour $*$ dans A .

Alors $(A, *)$ est un groupe commutatif. ■

5/ Montrons que $H = \{e^{1+2^n} \mid n \in \mathbb{Z}\}$ est un sous-groupe de $(A, *)$.

En effet on a :

$$\star H \subset A : \text{car } h \in H \Rightarrow \exists n \in \mathbb{Z} : h = e^{1+2^n} \Rightarrow \ln h = 1 + 2^n \Rightarrow \ln h > 1 \Rightarrow h > e \Rightarrow h \in A$$

$$\star H \neq \emptyset : \text{car si } n = 0 \text{ alors } e^2 \in H).$$

$$\star \text{ Soient } a = e^{1+2^m} \text{ et } b = e^{1+2^n} \text{ de } H. \text{ On a : } a = e^{1+2^m} \Rightarrow 1 - \ln a = -2^m \text{ et } b = e^{1+2^n} \Rightarrow 1 - \ln b = -2^n. a * b = e^{1+(1-\ln a)(1-\ln b)} \Rightarrow \ln(a * b) = 1 + (-2^m)(-2^n) = 1 + 2^{m+n} \Rightarrow a * b = e^{1+2^{m+n}} \Rightarrow a * b \in H$$

$$\text{L'inverse de } b \text{ est } b' = e^{\frac{\ln b}{\ln b - 1}} \Rightarrow \ln b' = \frac{\ln b}{\ln b - 1} = \frac{1 + 2^n}{2^n} = 1 + 2^{-n}$$

$$\text{Donc } b' = e^{1+2^{-n}} \in H \text{ car } -n \in \mathbb{Z}.$$

Alors H est un sous-groupe de $(A, *)$ ■

6/ On a : $B =]1, +\infty[$, $xTy = (x-1)(y-1) + 1$, $\varphi(x) = \ln x$.

a) Montrons que φ est un isomorphisme de $(A, *)$ sur (B, T) .

$$\star \varphi \text{ est bien définie de } A \text{ vers } B \text{ car si } x \in A \Rightarrow x > e \Rightarrow \ln x > 1 \Rightarrow \varphi(x) = \ln x \in B.$$

$$\star \varphi \text{ est un homomorphisme : car si } (x, y) \in A^2 \text{ on a : } \varphi(x * y) = \ln(x * y) = 1 + (1 - \ln x)(1 - \ln y)$$

$$\varphi(x)T\varphi(y) = (\ln x - 1)(\ln y - 1) + 1$$

$$\text{Alors } \varphi(x * y) = \varphi(x)T\varphi(y).$$

★ φ est bijective de A vers B : car la fonction $\ln$ est bijective de $]e, +\infty[$ sur $]1, +\infty[$

Alors φ est un isomorphisme de $(A, *)$ sur (B, T) . ■

- b) **Déduisons que (B, T) est un groupe commutatif.** En effet on a $(A, *)$ est un groupe commutatif (question 4) et φ est un isomorphisme de $(A, *)$ sur (B, T) , donc **(B, T) est un groupe commutatif.** ■

Exercice 2

PARTIE I

$(E_a) : z^2 - (1 + (1 + i)a)z + ia^2 + a = 0$ où $a \in \mathbb{C}^*$.

- 1/ **Vérifier que a est solution de (E_a) .**

On substitue $z = a$ dans l'équation (E_a) :

$$a^2 - (1 + (1 + i)a)a + ia^2 + a = a^2 - a - (1 + i)a^2 + ia^2 + a = a^2 - a - a^2 - ia^2 + ia^2 + a = a^2 - a^2 - ia^2 + ia^2 - a + a = 0$$

Donc **a est bien solution de (E_a) .** ■

- 2/ **On note z_1 et z_2 les solutions de (E_a) avec $z_1 = a$.**

- a) **Déterminer z_2 .**

D'après les relations de « Viète » pour une équation du second degré de la forme : $z^2 + pz + q = 0$ on a : $z_1 + z_2 = -p$ et $z_1 \times z_2 = q$.

$$\text{Alors } z_1 + z_2 = 1 + (1 + i)a \Rightarrow z_2 = 1 + (1 + i)a - a \Rightarrow z_2 = 1 + ia$$

Donc **$z_2 = 1 + ia$** ■

- b) On a $z_2 = 1 + ia = iz_1 + 1$ et comme $z_B = z_2$ et $z_A = z_1$, alors $z_B = iz_A + 1$.
On cherche une rotation r de centre $\Omega(\omega)$ et d'angle θ telle que $r(A) = B$
d'expression complexe : $z' = iz + 1$.

Le centre Ω de la rotation r est le seul point du plan complexe invariant par r , i.e : $r(\Omega) = \Omega \Leftrightarrow \omega = i\omega + 1 \Leftrightarrow \omega = \frac{1}{1-i} \Leftrightarrow \omega = \frac{1+i}{2}$.

$$\text{et on a } e^{i\theta} = i \Leftrightarrow \theta \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi].$$

Alors la rotation r a pour centre le point Ω d'affixe $\omega = \frac{1+i}{2}$ et d'angle $\theta = \frac{\pi}{2}$. ■

Partie II

- 1/ a) Posons $z = x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a : $|z|^2 = x^2 + y^2$ et
 $1 + iz = 1 + i(x + iy) = 1 - y + ix \Rightarrow |1 + iz|^2 = (1 - y)^2 + x^2$. Donc :
 $|z| = |1 + iz| \Leftrightarrow x^2 + y^2 = (1 - y)^2 + x^2 \Leftrightarrow y^2 = 1 - 2y + y^2 \Leftrightarrow 2y = 1 \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}$
 Ainsi : $|z| = |1 + iz| \Leftrightarrow \text{Im}(z) = \frac{1}{2}$. ■

b) Déduire l'équivalence $\begin{cases} |z| = |1 + iz| \\ |z| = 1 \end{cases} \Leftrightarrow z = e^{i\frac{\pi}{6}} \text{ ou } z = e^{i\frac{5\pi}{6}}.$

D'après a), $|z| = |1 + iz| \Leftrightarrow \operatorname{Im}(z) = \frac{1}{2}$, i.e. $y = \frac{1}{2}$.

En substituant dans $|z| = 1$, on a : $|z| = 1 \Leftrightarrow x^2 + \frac{1}{4} = 1 \Leftrightarrow x^2 = \frac{3}{4}$

$$\Leftrightarrow x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

▲ Si $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $y = \frac{1}{2}$: l'argument est $\frac{\pi}{6}$, donc $z = e^{i\frac{\pi}{6}}$.

▲ Si $x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $y = \frac{1}{2}$: l'argument est $\frac{5\pi}{6}$, donc $z = e^{i\frac{5\pi}{6}}$.

D'où $\begin{cases} |z| = |1 + iz| \\ |z| = 1 \end{cases} \Rightarrow z = e^{i\frac{\pi}{6}} \text{ ou } z = e^{i\frac{5\pi}{6}}.$

Inversement :

• si $z = e^{i\frac{\pi}{6}}$ alors $|z| = 1$ et $|1 + iz|^2 = |1 + ie^{i\frac{\pi}{6}}|^2 = |1 + \frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{1}{2}|^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1.$

Alors $z = e^{i\frac{\pi}{6}} \Rightarrow \begin{cases} |z| = |1 + iz| \\ |z| = 1 \end{cases}$

• Si $z = e^{i\frac{5\pi}{6}}$ alors $|z| = 1$ et $|1 + iz|^2 = |1 + ie^{i\frac{5\pi}{6}}|^2 = |1 + \frac{-\sqrt{3}}{2}i - \frac{1}{2}|^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1$

Alors $z = e^{i\frac{5\pi}{6}} \Rightarrow \begin{cases} |z| = |1 + iz| \\ |z| = 1 \end{cases}$

D'où l'équivalence souhaitée. ■

2/ On considère le système (S) : $\begin{cases} z^n(1 + iz) = 1 \\ |z| = 1 \end{cases} \quad \text{où } n \in \mathbb{N}^*.$

a) Montrer que toute solution z de (S) vérifie $z \in \{e^{i\frac{\pi}{6}}, e^{i\frac{5\pi}{6}}\}.$

Soit z solution de (S). On a $|z| = 1$ et $z^n(1 + iz) = 1.$

En passant aux modules, on a :

$$|z^n(1 + iz)| = 1 \Rightarrow |z|^n \cdot |1 + iz| = 1 \Rightarrow |1 + iz| = 1 = |z|$$

D'après la question 1/a), $\operatorname{Im}(z) = \frac{1}{2}$, et d'après la question 1/b),

$z \in \{e^{i\frac{\pi}{6}}, e^{i\frac{5\pi}{6}}\}.$ D'où le résultat. ■

b) Vérifier que $1 + ie^{i\frac{\pi}{6}} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $1 + ie^{i\frac{5\pi}{6}} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

D'une part :

$$1 + ie^{i\frac{\pi}{6}} = 1 + i\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right) = 1 - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{\pi}{3}}$$

$$\text{D'où : } 1 + ie^{i\frac{\pi}{6}} = e^{i\frac{\pi}{3}}. \quad \blacksquare$$

D'autres parts :

$$1 + ie^{i\frac{5\pi}{6}} = 1 + i\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right) = 1 - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

$$\text{D'où : } 1 + ie^{i\frac{5\pi}{6}} = e^{-i\frac{\pi}{3}}. \quad \blacksquare$$

c) $e^{i\frac{\pi}{6}}$ est solution de (S) $\Leftrightarrow n \equiv -2[12]$; idem pour $e^{i\frac{5\pi}{6}}$ avec $5n \equiv 2[12]$

Pour $z = e^{i\frac{\pi}{6}}$:

$$\text{En utilisant b), } z \text{ est solution de (S) } \Leftrightarrow z^n(1 + iz) = 1 \Leftrightarrow \left(e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^n \cdot e^{i\frac{\pi}{3}} = 1$$

$$\Leftrightarrow e^{i\left(\frac{n\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\right)} = 1 \Leftrightarrow \frac{n\pi}{6} + \frac{\pi}{3} = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{n+2}{6} = 2k \Leftrightarrow n+2 = 12k$$

$$\Leftrightarrow n \equiv -2[12]. \quad \blacksquare$$

Pour $z = e^{i\frac{5\pi}{6}}$:

$$z \text{ est solution de (S) } \Leftrightarrow z^n(1 + iz) = 1 \Leftrightarrow \left(e^{i\frac{5\pi}{6}}\right)^n \cdot e^{-i\frac{\pi}{3}} = 1$$

$$\Leftrightarrow e^{i\left(\frac{5n\pi}{6} - \frac{\pi}{3}\right)} = 1 \Leftrightarrow \frac{5n\pi}{6} - \frac{\pi}{3} = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{5n-2}{6} = 2k \Leftrightarrow 5n-2 = 12k$$

$$\Leftrightarrow 5n \equiv 2[12]. \quad \blacksquare$$

d) Justifier l'équivalence $5n \equiv 2[12] \Leftrightarrow n \equiv -2[12]$.

On remarque que $5 \wedge 12 = 1$ et que la congruence est compatible avec la multiplication. Alors :

$$5n \equiv 2[12] \Leftrightarrow 25n \equiv 10[12] \Leftrightarrow n \equiv 10[12] \Leftrightarrow n \equiv -2[12]$$

$$\text{Car } 25n \equiv n[12] \text{ et } 10 \equiv -2[12]$$

$$\text{Donc : } 5n \equiv 2[12] \Leftrightarrow n \equiv -2[12]. \quad \blacksquare$$

e) Ensemble des solutions de (S).

D'après c) et d), les deux conditions $n \equiv -2[12]$ et $5n \equiv 2[12]$ sont équivalentes. Autrement dit, $e^{i\frac{\pi}{6}}$ est solution de (S) si et seulement si $e^{i\frac{5\pi}{6}}$ l'est aussi.

Alors : L'ensemble des solutions de (S) est :

$$\mathcal{S} : \begin{cases} \emptyset & \text{si } n \not\equiv 10[12] \\ \left\{e^{i\frac{\pi}{6}}, e^{i\frac{5\pi}{6}}\right\} & \text{si } n \equiv 10[12] \end{cases} \quad \blacksquare$$

Exercice 3

Soit p un nombre premier tel que $p \equiv 5[6]$ et $p > 3$.

On considère dans $\mathbb{N}^{*2}$ l'équation (E) : $x^3 + y^3 = p(1 + xy)$.

Soit $(x, y) \in \mathbb{N}^{*2}$ une solution de (E). On pose $d = x \wedge y$ et $(a, b) \in \mathbb{N}^{*2}$ tel que $x = da$ et $y = db$.

1/ a) Montrer que $a \wedge b = 1$ et $d^3(a^3 + b^3) = p(1 + d^2ab)$.

Par définition, $d = \gcd(x, y)$, $x = da$, $y = db$ avec $a, b \in \mathbb{N}^*$.

On a $d = x \wedge y = da \wedge db = d(a \wedge b)$, donc $a \wedge b = 1$.

En substituant dans (E) : $(da)^3 + (db)^3 = p(1 + da \cdot db) \Rightarrow d^3a^3 + d^3b^3 = p(1 + d^2ab)$

Alors : $d^3(a^3 + b^3) = p(1 + d^2ab)$. ■

b) Montrer que $d^3 \wedge (1 + d^2ab) = 1$.

Soit $\delta = d^3 \wedge (1 + d^2ab) \Rightarrow \delta \mid d^3$ et $\delta \mid (1 + d^2ab)$

$\Rightarrow \delta \mid d(1 + d^2ab) - d^3ab \Rightarrow \delta \mid d \Rightarrow \delta \mid 1 + d^2ab - d^2ab \Rightarrow \delta \mid 1 \Rightarrow \delta = 1$.

Ainsi $d^3 \wedge (1 + d^2ab) = 1$. ■

c) Dédurre que $d = 1$.

De l'équation $d^3(a^3 + b^3) = p(1 + d^2ab)$, on tire que $d^3 \mid p(1 + d^2ab)$.

Puisque $d^3 \wedge (1 + d^2ab) = 1$, on a $d^3 \mid p$.

p est premier, donc ses seuls diviseurs positifs sont 1 et p . Ainsi $d^3 \in \{1, p\}$ et comme $d \mid d^3$ donc $d \mid p$ donc $d^3 = 1$, i.e. $d = 1$.

Donc $d = 1$ ■

On obtient donc le système :

$$\begin{cases} a^3 + b^3 = p(1 + ab) \\ a \wedge b = 1 \end{cases}$$

2/ Montrer que $p \wedge b = 1$ et $p \wedge a = 1$.

De $a^3 + b^3 = p(1 + ab)$, on a $p \mid a^3 + b^3$.

Supposons $p \mid b$. Alors $p \mid a^3 + b^3 - b^3 = a^3$, donc $p \mid a$ (car p est premier), donc $p \mid \gcd(a, b) = 1$, contradiction car $p > 3$. Donc p ne divise pas b , d'où $p \wedge b = 1$.

De même, $p \wedge a = 1$, puisque a et b jouent le même rôle. ■

3/ Montrer que $a^3 \equiv -b^3[p]$ et $a^{p-1} \equiv b^{p-1}[p]$.

Première congruence.

On a $a^3 + b^3 = p(1 + ab) \Rightarrow a^3 + b^3 \equiv 0[p]$, donc :

$$a^3 \equiv -b^3[p].$$

■

Deuxième congruence.

D'après le petit théorème de Fermat, et puisque $p \wedge a = 1$ et $p \wedge b = 1$, on a :

$$a^{p-1} \equiv 1[p] \quad \text{et} \quad b^{p-1} \equiv 1[p].$$

Donc :

$$a^{p-1} \equiv b^{p-1}[p].$$

■

4/ Déduire que $a \equiv -b \pmod{p}$, et écrire $p = 5 + 6k$.

On a $a^3 \equiv -b^3[p] \Rightarrow (a^3)^{1+2k} \equiv -(b^3)^{1+2k}[p] \Rightarrow a^{3+6k} \equiv -b^{3+2k}[p]$
 $\Rightarrow a \times a^{3+2k} \equiv -a \times b^{3+2k}[p] \Rightarrow a^{p-1} \equiv -a \times b^{p-2}[p] \Rightarrow b^{p-1} \equiv -a \times b^{p-2}[p]$
 (Puisque $p = 5 + 6k$)
 $\Rightarrow p \mid (b^{p-1} + a \times b^{p-2}) \Rightarrow p \mid b^{p-2}(a + b), \Rightarrow p \mid (a + b)$ (car $p \wedge b = 1$)
 $\Rightarrow a + b \equiv 0[p]$
 Ainsi $a \equiv -b[p]$. ■

5/ Montrer que $u(a - b)^2 + (u - 1)ab = 1$.

Puisque $a \equiv -b[p]$, on a $p \mid a + b$, donc $a + b = pu$ pour un certain $u \in \mathbb{N}^*$.
 On développe $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2) = (a + b)((a - b)^2 + ab)$.
 Donc : $[a^3 + b^3 = p(1 + ab) \text{ et } a + b = pu] \Rightarrow (a + b)((a - b)^2 + ab) = p(1 + ab) \Rightarrow$
 $pu((a - b)^2 + ab) = p(1 + ab) \Rightarrow u(a - b)^2 + uab = 1 + ab$. Donc :

$$u(a - b)^2 + (u - 1)ab = 1.$$

En déduire que : $\begin{cases} a + b = p \\ |a - b| = 1 \end{cases}$

Puisque $a, b, u \in \mathbb{N}^*$ et d'après l'égalité $u(a - b)^2 + (u - 1)ab = 1$, on a : $(u - 1)ab \geq 0$, et $0 \leq u(a - b)^2 \leq 1$, donc $u(a - b)^2 \in \{0, 1\}$. (car $u \geq 1$)

Cas 1 : Si $u(a - b)^2 = 1$ et $(u - 1)ab = 0$.

Alors $u = 1$ et $(a - b)^2 = 1$, donc $|a - b| = 1$. On a bien le système :

$$\begin{cases} a + b = p \\ |a - b| = 1 \end{cases}$$

Cas 2 : Si $u(a - b)^2 = 0$ et $(u - 1)ab = 1$.

Alors $a = b$ et $(u - 1)ab = 1$, donc $u - 1 = 1/ab$. Puisque $u, a, b \in \mathbb{N}^*$, cela exige $ab = 1$, donc $a = b = 1$, et $u = 2$. Mais alors $a \wedge b = 1$, $a + b = 2 = pu = 2p \Rightarrow p = 1$, ce qui est absurde car $p > 3$. Donc on a nécessairement :

$$\begin{cases} a + b = p \\ |a - b| = 1 \end{cases}$$

6/ Ensemble des solutions de (E) dans $\mathbb{N}^{*2}$.

D'après les questions précédentes on a vu que si (x, y) est une solution de (E) dans $\mathbb{N}^{*2}$ alors $x \wedge y = 1$ et (x, y) est solution du système $\begin{cases} x + y = p \\ |x - y| = 1 \end{cases}$, et puisque $x = a$ et $y = b$ on a : $a + b = p$ et $|a - b| = 1$, avec $a, b \in \mathbb{N}^*$ et $a \wedge b = 1$:

Cas 1 : Si $a - b = 1$, donc $a = \frac{p+1}{2}$, et $b = \frac{p-1}{2}$ (qui sont entiers car p est premier et $p > 3$ donc p est impair).

Cas 2 : $b - a = 1$, donc $a = \frac{p-1}{2}$, et $b = \frac{p+1}{2}$.

Vérifions que $\text{pgcd}(a, b) = 1$.

On a : $\text{pgcd}\left(\frac{p+1}{2}, \frac{p-1}{2}\right) = \frac{1}{2} \text{pgcd}(p+1, p-1)$. Or $\text{pgcd}(p+1, p-1) \mid 2$, et puisque p est impair, $\frac{p-1}{2}$ et $\frac{p+1}{2}$ sont entiers consécutifs, donc premiers entre eux.

Alors $\text{pgcd}(x, y) = \text{pgcd}(a, b) = \text{pgcd}\left(\frac{p-1}{2}, \frac{p+1}{2}\right) = 1$ D'où L'ensemble des solutions de l'équation (E) est :

$$\mathcal{S} = \left\{ \left(\frac{p+1}{2}, \frac{p-1}{2} \right), \left(\frac{p-1}{2}, \frac{p+1}{2} \right) \right\}$$

■

Exercice 4

PARTIE I

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$.

1/ Vérifier que f est impaire et calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$f(-x) = \frac{e^{-2x} - 1}{e^{-2x} + 1} = \frac{\frac{1-e^{2x}}{e^{2x}}}{\frac{1+e^{2x}}{e^{2x}}} = \frac{1-e^{2x}}{1+e^{2x}} = -\frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = -f(x).$$

Donc f est impaire (et $f(0) = 0$, ce qui est cohérent).

Et on a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = \frac{1 - 0}{1 + 0} = 1.$$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{y \rightarrow +\infty} f(-y) = \lim_{y \rightarrow +\infty} (-f(y)) = -1$ (En effectuant le changement de variable $y = -x$). ■

2/ Étudier les variations de f

Remarquons que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$f'(x) = \frac{2e^{2x}(e^{2x} + 1) - (e^{2x} - 1) \cdot 2e^{2x}}{(e^{2x} + 1)^2} = \frac{2e^{2x}[(e^{2x} + 1) - (e^{2x} - 1)]}{(e^{2x} + 1)^2} = \frac{4e^{2x}}{(e^{2x} + 1)^2}.$$

Comme $e^{2x} > 0$ et $(e^{2x} + 1)^2 > 0$ pour tout x de $\mathbb{R}$, on a $f'(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Donc f est **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$, avec :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1, \quad f(0) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1.$$

3/ f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $I =]-1, 1[$

f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, avec $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$. Alors f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $] -1, 1[$.

4/ Équation de la tangente T en $O(0, 0)$

La tangente en $O(0, 0)$ a pour équation : $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$

et on a : $f'(0) = \frac{4e^0}{(e^0+1)^2} = \frac{4}{4} = 1$ et $f(0) = 0$. D'où $(T) : y = x$.

L'équation de la tangente T est donc :

$$y = x.$$

5/ Vérifier que $f'(x) = 1 - f^2(x)$

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a : $f'(x) = \frac{4e^{2x}}{(e^{2x} + 1)^2}$, et :

$$1 - f^2(x) = 1 - \left(\frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} \right)^2 = \frac{(e^{2x} + 1)^2 - (e^{2x} - 1)^2}{(e^{2x} + 1)^2} = \frac{4e^{2x}}{(e^{2x} + 1)^2}$$

Alors : pour tout $x \in \mathbb{R} : f'(x) = 1 - f^2(x)$

En déduire $\forall x \geq 0 : 0 \leq f(x) \leq x$

Soit $x \geq 0$, on a : pour tout $t \in [0, x] : f'(t) = 1 - f^2(t)$ donc $f'(t) \leq 1$, donc d'après le théorème des accroissements finis appliqué sur $[0, x]$:

$$f(x) - f(0) \leq 1 \cdot (x - 0) \implies f(x) \leq x.$$

Or $f'(x) > 0$ et $f(0) = 0$, alors f est croissante et $f(x) \geq 0$.

D'où : $\forall x \geq 0, \quad 0 \leq f(x) \leq x$.

6/ Justifier $\forall x \geq 0 : 0 \leq 1 - f'(x) \leq x^2$.

On a d'après la question 5/ $\forall x \geq 0, \quad 0 \leq f(x) \leq x$, donc $\forall x \geq 0, \quad 0 \leq f^2(x) \leq x^2$

et $1 - f'(x) = f^2(x)$. Alors $\forall x \geq 0, \quad 0 \leq 1 - f'(x) \leq x^2$.

En déduire $\forall x \geq 0 : 0 \leq x - f(x) \leq \frac{x^3}{3}$

Posons $g(x) = x - f(x)$. Alors $g(0) = 0$ et $g'(x) = 1 - f'(x)$.

Soit $x \geq 0$, on a $\forall t \in [0, x] : 0 \leq 1 - f'(t) \leq t^2$ donc $\forall t \in [0, x] : 0 \leq g'(t) \leq t^2$ par passage aux intégrales, on a :

$$0 \leq g(x) - g(0) \leq \int_0^x t^2 dt = \frac{x^3}{3},$$

Ainsi : $\forall x \geq 0, \quad 0 \leq x - f(x) \leq \frac{x^3}{3}$. ■

7/ Pour tout entier $n \geq 1$, on pose :

$$S_n = \sum_{k=1}^n f\left(\frac{1}{n+k}\right), \quad u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}.$$

a) Vérifier que $u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \frac{k}{n}}$ et en déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ln 2$

$$\text{On a : } u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n\left(1 + \frac{k}{n}\right)} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \frac{k}{n}}.$$

C'est une somme de Riemann de la fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x}$ sur $[0, 1]$. Alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \left[\ln(1+x) \right]_0^1 = \ln 2. \quad \blacksquare$$

b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^* : 0 \leq u_n - S_n \leq \frac{1}{3n^2}$ et en déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$

D'après la question 6 : $\forall x \geq 0, \quad 0 \leq x - f(x) \leq \frac{x^3}{3}$ en posant $x = \frac{1}{n+k}$:

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*)(\forall k \in \{1, 2, \dots, n\}) : 0 \leq \frac{1}{n+k} - f\left(\frac{1}{n+k}\right) \leq \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(n+k)^3}.$$

En sommant de $k = 1$ à n , on a :

$$0 \leq u_n - S_n \leq \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n \frac{1}{(n+k)^3}.$$

Or $(n+k) \geq n+1 \geq n$ pour $k \geq 1$, donc $(n+k)^3 \geq n^3$, et :

$$\frac{1}{3} \sum_{k=1}^n \frac{1}{(n+k)^3} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n^3} \leq \frac{1}{3} \cdot \frac{n}{n^3} = \frac{1}{3n^2}.$$

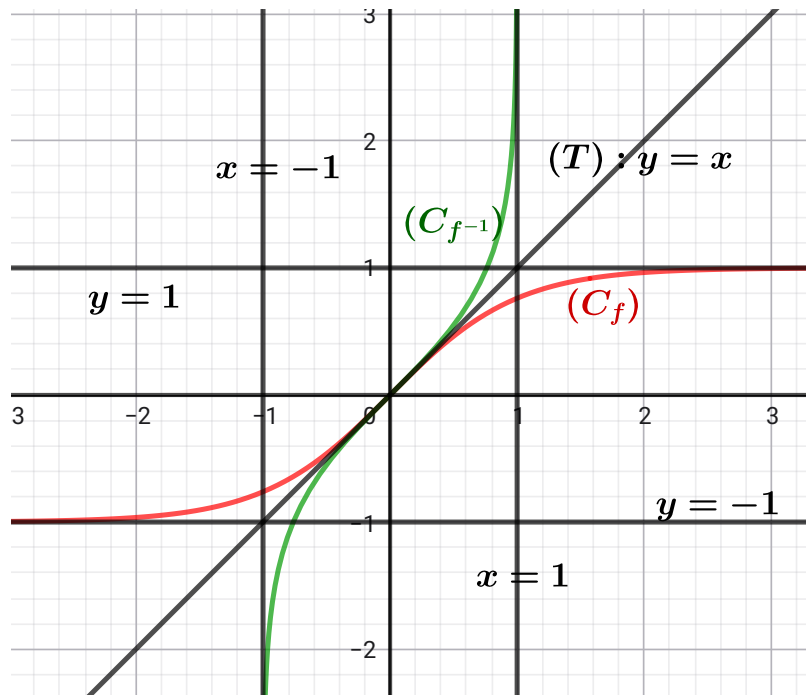
Donc $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : 0 \leq u_n - S_n \leq \frac{1}{3n^2}$. ■

Par le théorème des gendarmes, puisque $\frac{1}{3n^2} \rightarrow 0$ et $u_n \rightarrow \ln 2$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - S_n) = 0 \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \ln 2. \quad \blacksquare$$

8/ Courbes (C_f) , $(C_{f^{-1}})$ et tangente T

Les courbes (C_f) et $(C_{f^{-1}})$ sont symétriques par rapport à la droite $y = x$ (tangente T). On les trace dans le même repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. (On prend $\|\vec{i}\| = 1 \text{ cm}$)



9/ Montrer que $F(x) = \ln\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$

On a : $\forall x \in \mathbb{R} : \frac{e^x + e^{-x}}{2} > 0$, donc F est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$F'(x) = \frac{\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)'}{\frac{e^x + e^{-x}}{2}} = \frac{\frac{e^x - e^{-x}}{2}}{\frac{e^x + e^{-x}}{2}} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

Multiplions numérateur et dénominateur par e^x on obtient :

$$F'(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = f(x).$$

Donc F est bien une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

10/ Déduire $S_\lambda = \lambda^2 - 2 \ln\left(\frac{e^\lambda + e^{-\lambda}}{2}\right) \text{ cm}^2$

Soit $\lambda \in]0, 1[$, on note S_λ l'aire en cm^2 du domaine

$$D_\lambda = \left\{ M(x, y) \in \mathbb{P} / x \in [0, \lambda], y \in [0, \lambda], f(x) \leq y \leq f^{-1}(x) \right\}$$

Le domaine D_λ est délimité par la courbe (C_f) en bas, la courbe $(C_{f^{-1}})$ en haut, et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \lambda$

Comme les courbes (C_f) et $(C_{f^{-1}})$ sont symétriques par rapport à la première bissectrice (T) , alors $S_\lambda = 2 \left(\int_0^\lambda (x - f(x)) dx \right) cm^2$. D'où :

$$S_\lambda = \left(\lambda^2 - 2 \int_0^\lambda f(x) dx \right) cm^2 = \left(\lambda^2 - 2 [F(x)]_0^\lambda \right) cm^2$$

Donc :

$$S_\lambda = \left(\lambda^2 - 2 \ln \left(\frac{e^\lambda + e^{-\lambda}}{2} \right) \right) cm^2.$$

■

PARTIE II

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$$

et F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} F(x) = \int_x^{2x} \frac{f(t)}{t} dt & \text{si } x \neq 0 \\ F(0) = 0 \end{cases}$$

1/ Montrer que F est une fonction impaire.

Rappelons que f est une fonction impaire : $\forall x \in \mathbb{R}; f(-x) = -f(x)$

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$F(-x) = \int_{-x}^{-2x} \frac{f(t)}{t} dt.$$

On effectue le changement de variable $t = -u$ (donc $dt = -du$) :

$$t = -x \Rightarrow u = x,$$

$$t = -2x \Rightarrow u = 2x.$$

Donc :

$$F(-x) = \int_x^{2x} \frac{f(-u)}{-u} (-du) = \int_x^{2x} \frac{f(-u)}{u} du = \int_x^{2x} \frac{-f(u)}{u} du = -F(x).$$

De plus, $F(-0) = F(0) = 0 = -F(0)$.

D'où $F(-x) = -F(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc F est impaire.

■

2/ Montrer que $\forall x > 0 : f(x) \int_x^{2x} \frac{1}{t} dt \leq F(x) \leq f(2x) \int_x^{2x} \frac{1}{t} dt$.

On a vu dans la partie I que f est **croissante** sur $\mathbb{R}^+$.

Pour $x > 0$ on a : $x < 2x$ donc pour tout $t \in [x, 2x]$; $f(x) \leq f(t) \leq f(2x)$ Donc pour tout $t \in [x, 2x]$:

$$f(x) \leq f(t) \leq f(2x).$$

En divisant par $t > 0$:

$$\frac{f(x)}{t} \leq \frac{f(t)}{t} \leq \frac{f(2x)}{t}.$$

En intégrant sur $[x, 2x]$:

$$f(x) \int_x^{2x} \frac{1}{t} dt \leq F(x) \leq f(2x) \int_x^{2x} \frac{1}{t} dt.$$

3/ Dédurre que $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \ln 2$ et que F est continue en 0. ■

On a :

$$\int_x^{2x} \frac{1}{t} dt = [\ln t]_x^{2x} = \ln(2x) - \ln(x) = \ln 2.$$

Donc L'encadrement de la question 2 devient :

$$f(x) \ln 2 \leq F(x) \leq f(2x) \ln 2.$$

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(2x) = 1$, alors d'après le **théorème des gendarmes** :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \ln 2. \quad \blacksquare$$

De même on a : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(2x) = 0$, alors d'après le **théorème des gendarmes** :

$$0 \cdot \ln 2 \leq F(x) \leq 0 \cdot \ln 2 \implies \lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = 0 = F(0).$$

Comme la fonction F est impaire, alors $\lim_{x \rightarrow 0^-} F(x) = 0$ également. Donc F est continue en 0. ■

4/ Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}^{*+}$ et que $\forall x > 0 : F'(x) = \frac{f(2x) - f(x)}{x}$.

La fonction $t \mapsto \frac{f(t)}{t}$ est continue sur $\mathbb{R}^{*+}$ donc elle admet une primitive sur $\mathbb{R}^{*+}$.

Soit G une primitive de $t \mapsto \frac{f(t)}{t}$ sur $\mathbb{R}^{*+}$. On a alors :

$$F(x) = [G(t)]_x^{2x} = G(2x) - G(x).$$

Donc F est dérivable sur $\mathbb{R}^{*+}$ comme composée/différence de fonctions dérivables, et on a :

$$F'(x) = 2G'(2x) - G'(x) = 2 \frac{f(2x)}{2x} - \frac{f(x)}{x} = \frac{f(2x)}{x} - \frac{f(x)}{x} = \frac{f(2x) - f(x)}{x}. \quad \blacksquare$$

5/ En appliquant le TAF deux fois, montrer que

$$(\forall x > 0) : 1 - f^2(2x) \leq \frac{F(x) - F(0)}{x} \leq 1 - f^2(x)$$

Soit $x > 0$ La fonction F est continue sur $[0, x]$ et est dérivable sur $]0, x[$ alors d'après le TAF

$$(\exists c \in]0, x[) : \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = F'(c) = \frac{f(2c) - f(c)}{c}$$

Comme la fonction f est continue et dérivable sur $[c, 2c]$, alors en appliquant TAF à f sur $[c, 2c]$ on a :

$$\exists d \in]c, 2c[: \frac{f(2c) - f(c)}{2c - c} = f'(d) \Rightarrow \frac{f(2c) - f(c)}{c} = f'(d).$$

Or $f'(x) = 1 - f^2(x)$ et $0 < c < d < 2c < 2x$. Donc :

$$\frac{F(x) - F(0)}{x} = 1 - f^2(d), \quad d \in (c, 2c) \subset (0, 2x).$$

Puisque f^2 est **croissante** sur $\mathbb{R}^+$ (car $f > 0$ et f croissante pour $x > 0$) et $0 < d < 2x$:

$$f^2(x) \leq f^2(d) \leq f^2(2x) \Rightarrow 1 - f^2(2x) \leq 1 - f^2(d) \leq 1 - f^2(x).$$

D'où :

$$(\forall x > 0) : 1 - f^2(2x) \leq \frac{F(x) - F(0)}{x} \leq 1 - f^2(x).$$

■

6/ Dédurre que F est dérivable en 0 et que $F'(0) = 1$.

L'encadrement de la question 5 donne, lorsque $x \rightarrow 0^+$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 - f^2(2x)) = 1 - f^2(0) = 1 - 0 = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 - f^2(x)) = 1 - f^2(0) = 1.$$

Par le **théorème des gendarmes** :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{F(x) - F(0)}{x} = 1.$$

Donc F est dérivable à droite en 0 et on a : $F'_d(0) = 1$ Soit $x < 0$ posons $y = -x$ donc $y > 0$, alors d'après la question 5/ on a :

$$1 - f^2(2y) \leq \frac{F(y) - F(0)}{y} \leq 1 - f^2(y).$$

Donc :

$$1 - f^2(-2x) \leq \frac{F(-x) - F(0)}{-x} \leq 1 - f^2(-x).$$

Comme F et f sont impaires, alors :

$$(\forall x < 0) : 1 - f^2(2x) \leq \frac{F(x) - F(0)}{x} \leq 1 - f^2(x)$$

En utilisant le **théorème des gendarmes** :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{F(x) - F(0)}{x} = 1.$$

Donc la fonction F est dérivable à gauche en 0 et on a : $F'_g(0) = 1$ D'où F est dérivable en 0 et on $F'(0) = 1$. ■

7/ Tableau de variation de F sur $\mathbb{R}^+$.

Soit $x > 0$, d'après la question 4, $F'(x) = \frac{f(2x) - f(x)}{x}$. Pour $x > 0$: f est **strictement croissante** et $2x > x$, donc $f(2x) > f(x)$, ainsi $F'(x) > 0$.

De plus, $F'(0) = 1 > 0$. Donc $(\forall x \geq 0); F'(x) > 0$.

Tableau de variation de F sur $\mathbb{R}^+$:

x	0	$+\infty$
$F'(x)$	+	
$F(x)$	0	$\ln 2$

PARTIE III

On considère la suite (I_n) définie par : $I_n = \int_0^{\ln(\sqrt{3})} (f(t))^n dt$.

1/ Calculer I_0 et I_1

$$- I_0 = \int_0^{\ln(\sqrt{3})} (f(t))^0 dt = \int_0^{\ln(\sqrt{3})} 1 dt = [t]_0^{\ln(\sqrt{3})} = \ln(\sqrt{3}) = \frac{1}{2} \ln(3) = \ln \sqrt{3}. \quad \blacksquare$$

$$- I_1 = \int_0^{\ln(\sqrt{3})} \frac{e^{2t} - 1}{e^{2t} + 1} dt.$$

$$\text{Remarquons que } f(t) = \frac{e^t(e^t - e^{-t})}{e^t(e^t + e^{-t})} = \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}} = \frac{(e^x + e^{-x})'}{e^x + e^{-x}}$$

$$\text{Alors : } I_1 = [\ln(e^t + e^{-t})]_0^{\ln(\sqrt{3})} = \ln(e^{\ln \sqrt{3}} + e^{-\ln \sqrt{3}}) - \ln(e^0 + e^0)$$

$$I_1 = \ln(\sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}) - \ln(2) = \ln\left(\frac{3+1}{\sqrt{3}}\right) - \ln(2) = \ln\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right) - \ln(2)$$

$$I_1 = \ln(4) - \ln(\sqrt{3}) - \ln(2) = 2\ln(2) - \frac{1}{2}\ln(3) - \ln(2) = \ln(2) - \frac{1}{2}\ln(3).$$

$$\text{D'où } I_1 = \ln\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$$

2/ a) Vérifier que $\forall t \in [0, \ln(\sqrt{3})] : 0 \leq f(t) \leq \frac{1}{2}$

f est croissante sur $\mathbb{R}$ en particulier sur l'intervalle $[0, \ln(\sqrt{3})]$ et $f(0) = 0$ et $f(\ln(\sqrt{3})) = \frac{1}{2}$. Alors :

$$\forall t \in [0, \ln(\sqrt{3})] : 0 \leq f(t) \leq \frac{1}{2}$$

b) Dédurre que $(\forall n \in \mathbb{N}) : 0 \leq I_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \ln(\sqrt{3})$ et calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$

D'après la question 2/a) on a : $0 \leq f(t) \leq \frac{1}{2}$ En élevant à la puissance n et en intégrant :

$$0 \leq (f(t))^n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \implies 0 \leq \int_0^{\ln \sqrt{3}} (f(t))^n dt \leq \int_0^{\ln \sqrt{3}} \left(\frac{1}{2}\right)^n dt.$$

$$\text{D'où : } 0 \leq I_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \ln(\sqrt{3}).$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$, d'après le théorème des gendarmes, $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$. ■

3/ Montrer que $I_{n+2} = I_n - \frac{1}{n+1} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

Calculons $I_n - I_{n+2}$:

$$I_n - I_{n+2} = \int_0^{\ln \sqrt{3}} (f(t))^n (1 - f(t)^2) dt.$$

$$\text{Or } 1 - f(t)^2 = f'(t). \text{ Alors } I_n - I_{n+2} = \int_0^{\ln \sqrt{3}} (f(t))^n f'(t) dt = \left[\frac{(f(t))^{n+1}}{n+1} \right]_0^{\ln \sqrt{3}}$$

$$I_n - I_{n+2} = \frac{1}{n+1} \left((f(\ln \sqrt{3}))^{n+1} - f(0)^{n+1} \right) = \frac{1}{n+1} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 0.$$

$$\text{On en déduit : } I_{n+2} = I_n - \frac{1}{n+1} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}.$$

4/ Dédution des expressions de I_{2p} et I_{2p+1}

Par itération de la formule précédente (somme télescopique) :

— Pour $n = 2k - 2$: $I_{2k} - I_{2k-2} = -\frac{1}{2k-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{2k-1}$. En sommant de $k = 1$ à p :

$$I_{2p} = I_0 - \sum_{k=1}^p \frac{1}{2k-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{2k-1}.$$

— Pour $n = 2k - 1$: $I_{2k+1} - I_{2k-1} = -\frac{1}{2k} \left(\frac{1}{2}\right)^{2k}$. En sommant de $k = 1$ à p :

$$I_{2p+1} = I_1 - \sum_{k=1}^p \frac{1}{2k} \left(\frac{1}{2}\right)^{2k}.$$

5/ Convergence et limite de v_n

On a $v_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k \cdot 2^k}$.

Décomposons v_n en termes pairs et impairs :

$$v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1)2^{2k-1}} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k \cdot 2^{2k}}.$$

D'après la question 4 :

$$- \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1)2^{2k-1}} = I_0 - I_{2n}$$

$$- \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k \cdot 2^{2k}} = I_1 - I_{2n+1}$$

Donc $v_n = (I_0 - I_{2n}) + (I_1 - I_{2n+1})$.

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_{2n} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_{2n+1} = 0$ (d'après 2b).

La suite (v_n) converge donc vers $I_0 + I_1$.

D'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \left(\frac{1}{2} \ln 3\right) + \left(\ln 2 - \frac{1}{2} \ln 3\right) = \ln(2)$.

Ainsi : $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ln 2$.

FIN



Sujet 12



Exercice 1

On rappelle que $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ est un espace vectoriel réel.

On considère les deux matrices :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

On considère l'ensemble

$$E = \left\{ M(x, y) = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x + \sqrt{3}y \end{pmatrix} \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

- 1/ a) Montrer que $(E, +, \cdot)$ est un espace vectoriel réel.
b) Montrer que (I, J) est une famille libre, puis en déduire la dimension de l'espace vectoriel E .
- 2/ a) Vérifier que $J^2 = \sqrt{3}J - I$.
b) Montrer que E est une partie stable de $(M_2(\mathbb{R}), \times)$.
- 3/ Soit $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Montrer que $(1, a)$ est une base de l'espace vectoriel réel $(\mathbb{C}, +, \cdot)$.
- 4/ On considère l'application $\varphi_a : E \rightarrow \mathbb{C}$ définie par :

$$\varphi_a : E \rightarrow \mathbb{C}, \quad M(x, y) \mapsto x + ay.$$

- a) Montrer que φ_a est un isomorphisme de $(E, +)$ vers $(\mathbb{C}, +)$.
- b) Déterminer les valeurs de a telles que φ_a soit un homomorphisme de $(E, \times)$ vers $(\mathbb{C}, \times)$.
- c) Posons $a = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$. Soit $n \in \mathbb{N}$.
Calculer $\varphi_a(J^n)$ en fonction de n , en déduire que :

$$J^n = I \iff n \equiv 0[12].$$

Exercice 2

Partie A

Soit $n \in \mathbb{N}$, tel que : $n \geq 2$. Posons $U_n = \underbrace{55 \dots 5}_{n \text{ fois}}$ l'écriture dans la base 7.

- 1/ Montrer que : $6U_n = 5(7^n - 1)$, en déduire que $U_{n+1} \wedge 7 = 1$.
- 2/ Montrer que : $U_{n+1} \wedge U_n = 5$.

Partie B

On admet que 2003 est un nombre premier. Soit x un entier naturel tel que : $x^2 + 1 \equiv 0[2003]$.

- 1/ Montrer que : $x^{2003} \equiv -x[2003]$.
- 2/ Montrer que : $x^{2003} \equiv x[2003]$, en déduire que $2x \equiv 0[2003]$.
- 3/ Montrer que l'équation : $x^2 + 1 \equiv 0[2003]$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{N}$.

Exercice 3

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Soit $m \in \mathbb{C}^*$. On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$(E) : 2z^2 + m(1+i)z + m^2(1+i) = 0$$

- 1/ a) Vérifier que le discriminant de l'équation (E) est : $\Delta = (m(1-3i))^2$.
 b) Résoudre l'équation (E).
 c) Déterminer la forme algébrique de m tel que : $z_1 \times z_2 = 1$.
 d) Dans cette question on suppose que $m = e^{i\alpha}$, où $\alpha \in \mathbb{R}$. Écrire z_1 et z_2 sous la forme trigonométrique.
- 2/ On considère les points A, B et C respectivement d'affixes

$$a = -im, \quad b = -\frac{m}{2} + \frac{1}{2}im, \quad c = -m - \frac{1}{2}mi.$$

- a) Vérifier que :

$$\frac{b-c}{a-c} = i,$$

puis en déduire la nature du triangle ABC.

- b) Soit (Γ) l'ensemble des points $M(m)$ du plan, tel que le rayon du cercle

circonsrit au triangle ABC égale $\sqrt{10}$.

Montrer que (Γ) est un cercle de centre O et de rayon 4.

3/ On considère la transformation F qui associe à chaque point $M(Z)$ le point $M'(Z')$ tel que :

$$Z' = 2iZ - m(2 + i)$$

- Déterminer la nature de F .
- Déterminer l'image du cercle (Γ) par F .

Exercice 4

Partie I

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$f(0) = 1 \quad \text{et} \quad f(x) = \frac{1 - e^{-x}}{x}, \quad \text{si } x > 0.$$

1/

- Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^+$.
- Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^+ : (x+1)e^{-x} - 1 < 0$.
- En déduire la monotonie de f sur $\mathbb{R}^+$.

2/ Soit F_n la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+ : F_n(x) = \frac{e^{-x}}{n!} \int_0^x t^n e^t dt \quad (n \in \mathbb{N}^*).$$

- Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^+ : F_n(x) = x - 1 + e^{-x}$.
- Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^+ : F_{n+1}(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} - F_n(x)$.
- En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, on a :

$$F_2(x) = \frac{x^2}{2} - x + 1 - e^{-x}, \quad F_3(x) = \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} + x - 1 + e^{-x}.$$

3/ Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^+ : \frac{-x}{2} \leq f(x) - 1 \leq \frac{-x}{2} + \frac{x^2}{6}$.

Partie II

On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$F(0) = 1 \quad \text{et} \quad F(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt, \text{ si } x > 0.$$

1/

- a) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^+ : 1 - \frac{x}{4} \leq F(x) \leq 1 - \frac{x}{4} + \frac{x^2}{18}$.
- b) En déduire que F est continue et dérivable à droite en 0 et préciser $F'_d(0)$.

2/

- a) Montrer que : $\forall x \in [1, +\infty[: 0 \leq F(x) \leq \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$.
- b) En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$, puis interpréter géométriquement cette limite.

3/

- a) Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+ : F'(x) = \frac{f(x) - F(x)}{x}.$$

- b) Montrer que F est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^+$.

4/ Construire la courbe (C_F) dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Partie III

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$I_n = \int_0^1 \frac{e^x}{e^x + (1 + e^x)^n} dx.$$

1/

- a) Calculer l'intégrale I_0 .
- b) Montrer que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante, en déduire qu'elle est convergente.
- c) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} : I_n + I_{n+1} = f(n)$, puis en déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.

2/ Pour tout $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, on pose :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k f(k).$$

- a) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R} : \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k e^{-kx} = \frac{(-1)^{n-1} e^x}{e^{nx}(1+e^x)} - \frac{1}{1+e^x}$.
- b) Justifier que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\} : S_n = (-1)^{n-1} I_n + \ln\left(\frac{1+e}{2e}\right)$.
- c) En déduire que la suite $(S_n)_{n \geq 2}$ est convergente en précisant sa limite.

FIN



Sujet 13



Exercice 1

On munit l'ensemble $I = \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ de deux lois de composition internes $\star$ et $\perp$ définies par :

$$(\forall (x, y) \in I^2) \quad x \star y = \arctan(\tan(x) + \tan(y))$$

$$(\forall (x, y) \in I^2) \quad x \perp y = \arctan(\tan(x) \cdot \tan(y))$$

1/ a) Montrer que $\star$ est commutative et associative sur I .

b) Montrer que $(I, \star)$ est un groupe commutatif.

2/ Montrer que $\perp$ est distributive par rapport à $\star$ dans I .

3/ On considère l'application :

$$\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \tan(x)$$

a) Montrer que φ est un isomorphisme de $(I, \perp)$ dans $(\mathbb{R}, \times)$.

b) En déduire que $(I, \star, \perp)$ est un corps commutatif.

4/ Montrer que $\left\{ \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6} \right\}$ est un sous-groupe de $(I^*, \perp)$ avec $I^* = I - \{0\}$.

Exercice 2

On admet que 2969 (l'année amazighe actuelle) est un nombre premier. Soient n et m deux entiers naturels vérifiant : $n^8 + m^8 \equiv 0 \pmod{2969}$

1/ On suppose dans cette question que 2969 ne divise pas n .

a) En utilisant le théorème de BÉZOUT, montrer que :

$$(\exists u \in \mathbb{Z}) : u \times n \equiv 1 [2969]$$

b) En déduire que : $(u \times m)^8 \equiv -1 [2969]$ et que $(u \times m)^{2968} \equiv -1 [2969]$

(On remarque que : $2968 = 8 \times 371$)

c) Montrer que 2969 ne divise pas $u \times m$

d) En déduire qu'on a aussi $(u \times m)^{2968} \equiv 1 [2969]$.

2/ a) En utilisant les résultats précédents, montrer que 2969 divise n .

b) Montrer que : $n^8 + m^8 \equiv 0 \pmod{2969} \iff n \equiv 0 [2969]$ et $m \equiv 0 [2969]$.

Exercice 3

Partie A

Soient $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ et $\omega = \exp\left(\frac{2i\pi}{n}\right)$.

1/ Établir que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 1$,

$$\prod_{k=1}^{n-1} (z - \omega^k) = \sum_{k=0}^{n-1} z^k.$$

2/ Justifier que l'égalité reste valable pour $z = 1$.

3/ En déduire l'égalité

$$\prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}.$$

Partie B

On note E l'équation à valeurs dans $\mathbb{C}$: $z + \bar{z} = |z|$.

1/ Montrer que pour résoudre E , il suffit de déterminer $\theta \in \mathbb{R}$, $e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 1$ (E')

2/ Déterminer les solutions de (E') puis les solutions de (E).

Partie C

Soient $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

On pose

$$A_n = \sum_{k=0}^n C_n^k \sin(kx) \quad \text{et} \quad B_n = \sum_{k=0}^n C_n^k \cos(kx).$$

(On rappelle que $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$)

1/ Montrer que $iA_n + B_n = (1 + e^{ix})^n$.

2/ Déduire les expressions de A_n et B_n .

Exercice 4

Partie I :

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = x \cdot e^{-x}$.

Et soit (C_g) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- 1/ a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$. Puis interpréter géométriquement le résultat.
 b) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{g(x)}{x}$. Puis en déduire que (C_g) admet au voisinage de $-\infty$ une branche parabolique dont on précisera la direction.
- 2/ Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}); \quad g'(x) = (1 - x) \cdot e^{-x}$ et dresser le tableau de variation de g en justifiant la réponse.
- 3/ Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}); \quad g''(x) = (x - 2) \cdot e^{-x}$ puis étudier la concavité de (C_g) et déterminer son point d'inflexion.
- 4/ Construire (C_g) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
- 5/ Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+$, on pose : $A(\lambda) = \int_0^\lambda g(x) dx$.
 a) Vérifier que : $(\forall x \in \mathbb{R}); \quad g(x) + 2g'(x) + g''(x) = 0$. Puis en déduire qu'une primitive de g sur $\mathbb{R}$ est la fonction $G : x \mapsto -2g(x) - g'(x)$.
 b) Exprimer $A(\lambda)$ en fonction de λ , puis calculer $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A(\lambda)$ et interpréter le résultat géométriquement.
- 6/ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $S_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{2n} k \cdot \sqrt[n]{e^{-k}}$.
 Vérifier que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*); \quad S_n = \frac{2}{n} \cdot \sum_{k=1}^{2n} g\left(\frac{k}{2n}\right)$. Puis en déduire que la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente en précisant sa limite.

Partie II :

Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(0) = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad F(x) = \frac{2}{x^2} \int_0^x \frac{g(t)}{1 + e^{-t}} dt; \quad \text{si } x \neq 0.$$

- 1/ a) En utilisant une intégration par changement de variable, montrer que :

$$(\forall x \in \mathbb{R}^*); \quad \int_0^{-x} \frac{g(t)}{1 + e^{-t}} dt = \int_0^x \frac{u}{1 + e^{-u}} du.$$

- b) En déduire que : $(\forall x \in \mathbb{R}); \quad F(-x) = 1 - F(x)$.

2/ a) Vérifier que : $(\forall t \in \mathbb{R}_+); \quad 0 \leq g(t) \leq e^{-1}$. Puis en déduire que :

$$(\forall x \in \mathbb{R}_+^*); \quad 0 \leq F(x) \leq \frac{2e^{-1}}{x}.$$

b) Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$. Puis en déduire $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x)$ en justifiant la réponse.

3/ Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que :

$$(\forall x \in \mathbb{R}_+^*); \quad F'(x) = \frac{2}{x} \left(\frac{1}{1+e^x} - F(x) \right).$$

4/ a) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, en utilisant une intégration par parties, montrer que :

$$F(x) = \frac{1}{1+e^x} + \frac{1}{x^2} \int_0^x \left(\frac{t}{1+e^t} \right)^2 e^t dt.$$

b) En déduire que : $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*); \quad F'(x) = \frac{-2}{x^3} \int_0^x \left(\frac{t}{h(t)} \right)^2 dt.$

Où h est la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $h(t) = e^{\frac{t}{2}} + e^{-\frac{t}{2}}$.

5/ a) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*); \quad \frac{x^3}{3(h(x))^2} \leq \int_0^x \left(\frac{t}{h(t)} \right)^2 dt \leq \frac{x^3}{12}.$
(Ind. : Remarquez que h est croissante sur $\mathbb{R}_+.$)

b) En déduire que : $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*); \quad \frac{-1}{6} \leq F'(x) \leq \frac{-2}{3(h(x))^2}.$

6/ a) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*); \quad \frac{1}{1+e^x} \leq F(x) \leq \frac{1}{1+e^x} + \frac{x}{3}.$
(Ind. : Utiliser la question 4) a) de la partie II.)

b) En déduire que F est continue à droite en 0.

7/ Montrer que F est dérivable en 0 et que : $F'(0) = \frac{-1}{6}.$
(Ind. : On pourra appliquer le théorème des accroissements finis à F .)

8/ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $F(x) = n \cdot x$ admet une solution unique a_n dans $\mathbb{R}$ et justifier que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*); \quad a_n > 0.$

9/ Justifier que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente, puis montrer que :
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0.$

10/ Montrer que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \cdot a_n = \frac{1}{2}.$ Puis en déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(n \cdot a_n - \frac{1}{2} \right).$

FIN